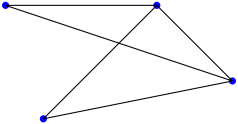
Sztochasztikus folyamatok alapfogalmak

Előadó: Kói Tamás
Slide-okat készítette: Nándori Péter

Matematikai Modellalkotás Szeminárium
2013. szeptember 10.

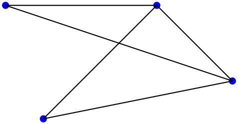
Folytonos idejű Markov láncok I

Adott egy $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ gráf



Folytonos idejű Markov láncok I

Adott egy $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ gráf



Egy $X_t; t \in [0, \infty)$ folyamat folytonos idejű Markov lánc, ha $\forall t$-re $X_t \in \mathcal{V}$, és egy $\alpha(x, y)$ rátafüggvénnyel

$$P(X_{t+dt} = x | X_t = x) = 1 - \alpha(x)dt + o(dt)$$
$$P(X_{t+dt} = y | X_t = x) = \alpha(x, y)dt + o(dt)$$
$$\alpha(x) = \sum_{y \neq x} \alpha(x, y).$$

Folytonos idejű Markov láncok II

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

Folytonos idejű Markov láncok II

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

Folytonos idejű Markov láncok II

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

azaz

$$\underline{\dot{p}}(t) = \underline{p}(t)A, \tag{1}$$

Folytonos idejű Markov láncok II

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y,x)p_y(t),$$

azaz

$$\underline{\dot{p}}(t) = \underline{p}(t)A, \tag{1}$$

ahol $A_{x,y} = \alpha(x,y)$, ha $x \neq y$, és $-\alpha(x)$, ha $x = y$.

Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Például legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mátrixexponenciális függvény - példa

Ekkor $A = QDQ^{-1}$, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Mátrixexponenciális függvény - példa

Ekkor $A = QDQ^{-1}$, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Tehát

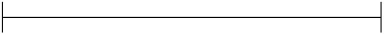
$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q(tD)^n Q^{-1}}{n!} \\ &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:

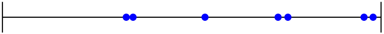
béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



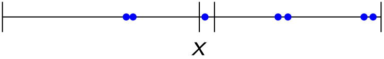
béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



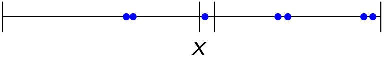
béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



béta-eloszlás I

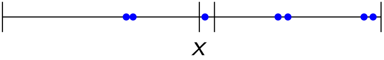
ξ legyen 7 db $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



$$P(\xi \in [x, x + dx]) = \frac{7!}{2!4!} x^2 dx (1 - x - dx)^4 + o(dx),$$

béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0,1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



$$P(\xi \in [x, x+dx]) = \frac{7!}{2!4!} x^2 dx (1-x-dx)^4 + o(dx),$$

így ξ sűrűsége az $x \in [0,1]$ helyen:

$$f(x) = \frac{7!}{2!4!} x^2 (1-x)^4$$

béta-eloszlás II

Általában $\beta(a,b)$ eloszlás sűrűsége a $[0,1]$ intervallumon:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

béta-eloszlás II

Általában $\beta(a, b)$ eloszlás sűrűsége a $[0, 1]$ intervallumon:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Itt a, b pozitív, nem feltétlenül egész számok, és

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$$

Martingálok - szemléletes definíció

Egy $M_1, M_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke "$M_1, \ldots, M_{k-1}$ ismeretében" épp M_{k-1} minden k-ra.

Martingálok - szemléletes definíció

Egy $M_1, M_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke "$M_1, \ldots, M_{k-1}$ ismeretében" épp M_{k-1} minden k-ra.

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

Martingálok - szemléletes definíció

Egy $M_1, M_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke "$M_1, \ldots, M_{k-1}$ ismeretében" épp M_{k-1} minden k-ra.

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A nyereményem: $M_0 = 0$,

ha $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$, akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Martingálok - szemléletes definíció

Egy $M_1, M_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke "$M_1, \ldots, M_{k-1}$ ismeretében" épp M_{k-1} minden k-ra.

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A nyereményem: $M_0 = 0$,

ha $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$, akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Ha pedig $M_{k-1} = 1$, akkor $M_k = 1$.

Martingálok - szemléletes definíció

Egy $M_1, M_2, ...$ valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke "$M_1, ..., M_{k-1}$ ismeretében" épp M_{k-1} minden k-ra.

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A nyereményem: $M_0 = 0$,

ha $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + ... + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$, akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Ha pedig $M_{k-1} = 1$, akkor $M_k = 1$.

Tehát $\mathbb{E}(M_k | M_1, \ldots, M_{k-1}) = M_{k-1}$.

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Pólya féle urnamodell

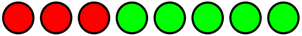
2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!

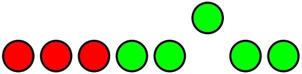
Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!



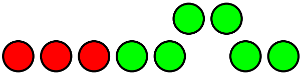
Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!



Pólya féle urnamodell

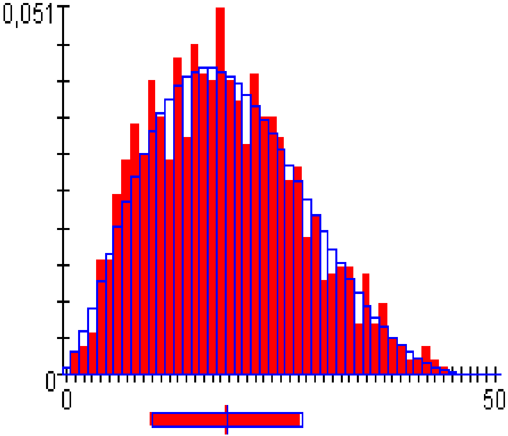
2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!



Pólya féle urnamodell

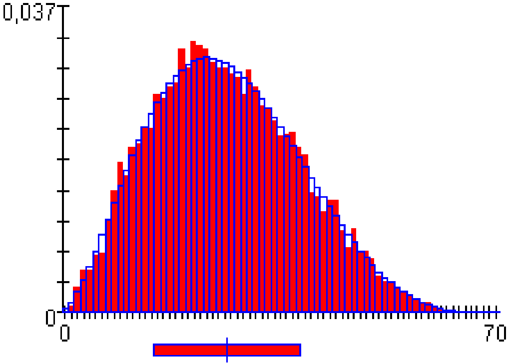
2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!

Monte Carlo szimuláció I



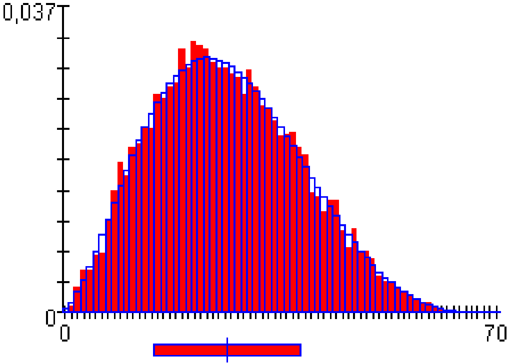
1. ábra. 1000 szimuláció, 50 lépés

Monte Carlo szimuláció II



2. ábra. 10000 szimuláció, 70 lépés

Monte Carlo szimuláció II

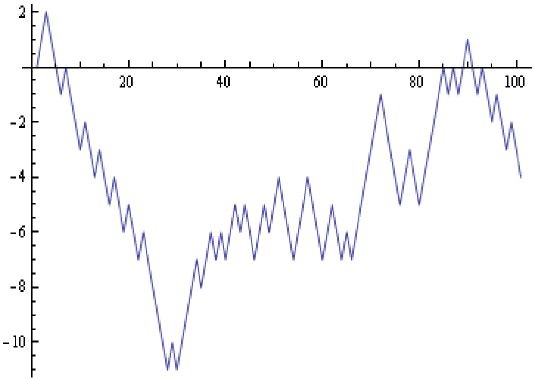


2. ábra. 10000 szimuláció, 70 lépés

A tényleges limesz a $\beta(3,5)$ eloszlás!

Brown mozgás

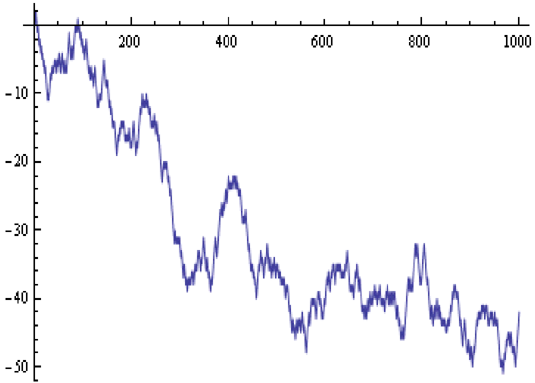
3. Példa: Brown mozgás



3. ábra. Véletlen bolyongás, 100 lépés

Brown mozgás

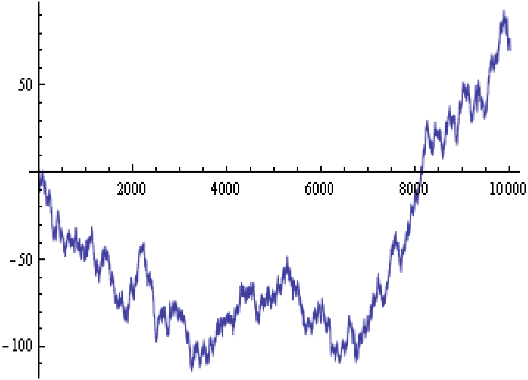
3. Példa: Brown mozgás



4. ábra. Véletlen bolyongás, 1000 lépés

Brown mozgás

3. Példa: Brown mozgás



5. ábra. Véletlen bolyongás, 10000 lépés

Brown mozgás II

A limeszben kapott folyamat a Brown mozgás.

Brown mozgás II

A limeszben kapott folyamat a Brown mozgás.
Definíció: X_t Brown mozgás, ha

- $X_0 = 0$
- minden $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots t_n$ esetén $X_{t_1} - X_{s_1}, \dots X_{t_n} - X_{s_n}$ függetlenek
- minden $s \leq t$ esetén $X_t - X_s \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = t - s\right)$
- $t \to X_t$ majdnem biztosan folytonos.

Orstein-Uhlenbeck folyamat I.

Brown mozgás alkalmazása: SDE

Orstein-Uhlenbeck folyamat I.

Brown mozgás alkalmazása: SDE

Formálisan legyen

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

ahol W_t Brown mozgás. Ekkor X_t Orstein-Uhlenbeck folyamat.

Orstein-Uhlenbeck folyamat I.

Brown mozgás alkalmazása: SDE
Formálisan legyen

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

ahol W_t Brown mozgás. Ekkor X_t Orstein-Uhlenbeck folyamat.
Ekkor

$$\begin{aligned} d(X_t e^{\theta t}) &= X_t \theta e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX_t \\ &= e^{\theta t} \theta \mu dt + \sigma e^{\theta t} dW_t. \end{aligned}$$

Végül t szerint integrálva

$$X_t = X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s$$

Orstein-Uhlenbeck folyamat II.

Az Orstein-Uhlenbeck folyamat további tulajdonságai:

Orstein-Uhlenbeck folyamat II.

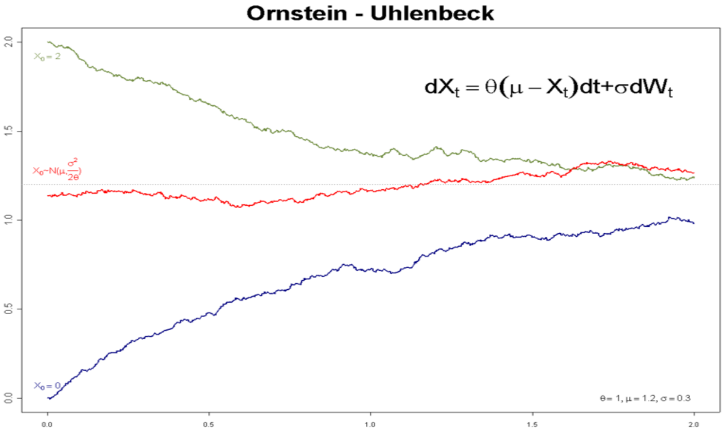
Az Orstein-Uhlenbeck folyamat további tulajdonságai:
Nem martingál, de Gauss, Markov folyamat. Van stacionárius eloszlása: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$

Orstein-Uhlenbeck folyamat II.

Az Orstein-Uhlenbeck folyamat további tulajdonságai:
Nem martingál, de Gauss, Markov folyamat. Van stacionárius eloszlása: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$
Urna modell: Legyen egy urnában n zöld és n piros golyó. Egy lépésben kiveszünk egy véletlen golyót, és azt *ellenkezö színűre* cseréljük. Ha Y_k a piros golyók száma k lépés után. Ekkor

$$\left(\frac{Y_{[nt]} - n}{\sqrt{n}}\right)_{0 \le t \le 1} \Rightarrow (X_t)_{0 \le t \le 1}$$

Orstein-Uhlenbeck folyamat III.



6. ábra. Orstein-Uhlenbeck folyamat realizációi (forrás: Wikipedia)

Poisson folyamat

Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.

Poisson folyamat

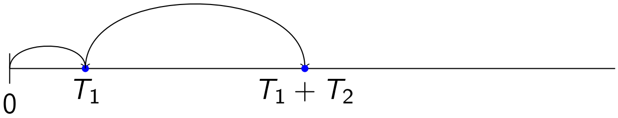
Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.

Poisson folyamat

Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.

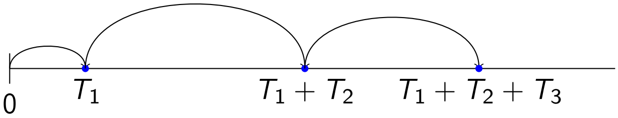
Poisson folyamat

Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



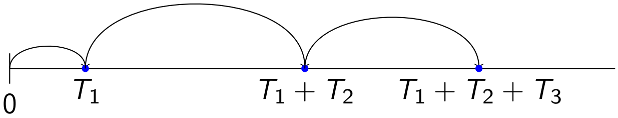
Poisson folyamat

Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



Poisson folyamat

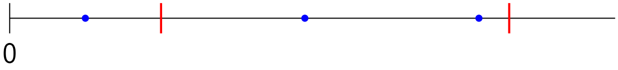
Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



A félegyenesen kapott pontok: **homogén 1 dimenziós Poisson folyamat**

Poisson folyamat

Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



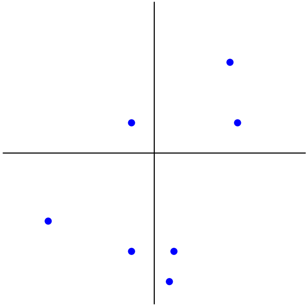
A félegyenesen kapott pontok: **homogén 1 dimenziós Poisson folyamat**
Egy I intervallumba eső pontok száma: $POI(\lambda|I|)$ eloszlású.

Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:
Poisson folyamat: Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.

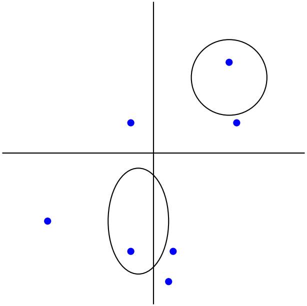
Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:
Poisson folyamat: Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.



Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:
Poisson folyamat: Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.



M/M/1 sorbanállási modell I

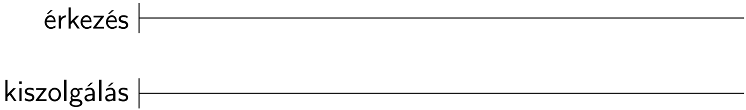
Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.

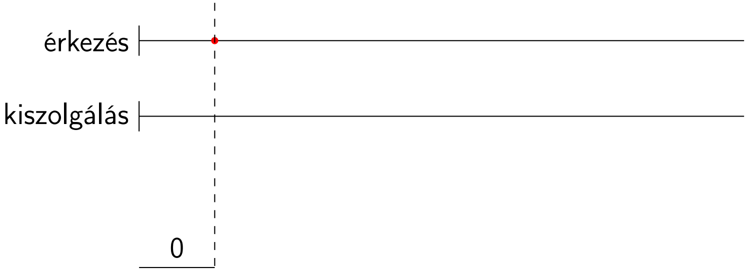
M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



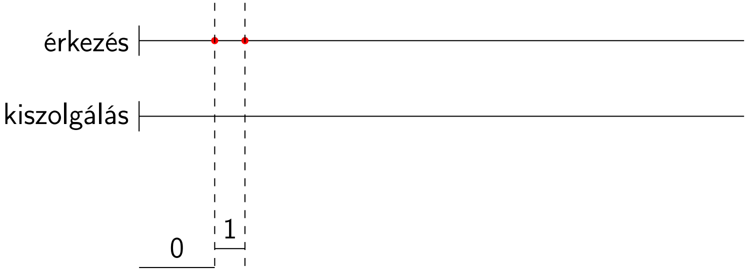
M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



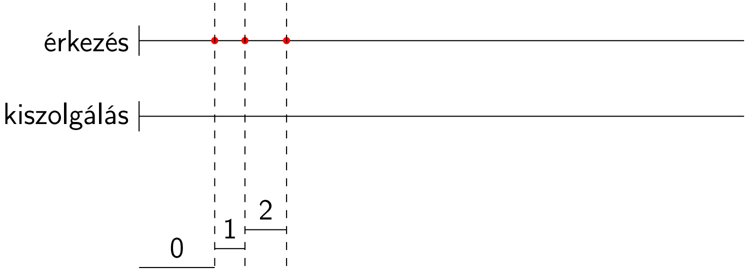
M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



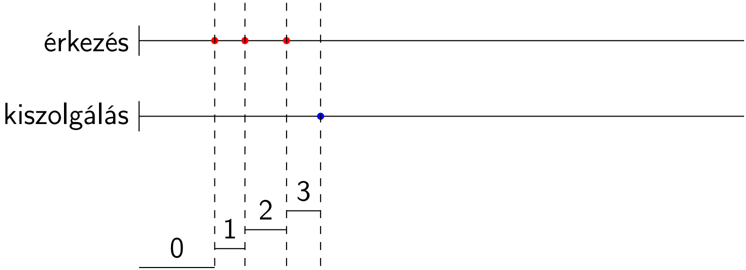
M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



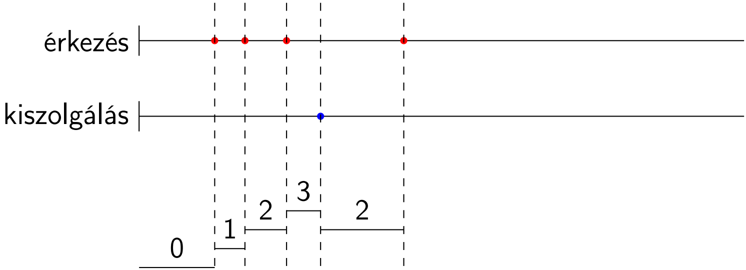
M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



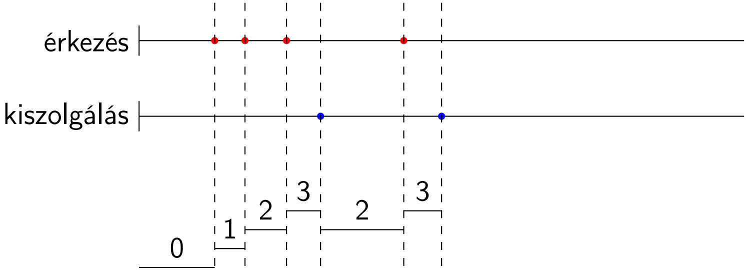
M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha $\lambda > \mu$, akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.

M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha $\lambda > \mu$, akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.
Ha $\lambda < \mu$, akkor a sorhossz nem tart a végtelenhez, és sok idő múlva kb. geometriai eloszlású.

M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha $\lambda > \mu$, akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.
Ha $\lambda < \mu$, akkor a sorhossz nem tart a végtelenhez, és sok idő múlva kb. geometriai eloszlású.
Általánosítási lehetőségek: nem csak egy kiszolgáló (könnyű), nem Poisson folyamat az érkezési idő (nehéz).

Köszönöm a figyelmet!