

# Sztochasztikus folyamatok alapfogalmak

Előadó: Kói Tamás

Eredeti slide-okat készítette: Nándori Péter (azóta bővült)

Matematikai Modellalkotás Szeminárium  
2015. szeptember 8.

- 1 Néhány alapfogalom
- 2 Folytonos idejű Markov láncok
- 3 Béta-eloszlás
- 4 Martingálok
- 5 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

- 1 Néhány alapfogalom
- 2 Folytonos idejű Markov láncok
- 3 Béta-eloszlás
- 4 Martingálok
- 5 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

# Valószínűségi változó által generált $\sigma$ -algebra

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező

# Valószínűségi változó által generált $\sigma$ -algebra

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező
- $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_B)$  valós számok halmaza a Borel  $\sigma$ -algebrával

# Valószínűségi változó által generált $\sigma$ -algebra

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező
- $(R, \mathcal{F}_B)$  valós számok halmaza a Borel  $\sigma$ -algebrával
- $X : \Omega \rightarrow R$  függvény valószínűségi változó ha mérhető  $(\Omega, \mathcal{F})$ -ra (minden  $A \in \mathcal{F}_B$ -re  $\{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ )

# Valószínűségi változó által generált $\sigma$ -algebra

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező
- $(R, \mathcal{F}_B)$  valós számok halmaza a Borel  $\sigma$ -algebrával
- $X : \Omega \rightarrow R$  függvény valószínűségi változó ha mérhető  $(\Omega, \mathcal{F})$ -ra (minden  $A \in \mathcal{F}_B$ -re  $\{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ )
- $X$  által generált  $\sigma(X)$ : a legszűkebb  $\sigma$ -algebra  $\Omega$ -n amelyre mérhető  $X$  ( $\{\omega : X(\omega) \in A\}, A \in \mathcal{F}_B$  halmazok által generált  $\sigma$ -algebra)

## $\sigma$ -algebrára vett feltételes várható érték

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező,  $X$  valószínűségi változó,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$   
 $\sigma$ -algebra

## $\sigma$ -algebrára vett feltételes várható érték

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező,  $X$  valószínűségi változó,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra
- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  egy valószínűségi változó  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -n a következő tulajdonságokkal
  - 1  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  mérhető  $(\Omega, \mathcal{G})$ -re
  - 2  $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P}$  minden  $A \in \mathcal{G}$ -re

## $\sigma$ -algebrára vett feltételes várható érték

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező,  $X$  valószínűségi változó,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra
- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  egy valószínűségi változó  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -n a következő tulajdonságokkal
  - 1  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  mérhető  $(\Omega, \mathcal{G})$ -re
  - 2  $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P}$  minden  $A \in \mathcal{G}$ -re
- Radon-Nikodym-Tétel miatt létezik és  $\mathbb{P}$  majdnem mindenütt egyértelmű

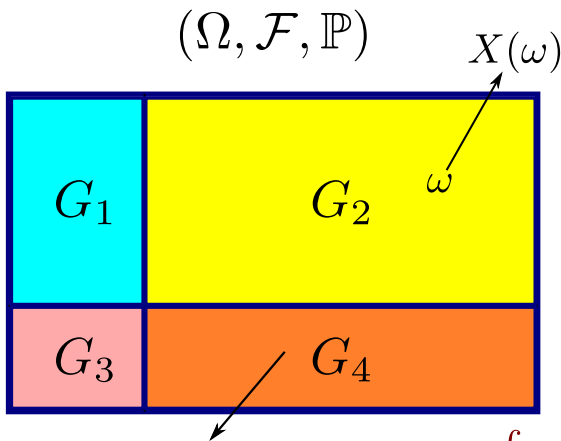
## $\sigma$ -algebrára vett feltételes várható érték

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező,  $X$  valószínűségi változó,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra
- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  egy valószínűségi változó  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -n a következő tulajdonságokkal
  - 1  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  mérhető  $(\Omega, \mathcal{G})$ -re
  - 2  $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P}$  minden  $A \in \mathcal{G}$ -re
- Radon-Nikodym-Tétel miatt létezik és  $\mathbb{P}$  majdnem mindenütt egyértelmű
- $\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$

## $\sigma$ -algebrára vett feltételes várható érték

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező,  $X$  valószínűségi változó,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra
- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  egy valószínűségi változó  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -n a következő tulajdonságokkal
  - 1  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  mérhető  $(\Omega, \mathcal{G})$ -re
  - 2  $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P}$  minden  $A \in \mathcal{G}$ -re
- Radon-Nikodym-Tétel miatt létezik és  $\mathbb{P}$  majdnem mindenütt egyértelmű
- $\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$
- $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$

Ha  $\mathcal{G}$  atomos, akkor 😊



$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$   $G_4$ -en konstansan  $\frac{\int_{G_4} X d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(G_4)}$

- 1 Néhány alapfogalom
- 2 Folytonos idejű Markov láncok
- 3 Béta-eloszlás
- 4 Martingálok
- 5 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

# Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$  véges vagy megszámlálható  $\mathcal{V}$ -beli értékű sztochasztikus folyamat időben homogén folytonos Markov-lánc ha minden  $j \in \mathcal{V}$ -re és  $s < t$ -re:
  - 1  $P(X(t) = j | \sigma(X(u) : u \leq s)) = P(X(t) = j | X(s))$  (a jövő és a múlt a jelenre nézve feltételesen független)
  - 2  $P(X(t) = j | X(s)) = P(X(t - s) = j | X(0))$  (homogenitás)

# Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$

## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen  $T_x$   $x$  elhagyásának ideje

## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen  $T_x$   $x$  elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$

## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen  $T_x$   $x$  elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$

## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen  $T_x$   $x$  elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$

## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen  $T_x$   $x$  elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$

## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen  $T_x$   $x$  elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, t] | X(0) = x) = \mathbb{P}(T_x > t).$

## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen  $T_x$   $x$  elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, t] | X(0) = x) = \mathbb{P}(T_x > t).$
- Így  $T_x$  örökifjú vagyis exponenciális eloszlású

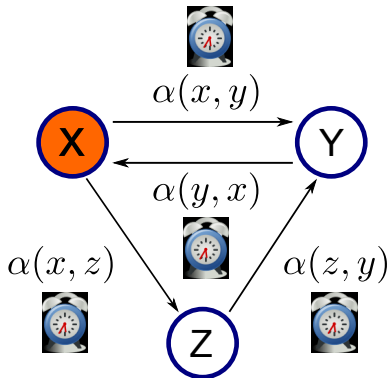
## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen  $T_x$   $x$  elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, t] | X(0) = x) = \mathbb{P}(T_x > t).$
- Így  $T_x$  örökifjú vagyis exponenciális eloszlású
- Jelölje a paraméterét  $\alpha(x)$

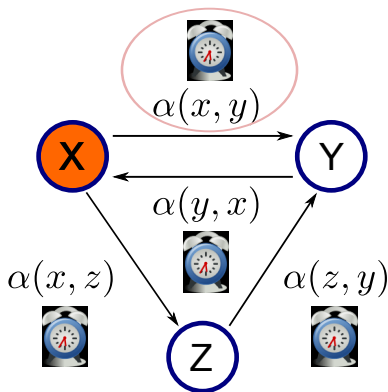
## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy  $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen  $T_x$   $x$  elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, t] | X(0) = x) = \mathbb{P}(T_x > t).$
- Így  $T_x$  örökifjú vagyis exponenciális eloszlású
- Jelölje a paraméterét  $\alpha(x)$
- $\mathbb{P}(T_x > dt) = e^{-\alpha(x)dt} = 1 - \alpha(x)dt + o(dt)$  ha  $dt \rightarrow 0$

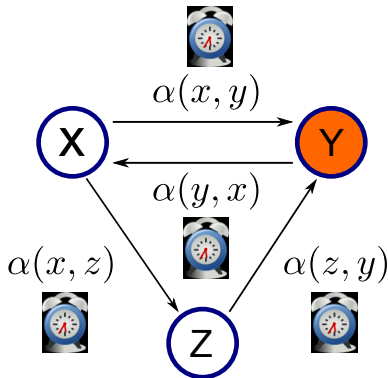
## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



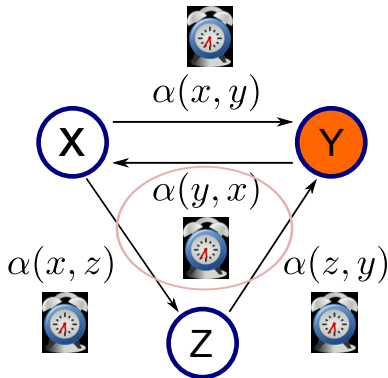
## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



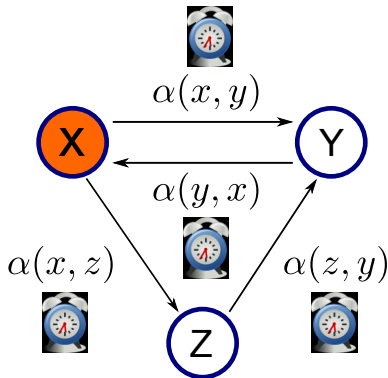
## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



## Folytonos idejű Markov láncok - Definíció III.

Adott egy  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  gráf. Egy  $X_t; t \in [0, \infty)$  folyamat folytonos idejű Markov lánc, ha  $\forall t$ -re  $X_t \in \mathcal{V}$ , és egy  $\alpha(x, y)$  rátafüggvénnyel

$$P(X_{t+dt} = x | X_t = x) = 1 - \alpha(x)dt + o(dt)$$

$$P(X_{t+dt} = y | X_t = x) = \alpha(x, y)dt + o(dt)$$

$$\alpha(x) = \sum_{y \neq x} \alpha(x, y).$$

# Folytonos idejű Markov láncok

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

## Folytonos idejű Markov láncok

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

## Folytonos idejű Markov láncok

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{|V|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

azaz

$$\underline{\dot{p}}(t) = \underline{p}(t)A, \quad (1)$$

## Folytonos idejű Markov láncok

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{|V|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

azaz

$$\underline{\dot{p}}(t) = \underline{p}(t)A, \quad (1)$$

ahol  $A_{x,y} = \alpha(x, y)$ , ha  $x \neq y$ , és  $-\alpha(x)$ , ha  $x = y$ .

# Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

# Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

## Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

## Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Például legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

## Mátrixexponenciális függvény - példa

Ekkor  $A = QDQ^{-1}$ , ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

## Mátrixexponenciális függvény - példa

Ekkor  $A = QDQ^{-1}$ , ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q(tD)^n Q^{-1}}{n!} \\ &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 1 Néhány alapfogalom
- 2 Folytonos idejű Markov láncok
- 3 Béta-eloszlás**
- 4 Martingálok
- 5 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

## béta-eloszlás I

$\xi$  legyen 7 db  $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:

## béta-eloszlás I

$\xi$  legyen 7 db  $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



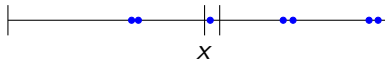
## béta-eloszlás I

$\xi$  legyen 7 db  $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



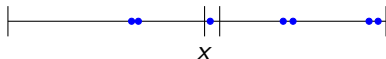
# béta-eloszlás I

$\xi$  legyen 7 db  $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



## béta-eloszlás I

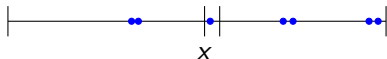
$\xi$  legyen 7 db  $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



$$P(\xi \in [x, x + dx]) = \frac{7!}{2!4!} x^2 dx (1 - x - dx)^4 + o(dx),$$

## béta-eloszlás I

$\xi$  legyen 7 db  $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



$$P(\xi \in [x, x + dx]) = \frac{7!}{2!4!} x^2 dx (1 - x - dx)^4 + o(dx),$$

így  $\xi$  sűrűsége az  $x \in [0, 1]$  helyen:

$$f(x) = \frac{7!}{2!4!} x^2 (1 - x)^4$$

## béta-eloszlás II

Általában  $\beta(a, b)$  eloszlás sűrűsége a  $[0, 1]$  intervallumon:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}.$$

## béta-eloszlás II

Általában  $\beta(a, b)$  eloszlás sűrűsége a  $[0, 1]$  intervallumon:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}.$$

Itt  $a, b$  pozitív, nem feltétlenül egész számok, és

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$$

- 1 Néhány alapfogalom
- 2 Folytonos idejű Markov láncok
- 3 Béta-eloszlás
- 4 Martingálok**
- 5 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

# Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező

## Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező
- Filtráció:  $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$   $\sigma$ -algebrák egy növekvő kollekciója  
 $(\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1})$

## Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező
- Filtráció:  $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$   $\sigma$ -algebrák egy növekvő kollekciója  
( $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1}$ )
- Heurisztikusan  $\mathcal{F}_n$  az  $n$  időperiódusig elérhető információt modellezi

## Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező
- Filtráció:  $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$   $\sigma$ -algebrák egy növekvő kollekciója  
 $(\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1})$
- Heurisztikusan  $\mathcal{F}_n$  az  $n$  időperiódusig elérhető információt modellezi
- $(X)_{n \geq 0}$  valószínűségi változó sorozat Martingál az  $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$  filtrációra ha
  - 1  $(X)_{n \geq 0}$  adaptált  $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$  filtrációra
  - 2 Minden  $n$ -re  $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$
  - 3 Minden  $k < n$ -re  $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k) = X_k$  majdnem biztosan

## Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező
- Filtráció:  $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$   $\sigma$ -algebrák egy növekvő kollekciója  
 $(\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1})$
- Heurisztikusan  $\mathcal{F}_n$  az  $n$  időperiódusig elérhető információt modellezi
- $(X)_{n \geq 0}$  valószínűségi változó sorozat Martingál az  $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$  filtrációra ha
  - 1  $(X)_{n \geq 0}$  adaptált  $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$  filtrációra
  - 2 Minden  $n$ -re  $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$
  - 3 Minden  $k < n$ -re  $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k) = X_k$  majdnem biztosan
- Gyakran az  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$  természetes filtrációt vesszük

# A tét duplázódik

1. **Példa:** Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

# A tét duplázódik

1. **Példa:** Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A nyereményem:  $M_0 = 0$ ,

ha  $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$ , akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

## A tét duplázódik

1. **Példa:** Érmédobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A nyereményem:  $M_0 = 0$ ,

ha  $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$ , akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Ha pedig  $M_{k-1} = 1$ , akkor  $M_k = 1$ .

## A tét duplázódik

1. **Példa:** Érmédobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A nyereményem:  $M_0 = 0$ ,

ha  $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$ , akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Ha pedig  $M_{k-1} = 1$ , akkor  $M_k = 1$ .

Tehát  $\mathbb{E}(M_k | M_1, \dots, M_{k-1}) = M_{k-1}$ .

## Opcionális megállási tétel

- $T: \Omega \rightarrow N_0 \cup \{\infty\}$  megállási idő ha minden  $n$ -re  
 $\{\omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

## Opcionális megállási tétel

- $T: \Omega \rightarrow N_0 \cup \{\infty\}$  megállási idő ha minden  $n$ -re  $\{\omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$
- Az  $n$ -ig elérhető információból meg tudjuk mondani, hogy  $T$  bekövetkezett-e már vagy sem

## Opcionális megállási tétel

- $T: \Omega \rightarrow N_0 \cup \{\infty\}$  megállási idő ha minden  $n$ -re  $\{\omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$
- Az  $n$ -ig elérhető információból meg tudjuk mondani, hogy  $T$  bekövetkezett-e már vagy sem
- *Tétel:* Legyen  $(X)_{n \geq 0}$  martingál  $T$  pedig megállási idő az  $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$  filtrációra nézve. Ekkor ha felsorolt három tulajdonság **valamelyike** teljesül akkor  $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ .
  - 1 Létezik  $K \in \mathbb{R}^+$  úgy, hogy  $T \leq c$  majdnem biztosan
  - 2 Létezik  $K \in \mathbb{R}^+$  úgy, hogy  $|X_{n \wedge T}| \leq K$  és  $T < \infty$  majdnem biztosan
  - 3 Létezik  $K \in \mathbb{R}^+$  úgy, hogy minden  $n \in N_0$ -ra  $\mathbb{E}(|X_{n+1} - X_n| | X_n) < K$  majdnem biztosan a  $\{T > n\}$  eseményen és  $\mathbb{E}(T) < \infty$

## Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.

## Pólya féle urnamodell

**2. Példa:** Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, ugyanolyan színű golyóval együtt.

## Pólya féle urnamodell

**2. Példa:** Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt. Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

## Pólya féle urnamodell

**2. Példa:** Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?  
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

## Pólya féle urnamodell

**2. Példa:** Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**

## Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**



## Pólya féle urnamodell

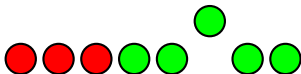
2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**



## Pólya féle urnamodell

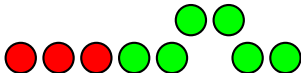
2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**



## Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

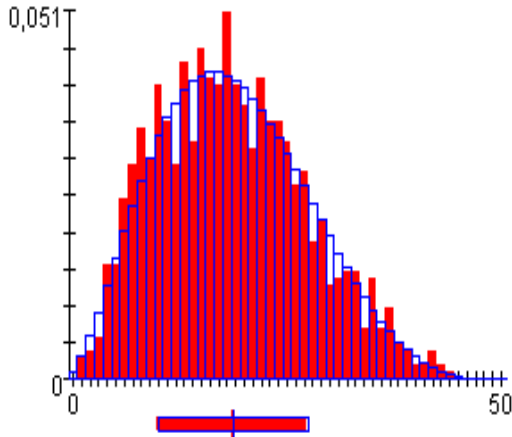
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**

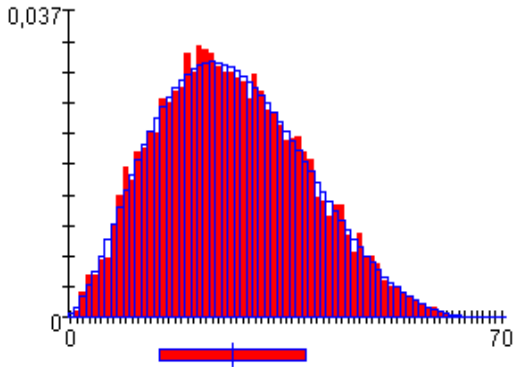


# Monte Carlo szimuláció I



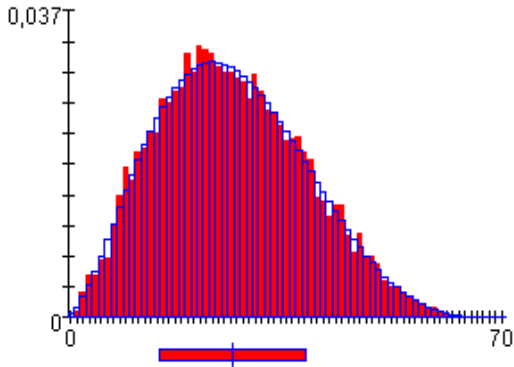
1. ábra. 1000 szimuláció, 50 lépés

# Monte Carlo szimuláció II



2. ábra. 10000 szimuláció, 70 lépés

# Monte Carlo szimuláció II

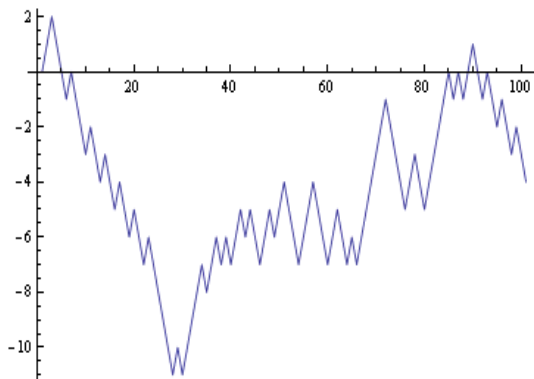


2. ábra. 10000 szimuláció, 70 lépés

A tényleges limesz a  $\beta(3,5)$  eloszlás!

## Brown mozgás

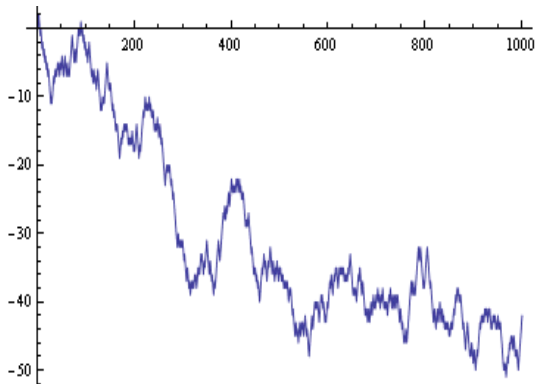
### 3. Példa: Brown mozgás



3. ábra. Véletlen bolyongás, 100 lépés

# Brown mozgás

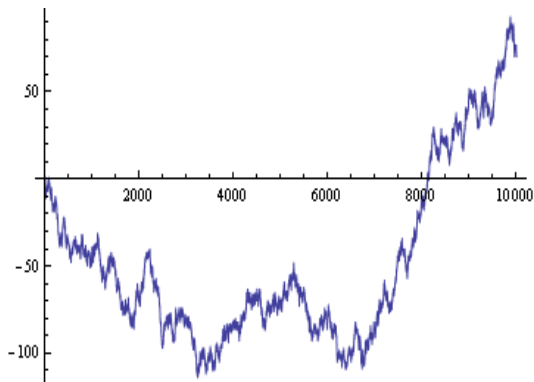
## 3. Példa: Brown mozgás



4. ábra. Véletlen bolyongás, 1000 lépés

## Brown mozgás

### 3. Példa: Brown mozgás



5. ábra. Véletlen bolyongás, 10000 lépés

## Brown mozgás II

A limeszben kapott folyamat a Brown mozgás.

## Brown mozgás II

A limeszben kapott folyamat a Brown mozgás.

Definíció:  $X_t$  Brown mozgás, ha

- $X_0 = 0$
- minden  $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  esetén  $X_{t_1} - X_{s_1}, \dots, X_{t_n} - X_{s_n}$  függetlenek
- minden  $s \leq t$  esetén  $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = t - s)$
- $t \rightarrow X_t$  majdnem biztosan folytonos.

# Orstein-Uhlenbeck folyamat I.

## Brown mozgás alkalmazása: SDE

# Orstein-Uhlenbeck folyamat I.

**Brown mozgás alkalmazása: SDE**

Formálisan legyen

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

ahol  $W_t$  Brown mozgás. Ekkor  $X_t$  Orstein-Uhlenbeck folyamat.

# Orstein-Uhlenbeck folyamat I.

## Brown mozgás alkalmazása: SDE

Formálisan legyen

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

ahol  $W_t$  Brown mozgás. Ekkor  $X_t$  Orstein-Uhlenbeck folyamat.  
Ekkor

$$\begin{aligned}d(X_t e^{\theta t}) &= X_t \theta e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX_t \\ &= e^{\theta t} \theta \mu dt + \sigma e^{\theta t} dW_t.\end{aligned}$$

Végül  $t$  szerint integrálva

$$X_t = X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s$$

## Orstein-Uhlenbeck folyamat II.

Az Orstein-Uhlenbeck folyamat további tulajdonságai:

## Orstein-Uhlenbeck folyamat II.

Az Orstein-Uhlenbeck folyamat további tulajdonságai:  
Nem martingál, de Gauss, Markov folyamat. Van stacionárius eloszlása:  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$

## Orstein-Uhlenbeck folyamat II.

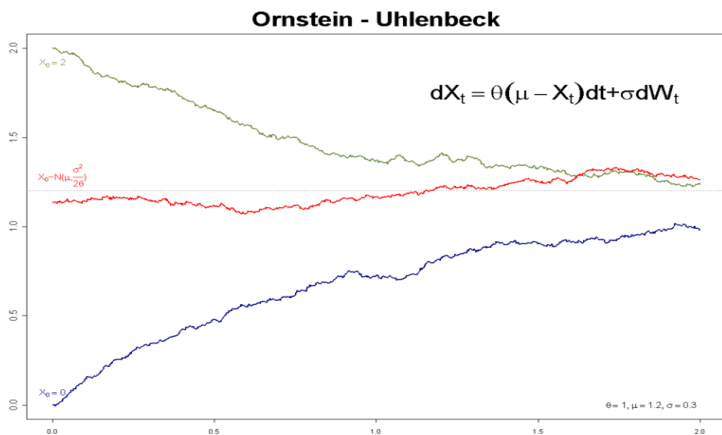
Az Orstein-Uhlenbeck folyamat további tulajdonságai:

Nem martingál, de Gauss, Markov folyamat. Van stacionárius eloszlása:  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$

Urna modell: Legyen egy urnában  $n$  zöld és  $n$  piros golyó. Egy lépésben kiveszünk egy véletlen golyót, és azt *ellenkező színűre* cseréljük. Ha  $Y_k$  a piros golyók száma  $k$  lépés után. Ekkor

$$\left( \frac{Y_{[nt]} - n}{\sqrt{n}} \right)_{0 \leq t \leq 1} \Rightarrow (X_t)_{0 \leq t \leq 1}$$

## Orstein-Uhlenbeck folyamat III.



6. ábra. Ornstein-Uhlenbeck folyamat realizációi (forrás: Wikipedia)

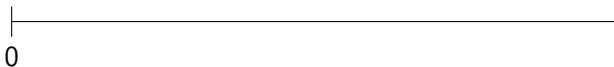
- 1 Néhány alapfogalom
- 2 Folytonos idejű Markov láncok
- 3 Béta-eloszlás
- 4 Martingálok
- 5 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

# Poisson folyamat

Legyenek  $T_1, T_2, \dots$  iid  $Exp(\lambda)$  valószínűségi változók.

# Poisson folyamat

Legyenek  $T_1, T_2, \dots$  iid  $Exp(\lambda)$  valószínűségi változók.



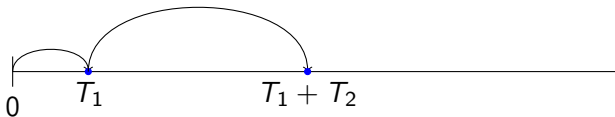
# Poisson folyamat

Legyenek  $T_1, T_2, \dots$  iid  $Exp(\lambda)$  valószínűségi változók.



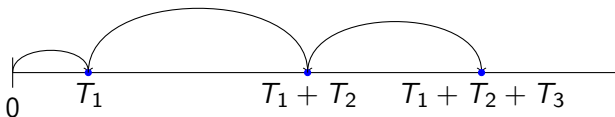
# Poisson folyamat

Legyenek  $T_1, T_2, \dots$  iid  $Exp(\lambda)$  valószínűségi változók.



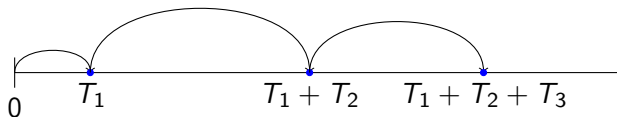
# Poisson folyamat

Legyenek  $T_1, T_2, \dots$  iid  $Exp(\lambda)$  valószínűségi változók.



# Poisson folyamat

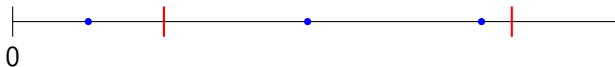
Legyenek  $T_1, T_2, \dots$  iid  $Exp(\lambda)$  valószínűségi változók.



A félegyenesen kapott pontok: **homogén 1 dimenziós Poisson folyamat**

# Poisson folyamat

Legyenek  $T_1, T_2, \dots$  iid  $Exp(\lambda)$  valószínűségi változók.



A félegyenesen kapott pontok: **homogén 1 dimenziós Poisson folyamat**

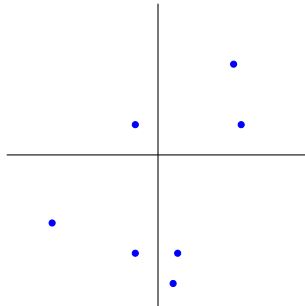
Egy  $I$  intervallumba eső pontok száma:  $POI(\lambda|I|)$  eloszlású.

## Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:  
**Poisson folyamat:** Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.

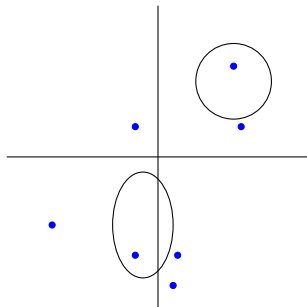
# Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:  
**Poisson folyamat:** Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.



## Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:  
**Poisson folyamat:** Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.



# M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

# M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

Az egyetlen eladó  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.

## M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

Az egyetlen eladó  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.

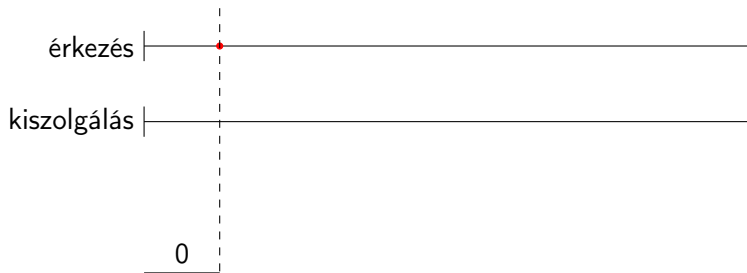
érkezés | \_\_\_\_\_

kiszolgálás | \_\_\_\_\_

# M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

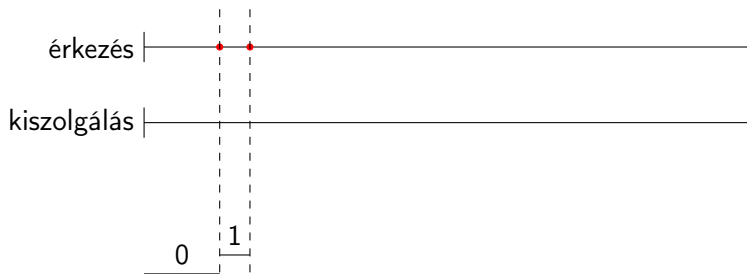
Az egyetlen eladó  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



# M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

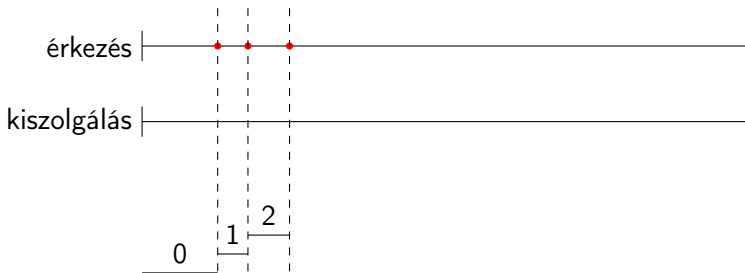
Az egyetlen eladó  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



# M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

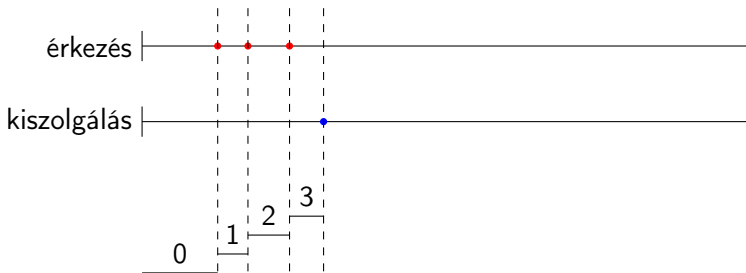
Az egyetlen eladó  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



# M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

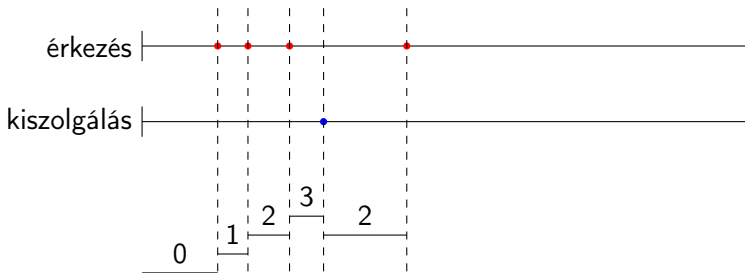
Az egyetlen eladó  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



# M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

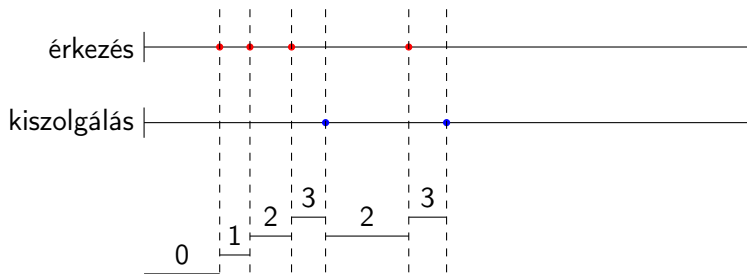
Az egyetlen eladó  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



## M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

Az egyetlen eladó  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



## M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha  $\lambda > \mu$ , akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.

## M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha  $\lambda > \mu$ , akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.

Ha  $\lambda < \mu$ , akkor a sorhossz nem tart a végtelenhez, és sok idő múlva kb. geometriai eloszlású.






## M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha  $\lambda > \mu$ , akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.

Ha  $\lambda < \mu$ , akkor a sorhossz nem tart a végtelenhez, és sok idő múlva kb. geometriai eloszlású.

Általánosítási lehetőségek: nem csak egy kiszolgáló (könnyű), nem Poisson folyamat az érkezési idő (nehéz).

# Köszönöm a figyelmet!

-  Fima C Klebaner: Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial College Press
-  Tóth Bálint kézzel írt Sztocasztikus differenciálegyenletek tárgyhoz készült jegyzete
-  <http://www.math.wisc.edu/anderson/> (régí valószínűleg már nem elérhető lecture notes került felhasználásra)
-  Wikipédia különböző fejezetei
-  Clip Art kép forrása <http://openclipart.com/>