Sztochasztikus folyamatok alapfogalmak

Előadó: Kói Tamás
Eredeti slide-okat készítette: Nándori Péter (azóta bővült)

Matematikai Modellalkotás Szeminárium
2017. szeptember 5.

Valószínűségi változó által generált σ-algebra

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező

Valószínűségi változó által generált σ-algebra

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező
- $(R, \mathcal{F}_B)$ valós számok halmaza a Borel σ-algebrával

Valószínűségi változó által generált σ-algebra

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező
- $(R, \mathcal{F}_B)$ valós számok halmaza a Borel σ-algebrával
- $X : \Omega \to R$ függvény valószínűségi változó ha mérhető (minden $A \in \mathcal{F}_B$-re $\{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$)

Valószínűségi változó által generált σ-algebra

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező
- $(R, \mathcal{F}_B)$ valós számok halmaza a Borel σ-algebrával
- $X : \Omega \to R$ függvény valószínűségi változó ha mérhető (minden $A \in \mathcal{F}_B$-re $\{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$)
- X által generált $\sigma(X)$: a legszűkebb σ-algebra Ω-n amelyre mérhető X ($\{\omega : X(\omega) \in A\}, A \in \mathcal{F}_B$ halmazokból álló σ-algebra)

σ-algebrára vett feltételes várható érték

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, X valószínűségi változó amelyre $\mathbb{E}(|X|) \leq \infty$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra

σ-algebrára vett feltételes várható érték

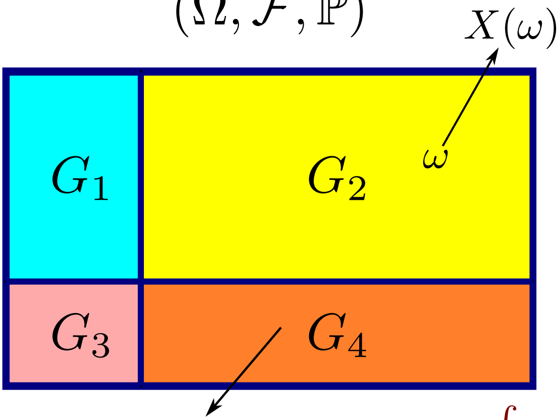
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, X valószínűségi változó amelyre $\mathbb{E}(|X|) \leq \infty$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra
- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ egy valószínűségi változó $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-n a következő tulajdonságokkal
    1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ mérhető $(\Omega, \mathcal{G})$-re
    2. $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P}$ minden $A \in \mathcal{G}$-re

σ-algebrára vett feltételes várható érték

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, X valószínűségi változó amelyre $\mathbb{E}(|X|) \leq \infty$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra
- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ egy valószínűségi változó $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-n a következő tulajdonságokkal
  1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ mérhető $(\Omega, \mathcal{G})$-re
  2. $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P}$ minden $A \in \mathcal{G}$-re
- Radon-Nikodym-Tétel miatt létezik és $\mathbb{P}$ majdnem mindenütt egyértelmű

Ha $\mathcal{G}$ atomos, akkor ☺

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$



$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ G_4-en konstansan $\dfrac{\int_{G_4} X\,d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(G_4)}$

σ-algebrára vett feltételes várható érték

- Ha $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ akkor $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

σ-algebrára vett feltételes várható érték

- Ha $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ akkor $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
- $\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$

σ-algebrára vett feltételes várható érték

- Ha $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ akkor $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
- $\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$
- $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$

σ-algebrára vett feltételes várható érték

- Ha $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ akkor $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
- $\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$
- $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$
- Ha $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ akkor $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$

σ-algebrára vett feltételes várható érték

- Ha $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ akkor $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
- $\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$
- $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$
- Ha $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ akkor $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = ?$

σ-algebrára vett feltételes várható érték

- Ha $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ akkor $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
- $\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$
- $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$
- Ha $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ akkor $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = ?$
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = ?$

Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$ véges vagy megszámlálható $\mathcal{V}$-beli értékű sztochasztikus folyamat időben homogén folytonos Markov-lánc ha minden $j \in \mathcal{V}$-re és $s < t$-re:
  1. $P(X(t) = j | \sigma(X(u) : u \leq s)) = P(X(t) = j | X(s))$ (a jövő és a múlt a jelenre nézve feltételesen független)
  2. $P(X(t) = j | X(s)) = P(X(t-s) = j | X(0))$ (homogenitás)

Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$

Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen T_x x elhagyásának ideje

Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen T_x x elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$

Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen T_x x elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$

Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen T_x x elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$

Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen T_x x elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$

Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen T_x x elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, t] | X(0) = x) = \mathbb{P}(T_x > t)$.

Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen T_x x elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, t] | X(0) = x) = \mathbb{P}(T_x > t)$.
- Így T_x örökifjú vagyis exponenciális eloszlású

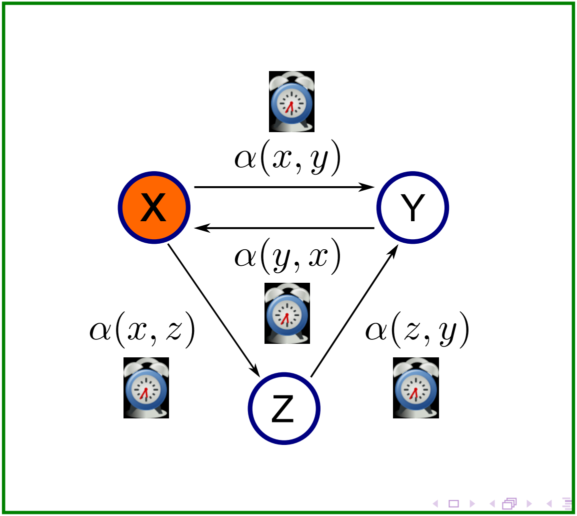
Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen T_x x elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, t] | X(0) = x) = \mathbb{P}(T_x > t).$
- Így T_x örökifjú vagyis exponenciális eloszlású
- Jelölje a paraméterét $\alpha(x)$

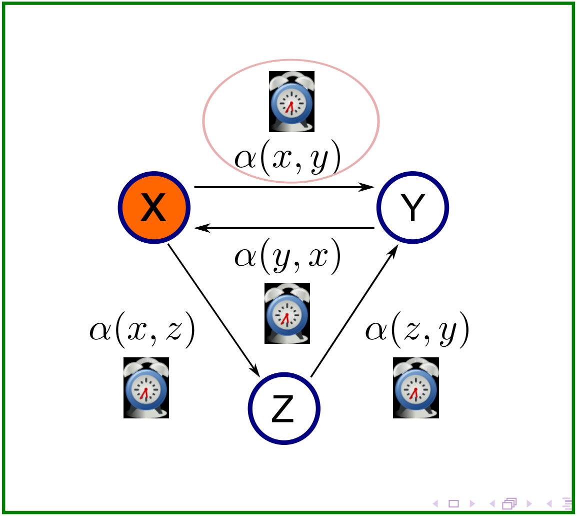
Folytonos idejű Markov láncok - Definíció I.

- Feltesszük, hogy $X(0) = x \in \mathcal{V}$
- Legyen T_x x elhagyásának ideje
- $\mathbb{P}(T_x > s + t | T_x > s)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(r) = x \text{ ha } r \in [0, s])$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [s, s + t] | X(s) = x)$
- $= \mathbb{P}(X(r) = x \text{ ha } r \in [0, t] | X(0) = x) = \mathbb{P}(T_x > t)$.
- Így T_x örökifjú vagyis exponenciális eloszlású
- Jelölje a paraméterét $\alpha(x)$
- $\mathbb{P}(T_x > dt) = e^{-\alpha(x)dt} = 1 - \alpha(x)dt + o(dt)$ ha $dt \to 0$

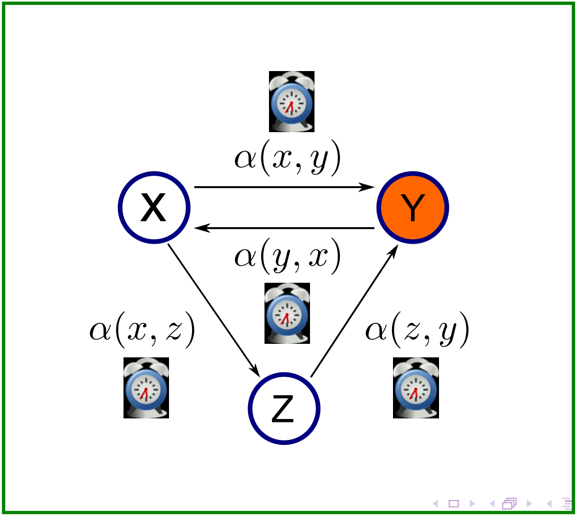
Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



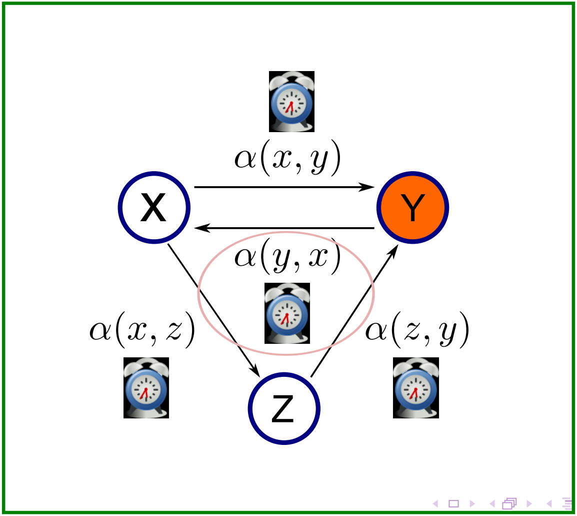
Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



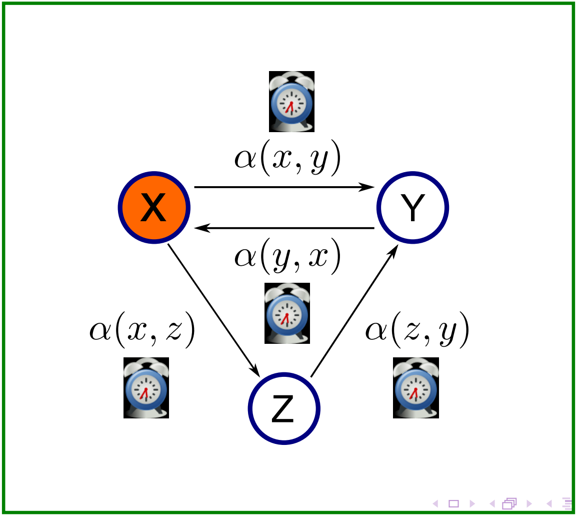
Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



Folytonos idejű Markov láncok - Definíció II.



Folytonos idejű Markov láncok - Definíció III.

Adott egy $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ gráf. Egy $X_t; t \in [0, \infty)$ folyamat folytonos idejű Markov lánc, ha $\forall t$-re $X_t \in \mathcal{V}$, és egy $\alpha(x, y)$ rátafüggvénnyel

$$P(X_{t+dt} = x | X_t = x) = 1 - \alpha(x)dt + o(dt)$$
$$P(X_{t+dt} = y | X_t = x) = \alpha(x, y)dt + o(dt)$$
$$\alpha(x) = \sum_{y \neq x} \alpha(x, y).$$

Folytonos idejű Markov láncok

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

Folytonos idejű Markov láncok

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

Folytonos idejű Markov láncok

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

azaz

$$\underline{\dot{p}}(t) = \underline{p}(t)A, \tag{1}$$

Folytonos idejű Markov láncok

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

azaz

$$\underline{\dot{p}}(t) = \underline{p}(t)A, \tag{1}$$

ahol $A_{x,y} = \alpha(x, y)$, ha $x \neq y$, és $-\alpha(x)$, ha $x = y$.

Mátrixexponenciális függvény

Sok esetben az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

Mátrixexponenciális függvény

Sok esetben az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

Mátrixexponenciális függvény

Sok esetben az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Mátrixexponenciális függvény

Sok esetben az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Például legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mátrixexponenciális függvény - példa

Ekkor $A = QDQ^{-1}$, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Mátrixexponenciális függvény - példa

Ekkor $A = QDQ^{-1}$, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Tehát

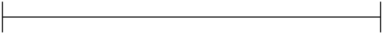
$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q(tD)^n Q^{-1}}{n!} \\ &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0,1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:

béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:

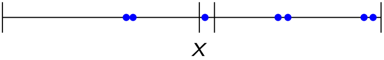


béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:

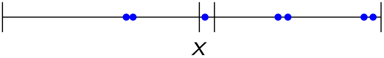
béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0,1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



béta-eloszlás I

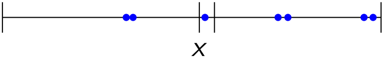
ξ legyen 7 db $[0,1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



$$P(\xi \in [x, x+dx]) = \frac{7!}{2!4!} x^2 dx (1-x-dx)^4 + o(dx),$$

béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0,1]$-en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



$$P(\xi \in [x, x+dx]) = \frac{7!}{2!4!} x^2 dx (1-x-dx)^4 + o(dx),$$

így ξ sűrűsége az $x \in [0,1]$ helyen:

$$f(x) = \frac{7!}{2!4!} x^2 (1-x)^4$$

béta-eloszlás II

Általában $\beta(a,b)$ eloszlás sűrűsége a $[0,1]$ intervallumon:

$$f(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

béta-eloszlás II

Általában $\beta(a, b)$ eloszlás sűrűsége a $[0, 1]$ intervallumon:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Itt a, b pozitív, nem feltétlenül egész számok, és

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$$

Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező

Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező
- Filtráció: $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ σ-algebrák egy növekvő kollekciója $(\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1})$

Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező
- Filtráció: $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ σ-algebrák egy növekvő kollekciója $(\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1})$
- Heurisztikusan $\mathcal{F}_n$ az n időperiódusig elérhető információt modellezi

Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező
- Filtráció: $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ σ-algebrák egy növekvő kollekciója $(\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1})$
- Heurisztikusan $\mathcal{F}_n$ az n időperiódusig elérhető információt modellezi
- $(X_n)_{n \geq 0}$ valószínűségi változó sorozat Martingál az $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ filtációra ha
  1. $(X_n)_{n \geq 0}$ adaptált $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ filtációra
  2. Minden n-re $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$
  3. Minden $k < n$-re $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k) = X_k$ majdnem biztosan

Diszkrét idejű Martingál

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező
- Filtráció: $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ σ-algebrák egy növekvő kollekciója $(\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1})$
- Heurisztikusan $\mathcal{F}_n$ az n időperiódusig elérhető információt modellezi
- $(X_n)_{n\geq 0}$ valószínűségi változó sorozat Martingál az $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ filtációra ha
  1. $(X_n)_{n\geq 0}$ adaptált $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ filtációra
  2. Minden n-re $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$
  3. Minden $k < n$-re $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_k) = X_k$ majdnem biztosan
- Gyakran az $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ természetes filtrációt vesszük

A tét duplázódik

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A tét duplázódik

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.
A nyereményem: $M_0 = 0$,
ha $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + ... + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$, akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

A tét duplázódik

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.
A nyereményem: $M_0 = 0$,
ha $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + ... + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$, akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Ha pedig $M_{k-1} = 1$, akkor $M_k = 1$.

A tét duplázódik

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.
A nyereményem: $M_0 = 0$,
ha $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + ... + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$, akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Ha pedig $M_{k-1} = 1$, akkor $M_k = 1$.
Tehát $\mathbb{E}(M_k | M_1, \ldots, M_{k-1}) = M_{k-1}$.

Opcionális megállási tétel

- T: $\Omega \to N \cup \{\infty\}$ megállási idő ha minden n-re $\{\omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

Opcionális megállási tétel

- T: $\Omega \to N \cup \{\infty\}$ megállási idő ha minden n-re $\{\omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$
- Az n-ig elérhető információból meg tudjuk mondani, hogy T bekövetkezett-e már vagy sem

Opcionális megállási tétel

- T: $\Omega \to N \cup \{\infty\}$ megállási idő ha minden n-re $\{\omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$
- Az n-ig elérhető információból meg tudjuk mondani, hogy T bekövetkezett-e már vagy sem
- *Tétel:* Legyen $(X_n)_{n\geq 0}$ martingál T pedig megállási idő az $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ filtárcióra nézve. Ekkor ha felsorolt három tulajdonság valamelyike teljesül akkor $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.
  1. Létezik $K \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $T \leq K$ majdnem biztosan
  2. Létezik $K \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $|X_{n\wedge T}| \leq K$ és $T < \infty$ majdnem biztosan
  3. Létezik $K \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy minden $n \in N - ra\mathrm{E}(|\mathrm{X}_{n+1} - X_n||X_n) < K$ majdnem biztosan a $\{T > n\}$ eseményen és $\mathbb{E}(T) < \infty$

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Pólya féle urnamodell

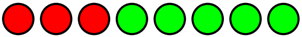
2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya? Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!

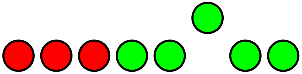
Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!



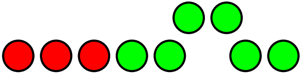
Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!



Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!



Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.
Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.
Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?
Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?
A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk**!

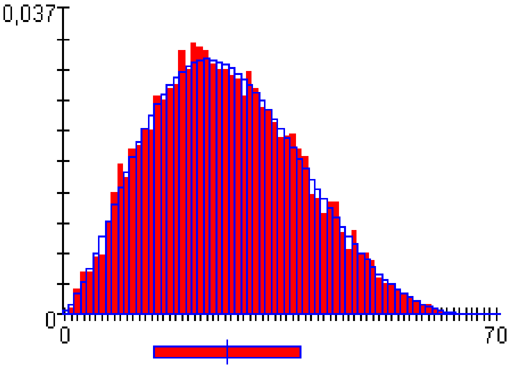
Szimuláció

F4 | =HA(VÉL()<E4;"piros";"zöld")

	B	C	D	E	F
1					
2	**Pólya féle urna**				
3		pirosak	zöldek	pirosak arány	kihúzott golyó színe
4	1	3	5	0,3750	zöld
5	2	3	6	0,3333	piros
6	3	4	6	0,4000	piros
7	4	5	6	0,4545	zöld
8	5	5	7	0,4167	piros
9	6	6	7	0,4615	piros
10	7	7	7	0,5000	zöld
11	8	7	8	0,4667	piros
12	9	8	8	0,5000	piros
13	10	9	8	0,5294	zöld
14	11	9	9	0,5000	zöld
15	12	9	10	0,4737	piros
16	13	10	10	0,5000	zöld
17	14	10	11	0,4762	zöld

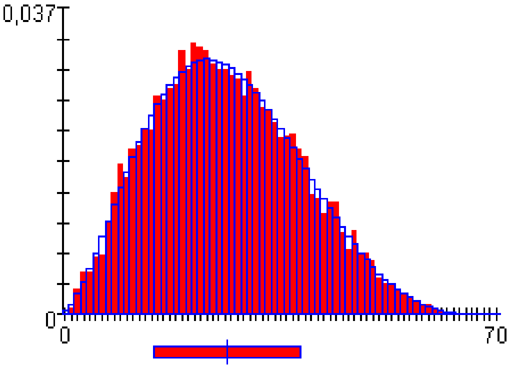
ábra: 1 szimuláció, 70 lépés

Szimuláció



ábra: 10000 szimuláció, 70 lépés

Szimuláció

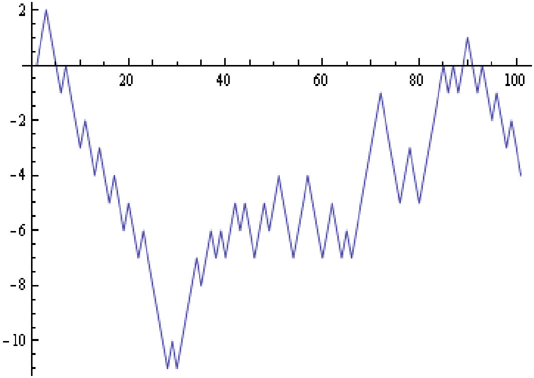


ábra: 10000 szimuláció, 70 lépés

A tényleges limesz a $\beta(3,5)$ eloszlás!

Brown mozgás

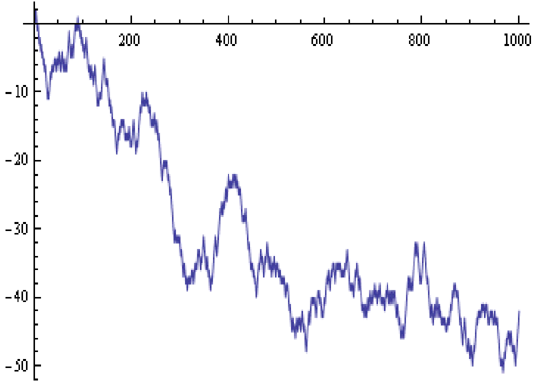
3. Példa: Brown mozgás



ábra: Véletlen bolyongás, 100 lépés

Brown mozgás

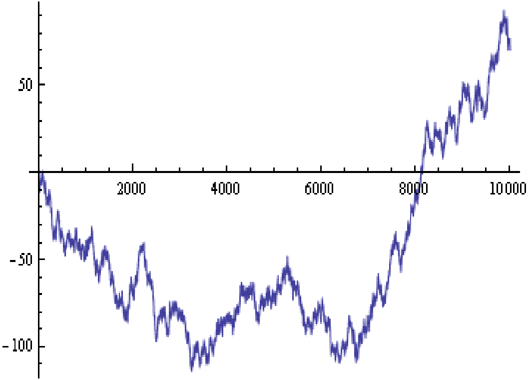
3. Példa: Brown mozgás



ábra: Véletlen bolyongás, 1000 lépés

Brown mozgás

3. Példa: Brown mozgás



ábra: Véletlen bolyongás, 10000 lépés

Brown mozgás II

A limeszben kapott folyamat a Brown mozgás.

Brown mozgás II

A limeszben kapott folyamat a Brown mozgás.
Definíció: X_t Brown mozgás, ha

- $X_0 = 0$
- minden $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \ldots t_n$ esetén $X_{t_1} - X_{s_1}, \ldots X_{t_n} - X_{s_n}$ függetlenek
- minden $s \leq t$ esetén $X_t - X_s \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = t - s\right)$
- $t \to X_t$ majdnem biztosan folytonos.

ITÔ-integrál

- $\mathcal{F}_t$: t időpontig a BM által generált szigma algebra

ITÔ-integrál

- $\mathcal{F}_t$: t időpontig a BM által generált szigma algebra
- Legyenek $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ idők és ξ_0, ξ_1, ..., ξ_{n-1} valószínűségi változók adottak úgy, hogy $\xi_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ és $\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

ITÔ-integrál

- $\mathcal{F}_t$: t időpontig a BM által generált szigma algebra
- Legyenek $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ idők és ξ_0, ξ_1, ..., ξ_{n-1} valószínűségi változók adottak úgy, hogy $\xi_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ és $\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
- Továbbá legyen

$$\sigma(t) = \xi_0 \cdot \mathbb{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \cdot \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

ITÔ-integrál

- $\mathcal{F}_t$: t időpontig a BM által generált szigma algebra
- Legyenek $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ idők és ξ_0, ξ_1, ..., ξ_{n-1} valószínűségi változók adottak úgy, hogy $\xi_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ és $\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
- Továbbá legyen

$$\sigma(t) = \xi_0 \cdot \mathbb{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \cdot \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

- A fenti egyszerű adaptált folyamat ITÔ-integrálja

$$\int_0^T \sigma(t) dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \cdot [W(t_{i+1}) - W(t_i)]$$

ITÔ-integrál

- $\mathcal{F}_t$: t időpontig a BM által generált szigma algebra
- Legyenek $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ idők és ξ_0, ξ_1, ..., ξ_{n-1} valószínűségi változók adottak úgy, hogy $\xi_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ és $\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
- Továbbá legyen

$$\sigma(t) = \xi_0 \cdot \mathbb{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \cdot \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

- A fenti egyszerű adaptált folyamat ITÔ-integrálja

$$\int_0^T \sigma(t) dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \cdot [W(t_{i+1}) - W(t_i)]$$

- Ezt lehet kiterjeszteni limesszel

ITÔ-folyamat (tömören, feltételek nélkül)

- $X(t) = X(0) + \int_0^t \nu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$

ITÔ-folyamat (tömören, feltételek nélkül)

- $X(t) = X(0) + \int_0^t \nu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$
- Röviden: $dX(t) = \nu(t)dt + \sigma(t)dW_t$

ITÔ-folyamat (tömören, feltételek nélkül)

- $X(t) = X(0) + \int_0^t \nu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$
- Röviden: $dX(t) = \nu(t)dt + \sigma(t)dW_t$
- Integrál ITÔ-folyamat szerint:

$$Z(t) = \int_0^t H(s)dX(s)$$
$$= \int_0^t H(s)\nu(s)ds + \int_0^t H(s)\sigma(s)dW_s$$

ITÔ-folyamat (tömören, feltételek nélkül)

- $X(t) = X(0) + \int_0^t \nu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$
- Röviden: $dX(t) = \nu(t)dt + \sigma(t)dW_t$
- Integrál ITÔ-folyamat szerint:

$$Z(t) = \int_0^t H(s)dX(s)$$
$$= \int_0^t H(s)\nu(s)ds + \int_0^t H(s)\sigma(s)dW_s$$

- Röviden: $dZ(t) = H(t)dX(t)$

ITÔ-folyamat (tömören, feltételek nélkül)

- $X(t) = X(0) + \int_0^t \nu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$
- Röviden: $dX(t) = \nu(t)dt + \sigma(t)dW_t$
- Integrál ITÔ-folyamat szerint:

$$Z(t) = \int_0^t H(s)dX(s)$$
$$= \int_0^t H(s)\nu(s)ds + \int_0^t H(s)\sigma(s)dW_s$$

- Röviden: $dZ(t) = H(t)dX(t)$
- Avagy $dZ(t) = H(t)\nu(t)dt + H(t)\sigma(t)dW_t$

ITÔ-folyamat (tömören, feltételek nélkül)

- $X(t) = X(0) + \int_0^t \nu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$
- Röviden: $dX(t) = \nu(t)dt + \sigma(t)dW_t$
- Integrál ITÔ-folyamat szerint:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_0^t H(s)dX(s) \\ &= \int_0^t H(s)\nu(s)ds + \int_0^t H(s)\sigma(s)dW_s \end{aligned}$$

- Röviden: $dZ(t) = H(t)dX(t)$
- Avagy $dZ(t) = H(t)\nu(t)dt + H(t)\sigma(t)dW_t$
- ITÔ formula:
  $df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t)) \cdot \sigma^2(t)dt$

Kamatos kamat perturbálva

- Kamatos kamat $x'(t) = r \cdot x(t)$, vagy átírva $dx(t) = r \cdot x(t)dt$

Kamatos kamat perturbálva

- Kamatos kamat $x'(t) = r \cdot x(t)$, vagy átírva $dx(t) = r \cdot x(t)dt$
- Véletlen zajnak ideális lenne a Brown mozgás deriváltja $\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt}$. De sajnos nem létezik.

Kamatos kamat perturbálva

- Kamatos kamat $x'(t) = r \cdot x(t)$, vagy átírva $dx(t) = r \cdot x(t)dt$
- Véletlen zajnak ideális lenne a Brown mozgás deriváltja $\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt}$. De sajnos nem létezik.
- Ha létezne: $dX(t) = (r + \sigma\xi(t)) \cdot X(t)dt$-t írhatnánk

Kamatos kamat perturbálva

- Kamatos kamat $x'(t) = r \cdot x(t)$, vagy átírva $dx(t) = r \cdot x(t)dt$
- Véletlen zajnak ideális lenne a Brown mozgás deriváltja $\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt}$. De sajnos nem létezik.
- Ha létezne: $dX(t) = (r + \sigma\xi(t)) \cdot X(t)dt$-t írhatnánk
- Ezt értelemezhetjük $dX(t) = r \cdot X(t)dt + \sigma \cdot X(t)dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletként

Kamatos kamat perturbálva

- Kamatos kamat $x'(t) = r \cdot x(t)$, vagy átírva $dx(t) = r \cdot x(t)dt$
- Véletlen zajnak ideális lenne a Brown mozgás deriváltja $\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt}$. De sajnos nem létezik.
- Ha létezne: $dX(t) = (r + \sigma\xi(t)) \cdot X(t)dt$-t írhatnánk
- Ezt értelemezhetjük $dX(t) = r \cdot X(t)dt + \sigma \cdot X(t)dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletként
- Ami igazából integrálegyenlet: $X(t) = X(0) + \int_0^t r \cdot X(s)ds + \int_0^t \sigma \cdot X(s)dW_s$

Kamatos kamat perturbálva

- Kamatos kamat $x'(t) = r \cdot x(t)$, vagy átírva $dx(t) = r \cdot x(t)dt$
- Véletlen zajnak ideális lenne a Brown mozgás deriváltja $\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt}$. De sajnos nem létezik.
- Ha létezne: $dX(t) = (r + \sigma\xi(t)) \cdot X(t)dt$-t írhatnánk
- Ezt értelemezhetjük $dX(t) = r \cdot X(t)dt + \sigma \cdot X(t)dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletként
- Ami igazából integrálegyenlet: $X(t) = X(0) + \int_0^t r \cdot X(s)ds + \int_0^t \sigma \cdot X(s)dW_s$
- Megoldás: ITÔ formula $\ln(X(t))$-re

Kamatos kamat perturbálva

- Kamatos kamat $x'(t) = r \cdot x(t)$, vagy átírva $dx(t) = r \cdot x(t)dt$
- Véletlen zajnak ideális lenne a Brown mozgás deriváltja $\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt}$. De sajnos nem létezik.
- Ha létezne: $dX(t) = (r + \sigma\xi(t)) \cdot X(t)dt$-t írhatnánk
- Ezt értelemezhetjük $dX(t) = r \cdot X(t)dt + \sigma \cdot X(t)dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletként
- Ami igazából integrálegyenlet: $X(t) = X(0) + \int_0^t r \cdot X(s)ds + \int_0^t \sigma \cdot X(s)dW_s$
- Megoldás: ITÔ formula $\ln(X(t))$-re
- Geometriai Brown mozgás

Orstein-Uhlenbeck folyamat I.

SDE definíció:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

ahol W_t Brown mozgás. Ekkor X_t Orstein-Uhlenbeck folyamat.

Orstein-Uhlenbeck folyamat I.

SDE definíció:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

ahol W_t Brown mozgás. Ekkor X_t Orstein-Uhlenbeck folyamat. Ekkor

$$\begin{aligned} d(X_t e^{\theta t}) &= X_t \theta e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX_t \\ &= e^{\theta t} \theta \mu dt + \sigma e^{\theta t} dW_t. \end{aligned}$$

Orstein-Uhlenbeck folyamat I.

SDE definíció:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

ahol W_t Brown mozgás. Ekkor X_t Orstein-Uhlenbeck folyamat. Ekkor

$$\begin{aligned} d(X_t e^{\theta t}) &= X_t \theta e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX_t \\ &= e^{\theta t} \theta \mu dt + \sigma e^{\theta t} dW_t. \end{aligned}$$

Végül t szerint integrálva

$$X_t = X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s$$

Orstein-Uhlenbeck folyamat II.

Az Orstein-Uhlenbeck folyamat további tulajdonságai:

Orstein-Uhlenbeck folyamat II.

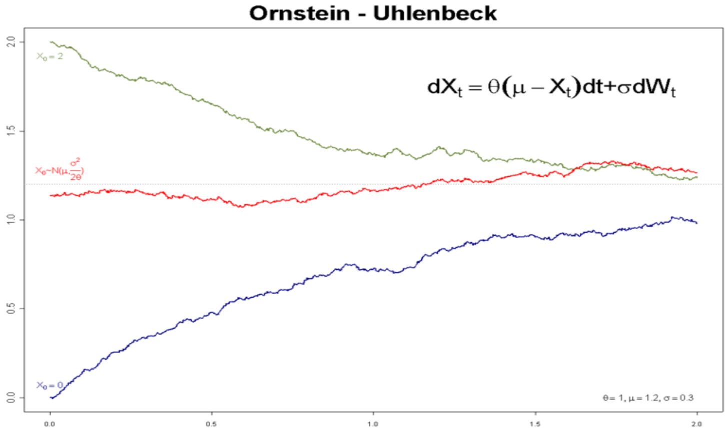
Az Orstein-Uhlenbeck folyamat további tulajdonságai:
Nem martingál, de Gauss, Markov folyamat. Van stacionárius eloszlása: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$

Orstein-Uhlenbeck folyamat II.

Az Orstein-Uhlenbeck folyamat további tulajdonságai:
Nem martingál, de Gauss, Markov folyamat. Van stacionárius eloszlása: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$
Urna modell: Legyen egy urnában n golyó. A golyók zöldek vagy pirosak lehetnek. Egy lépésben kiveszünk egy véletlen golyót, és azt *ellenkezö színűre* cseréljük. Legyen Y_k^n a piros golyók száma k lépés után. Ekkor

$$\left(\frac{Y_{[nt]}^n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \right)_{0 \le t \le 1} \Rightarrow (X_t)_{0 \le t \le 1}$$

Orstein-Uhlenbeck folyamat III.



ábra: Orstein-Uhlenbeck folyamat realizációi (forrás: Wikipedia)

Poisson folyamat

Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.

Poisson folyamat

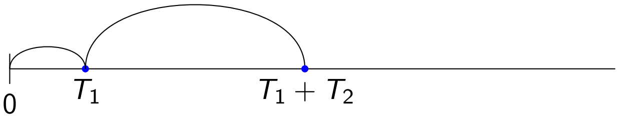
Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.

Poisson folyamat

Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.

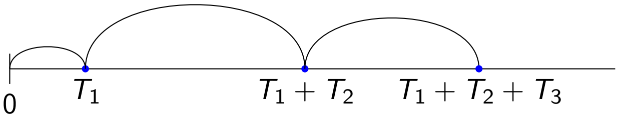
Poisson folyamat

Legyenek T_1, $T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



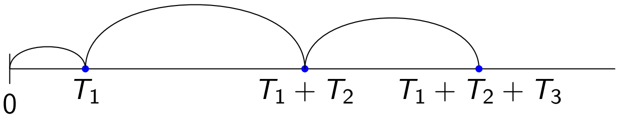
Poisson folyamat

Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



Poisson folyamat

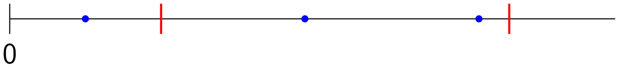
Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



A félegyenesen kapott pontok: **homogén 1 dimenziós Poisson folyamat**

Poisson folyamat

Legyenek $T_1, T_2, \ldots$ iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



A félegyenesen kapott pontok: **homogén 1 dimenziós Poisson folyamat**
Egy I intervallumba eső pontok száma: $POI(\lambda|I|)$ eloszlású.

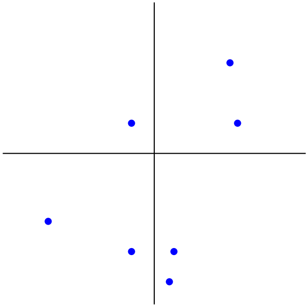
Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:

Poisson folyamat: Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.

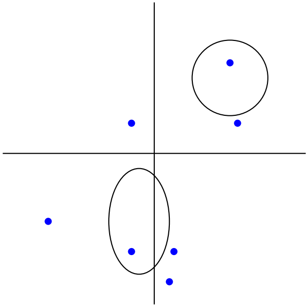
Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:
Poisson folyamat: Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.



Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:
Poisson folyamat: Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.



M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.

M/M/1 sorbanállási modell I

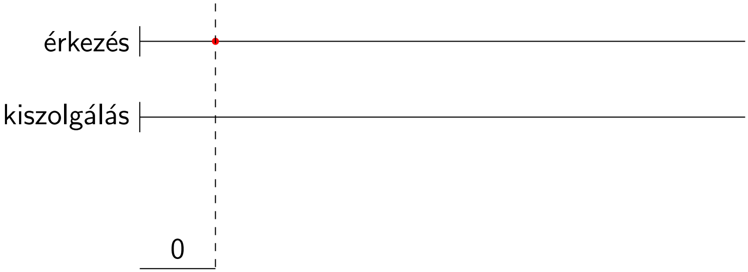
Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.

érkezés

kiszolgálás

M/M/1 sorbanállási modell I

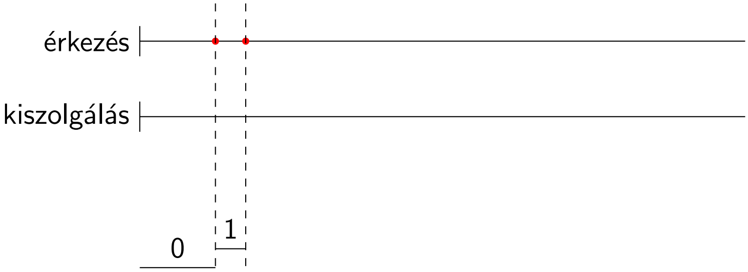
Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell I

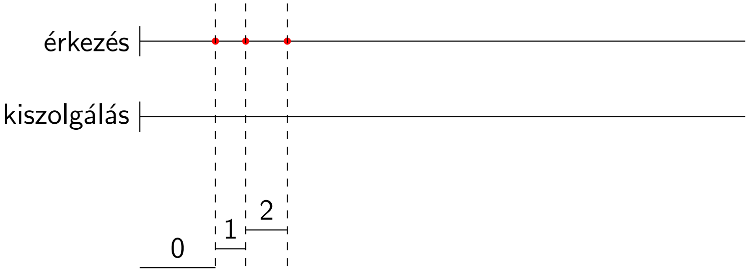
Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



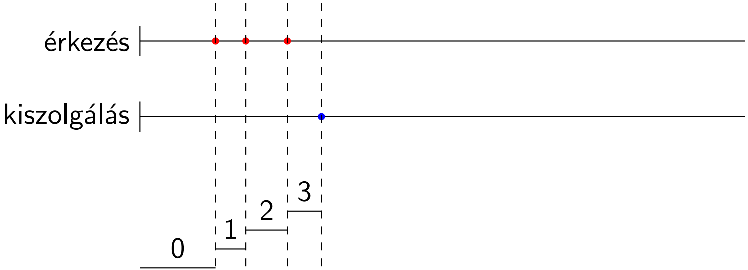
M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



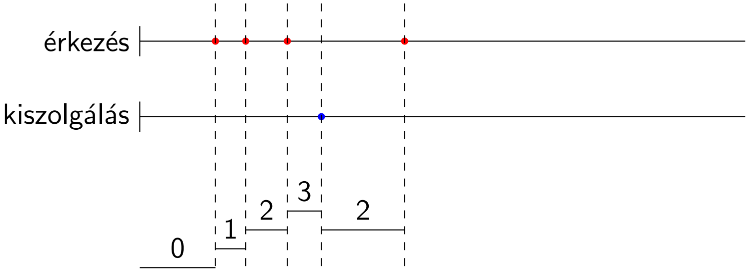
M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



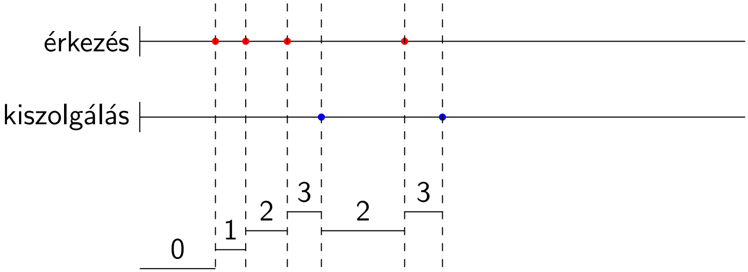
M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha $\lambda > \mu$, akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.

M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha $\lambda > \mu$, akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.
Ha $\lambda < \mu$, akkor a sorhossz nem tart a végtelenhez, és sok idő múlva kb. geometriai eloszlású.

M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha $\lambda > \mu$, akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.
Ha $\lambda < \mu$, akkor a sorhossz nem tart a végtelenhez, és sok idő múlva kb. geometriai eloszlású.
Általánosítási lehetőségek: nem csak egy kiszolgáló (könnyű), nem Poisson folyamat az érkezési idő (nehéz).

Köszönöm a figyelmet!

- Fima C Klebaner: Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial College Press
- http://www.math.wisc.edu/anderson/ (régi valószínűleg már nem elérhető lecture notes került felhasználásra)
- Tóth Bálint kézzel írt Sztochasztikus differenciálegyenletek tárgyhoz készült jegyzete
- Wikipédia különböző fejezetei
- Excel kép forrása Vetier András honlapja
- Clip Art kép forrása http://openclipart.com/