Lineáris programozási modellek érzékenységvizsgálati eredményeinek alkalmazási problémái a termelésmenedzsmentben

Dr. Tamás Koltai

Egyetemi tanár
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Menedzsment és Vállalatgazdaságtan Tanszék

Primál feladat:

$$\text{Max } (\underline{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{x}})$$
$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{b}}$$
$$\underline{\mathbf{x}} \geq 0$$

Optimális megoldás: $\underline{\mathbf{x}}^*$, $\mathbf{OF}^*$

Duál feladat:

$$\text{Min } (\underline{\mathbf{b}}^T \underline{\mathbf{y}})$$
$$\mathbf{A}^T \underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{c}}$$
$$\underline{\mathbf{y}} \geq 0$$

Optimális megoldás : $\underline{\mathbf{y}}^*$, $\mathbf{OF}^*$

Érzékenységvizsgálati eredmények:

- Célfüggvény együtthatók (OFC) érvényességi tartománya
- Árnyékár
- Árnyékár érvényességi tartománya

Gal, T., 1986, Shadow prices and sensitivity analysis in linear programming under degeneracy. *OR Spektrum*, 8, 59-71.

Evans, J. R. and Baker, N. R., 1982, Degeneracy and the (mis)interpretation of sensitivity analysis in linear programming. *Decision Sciences*, 13, 348-354.

Rubin, D. S. and Wagner, H. M., 1990, Shadow prices: tips and traps for managers and instructors. *Interfaces*, 20 (4), 150-157.

Jansen, B., De Jong, J. J., Roos, C., and Terlaky, T., 1997, Sensitivity analysis in linear programming: Just be careful. *European Journal of Operational Research*, 101, 15-28.

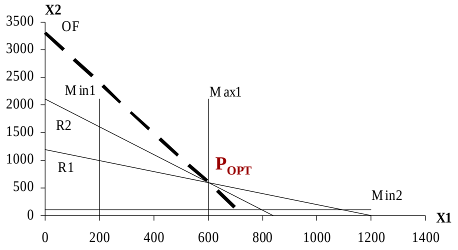
*****

Koltai, T. and Terlaky, T., 2000, The difference between the managerial and mathematical interpretation of sensitivity analysis results in linear programming. *International Journal of Production Economics*, 65, 257-274.

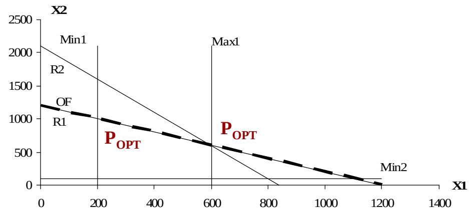
Hadigeh, A. G. and Terlaky, T., 2006, Sensitivity analysis in linear optimization: Invariant support set intervals. *European Journal of Operational Research*, 169, 1158-1175.

Koltai T., Tatay V., 2008, A Practical Approach to Sensitivity Analysis of Linear Programming under Degeneracy in Management Decision Making. *15th International Working Seminar on Production Economics*, Innsbruck, Ausztria, 2008, 223-234 (Volume 3).

$$
\begin{array}{rcccccl}
\text{Max} & \boxed{(900x_1} & + & 200x_2) & & \\
\hline
\text{R1:} & x_1 & + & x_2 & \le & 1200 \\
\text{R2:} & 5x_1 & + & 2x_2 & \le & 4200 \\
\text{Max1:} & x_1 & & & \le & 600 \\
\text{Max2:} & & & x_2 & \le & \infty \\
\text{Min1:} & x_1 & & & \ge & 200 \\
\text{Min2:} & & & x_2 & \ge & 100
\end{array}
$$



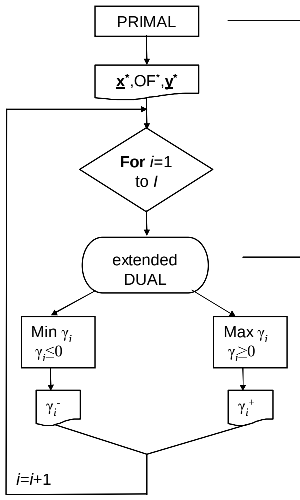
$$
\begin{array}{rcccccl}
\text{Max} & \boxed{(\mathbf{200}x_1} & + & 200x_2) & & \\
\hline
\text{R1:} & x_1 & + & x_2 & \le & 1200 \\
\text{R2:} & 5x_1 & + & 2x_2 & \le & 4200 \\
\text{Max1:} & x_1 & & & \le & 600 \\
\text{Max2:} & & & x_2 & \le & \infty \\
\text{Min1:} & x_1 & & & \ge & 200 \\
\text{Min2:} & & & x_2 & \ge & 100
\end{array}
$$



Additional LP problems for sensitivity analysis

	Maximális csökkenés	Maximális növekedés
Célfüggvény együtthatók érzékenységvizsgálata (OFC)	$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{y}} \ge \underline{\mathbf{c}} - \gamma_i \underline{\mathbf{e}}_i$ $\underline{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{y}} = OF^* - \gamma_i x_i^*$ (3) $\gamma_i \ge 0$ Max (γ_i); Optimális megoldás: γ_i^-	$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{y}} \ge \underline{\mathbf{c}} + \gamma_i \underline{\mathbf{e}}_i$ $\underline{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{y}} = OF^* + \gamma_i x_i^*$ (4) $\gamma_i \ge 0$ Max (γ_i); Optimális megoldás: γ_i^+
Bal oldali érnyékár érzékenységvizsgálata ($\delta<0$) (y_j^-)	$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \le \underline{\mathbf{b}} + \delta\underline{\mathbf{e}}_j - \xi_j \underline{\mathbf{e}}_j$ $\underline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = OF^* - \xi_j y_j^*$ (5) $\xi_j \ge 0$ $\mathrm{Max}(\xi_j)$ Optimális megoldás: $n\xi_j^-$	$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \le \underline{\mathbf{b}} + \delta\underline{\mathbf{e}}_j + \xi_j \underline{\mathbf{e}}_j$ $\underline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = OF^* + \xi_j y_j^*$ (6) $\xi_j \ge 0$ $\mathrm{Max}(\xi_j)$ Optimális megoldás: $n\xi_j^+$
Jobb oldali érnyékár érzékenységvizsgálata ($\delta>0$) (y_j^+)	$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \le \underline{\mathbf{b}} + \delta\underline{\mathbf{e}}_j - \xi_j \underline{\mathbf{e}}_j$ $\underline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = OF^* - \xi_j y_j^*$ (7) $\xi_j \ge 0$ $\mathrm{Max}(\xi_j)$ Optimális megoldás: $p\xi_j^-$	$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \le \underline{\mathbf{b}} + \delta\underline{\mathbf{e}}_j + \xi_j \underline{\mathbf{e}}_j$ $\underline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = OF^* + \xi_j y_j^*$ (8) $\xi_j \ge 0$ $\mathrm{Max}(\xi_j)$ Optimális megoldás: $p\xi_j^+$

A célfüggvény együtthatók (OFC) érzékenységvizsgálati számításának megvalósítása



$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} \le \underline{b}$

$\max\ (\underline{c}^T\,\underline{x})$

$\underline{x} \ge 0$

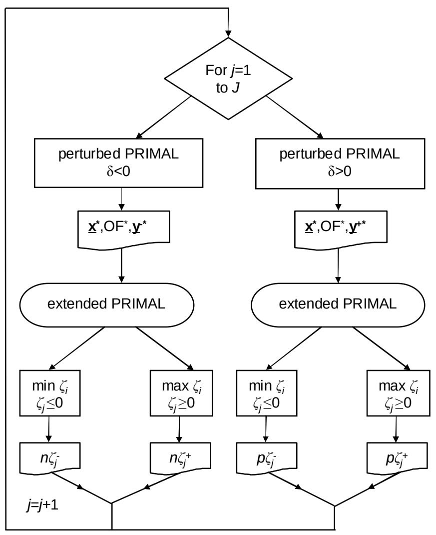
$\underline{\underline{A}}^T\,\underline{y} \ge \underline{c} + \gamma_i \underline{e}_i$

$\underline{b}^T\,\underline{y} = \mathrm{OF}^* + \gamma_i x_i^*$

Változók száma: ***I***

Megoldandó LP feladatok száma: **2*I***

Jobb oldali paraméterek (RHS) érzékenységvizsgálati számításának megvalósítása



$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} \le \underline{b} + d\,\underline{e}_j$

$\max\ (\underline{c}^T\,\underline{x})$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} \le \underline{b} + d\,\underline{e}_j + \xi_j \underline{e}_j$

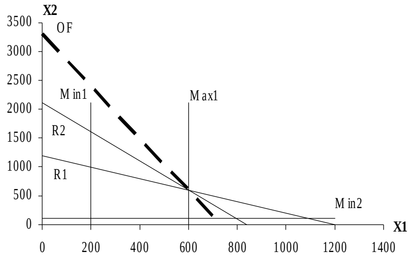
$\underline{c}^T\,\underline{x} = \mathrm{OF}^* + \xi_j y_j^*$

Korlátok száma: ***J***

Megoldandó LP feladatok száma: **6*J***

A mintafeladat OFC érzékenységvizsgálati eredménye

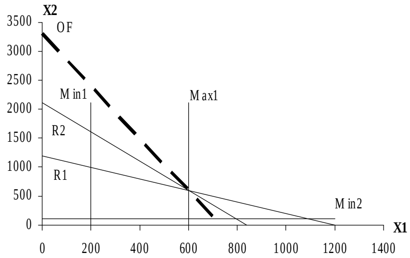
Max	$(900x_1$	+	$200x_2)$			
R1:	x_1	+	x_2	$\leq$	1200	
R2:	$5x_1$	+	$2x_2$	$\leq$	4200	
Max1:	x_1			$\leq$	600	
Max2:			x_2	$\leq$	∞	
Min1:	x_1			$\geq$	200	
Min2:			x_2	$\geq$	100	



i	Eredeti érték	LINGO		POM-QM		Javasolt módszer	
		csökkenés	növekedés	csökkenés	növekedés	γ_i^-	γ_i^+
P1	900	400	∞	700	∞	700	∞
P2	200	200	160	200	700	200	700

A mintafeladat RHS érzékenységvizsgálati eredménye

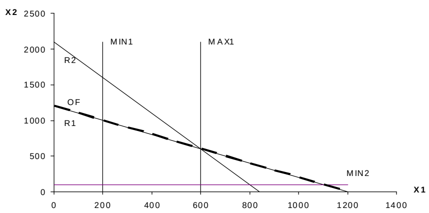
Max	$(900x_1$	+	$200x_2)$			
R1:	x_1	+	x_2	$\leq$	1200	
R2:	$5x_1$	+	$2x_2$	$\leq$	4200	
Max1:	x_1			$\leq$	600	
Max2:			x_2	$\leq$	∞	
Min1:	x_1			$\geq$	200	
Min2:			x_2	$\geq$	100	



j	Eredeti érték	LINGO			POM-QM		
		SP	csökkenés	növekedés	SP	csökkenés	növekedés
R1	1200	0	0	∞	200	500	0
R2	4200	100	1000	0	0	0	∞
Max1	600	400	0	200	700	400	0
Max2	10000	0	9400	∞	0	9400	∞
Min1	200	0	400	∞	0	400	∞
Min2	100	0	500	∞	0	600	∞

j	Eredeti érték	y_j (y_j^-)	Az RHS paraméterek csökkenése		y_j^+	Az RHS paraméterek növekedése	
			$n\xi_j^-$	$n\xi_j^+$		$p\xi_j^-$	$p\xi_j^+$
R1	1200	200	500	0	0	0	∞
R2	4200	100	1000	0	0	0	∞
Max1	600	700	400	0	400	0	200
Max2	10000	0	9400	∞	-	-	-
Min1	200	0	400	∞	-	-	-
Min2	100	0	500	∞	-	-	-

j	Eredeti érték	LINGO			POM-QM		
		SP	csökkenés	növekedés	SP	csökkenés	növekedés
R1	1200	0	0	∞	200	500	0
R2	4200	100	1000	0	0	0	∞
Max1	600	400	0	200	700	400	0
Max2	10000	0	9400	∞	0	9400	∞
Min1	200	0	400	∞	0	400	∞
Min2	100	0	500	∞	0	600	∞



$$
\begin{array}{rrcrcr}
\text{Max} & (\boxed{2\mathbf{00}x_1} & + & 200x_2) & & \\
\text{R1:} & x_1 & + & x_2 & \le & 1200 \\
\text{R2:} & 5x_1 & + & 2x_2 & \le & 4200 \\
\text{Max1:} & x_1 & & & \le & 600 \\
\text{Max2:} & & & x_2 & \le & \infty \\
\text{Min1:} & x_1 & & & \ge & 200 \\
\text{Min2:} & & & x_2 & \ge & 100
\end{array}
$$

j	Eredeti érték	y_j (y_j^-)	RHS paraméterek csökkenése		y_j^+	RHS paraméterek növekedése	
			$n\xi_j^-$	$n\xi_j^+$		$p\xi_j^-$	$p\xi_j^+$
R1	1200	200	900	600	**0**	-	-
R2	4200	**0**	1200	∞	0	-	-
Max1	600	0	400	∞	0	-	-
Max2	10000	0	9400	∞	-	-	-
Min1	200	0	400	∞	-	-	-
Min2	100	0	500	∞	-	-	-

j	Eredeti érték	LINGO			POM-QM		
		SP	csökkenés	növekedés	SP	csökkenés	növekedés
R1	1200	200	0	600	200	0	600
R2	4200	0	1200	0	0	1200	0
Max1	600	0	0	∞	0	0	∞
Max2	10000	0	9400	∞	0	9400	∞
Min1	200	0	400	∞	0	400	∞
Min2	100	0	500	∞	0	500	∞

Termeléstervezési feladat

(Nahmias, S., 1993, *Production and Operations Analysis.* Irwin.)

- egy termék igénye 6 hónapra ismert (D_t)
- az igényt maradéktalanul ki kell elégíteni
- a gyártható mennyiséget a létszám határozza meg (K)
- egy munkás felvételi költsége h_t
- egy munkás elbocsátási költsége f_t
- egy darab termék havi tárolási költsége i_t
- a cél a teljes felvételi elbocsátási és készlettartási költségek minimalizálása
- peremfeltételek: 300 fő induló munkás

  500 db induló készlet

  600 db záró készlet

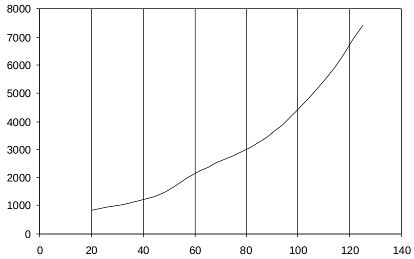
A feladat LP modellje:

$$\text{Min}\left[\sum_{t=1}^{6} h_t H_t + \sum_{t=1}^{6} f_t F_t + \sum_{t=1}^{6} i_t I_t\right]$$

$$W_t - W_{t-1} - H_t + F_t = 0 \qquad t = 1,\ldots,6$$

$$P_t - I_t + I_{t-1} = D_t \qquad t = 1,\ldots,6$$

$$P_t - Kn_t W_t = 0 \qquad t = 1,\ldots,6$$



Hónap (i)	Paraméterek					A primal feladat optimális megoldása				
	n_t	D_t	h_t	f_t	i_t	H_t	F_t	W_t	I_t	P_t
December	0	0	0	0	0	0.00	0.00	300.00	500.00	0.00
Január	20	1280	50	100	8	0.00	33.84	266.16	0.00	780.00
Február	24	552	50	100	8	0.00	0.00	266.16	384.00	936.00
Marcius	18	900	50	100	8	0.00	0.00	266.16	186.00	702.00
Aprilis	26	1200	50	100	8	0.00	0.00	266.16	0.00	1014.00
Május	22	2000	50	100	8	471.63	0.00	737.78	378.38	2378.38
Június	15	1400	50	100	8	0.00	0.00	737.78	600.00	1621.62

OFC érzékenységvizsgálati eredmények:

Változó	Eredetil OFC Érték	LINGO szoftver		Javasolt módszer	
		csökkenés	növekedés	γ_i^-	γ_i^+
H_1	50	150.00	∞	150.00	∞
H_2	50	**79.14**	∞	**97.51**	∞
H_3	50	**22.24**	∞	**34.13**	∞
H_4	50	**0.67**	∞	**7.70**	-∞
H_5	50	150.00	**0.96**	150.00	**4.52**
H_6	50	19.27	∞	19.27	∞
F_1	100	**2.29**	23.76	**150.00**	23.76
F_2	100	70.86	∞	70.86	∞
F_3	100	127.75	∞	127.75	∞
F_4	100	149.32	∞	149.32	∞
F_5	100	150.00	∞	150.00	∞
F_6	100	130.73	∞	130.73	∞
W_1	0	23.76	**2.29**	23.76	-∞
W_2	0	23.76	**2.29**	23.76	**72.63**
W_3	0	23.76	**2.29**	23.76	**72.63**
W_4	0	**0.96**	211.94	**7.70**	211.94
W_5	0	322.46	9.99	322.46	9.99
W_6	0	32.42	9.99	32.42	9.99
I_1	8	8.11	**0.78**	8.11	∞
I_2	8	3.69	**0.35**	3.69	**20.65**
I_3	8	2.62	**0.25**	2.62	**11.80**
I_4	8	1.84	∞	1.84	∞
I_5	8	4.55	14.75	4.55	14.75
P_1	0	8.11	**0.78**	8.11	∞
P_2	0	6.76	**0.65**	6.76	**20.65**
P_3	0	9.01	**0.87**	9.01	**27.54**
P_4	0	2.02	55.63	2.02	55.63
P_5	0	100.03	3.10	100.03	3.10
P_6	0	14.75	4.55	14.75	4.55

RHS érzékenységvizsgálati eredmények:

Korlát	Eredeti RHS érték	LINGO softver			Javasolt módszer					
		y_j	csökkenés	növekedés	y_j (y_j^-)	$n\xi_j^-$	$n\xi_j^+$	y_j^+	$p\xi_j^-$	$p\xi_j^+$
Létszám 1	0	100.00	33.84	∞	100.00	32.84	∞	-	-	-
Létszám 2	0	47.50	0.00	166.19	29.14	42.80	1.00	47.51	1.00	165.19
Létszám 3	0	-15.86	0.00	215.43	-27.75	66.69	1.00	-15.87	1.00	214.43
Létszám 4	0	-42.30	0.00	276.98	-49.32	113.55	1.00	-42.30	1.00	275.99
Létszám 5	0	-50.00	∞	471.63	-50.00	∞	472.63	-	-	-
Létszám 6	0	-30.73	1240.82	289.52	-30.73	1239.82	290.52	-	-	-
Igény 1	1280	-17.91	0.00	99.19	-24.18	3431.00	1.00	-17.91	1.00	98.19
Igény 2	552	-18.02	2557.00	0.00	-18.02	2556.00	1.00	-16.18	1.00	435.42
Igény 3	900	-10.02	2557.00	0.00	-10.02	2556.00	1.00	-8.18	1.00	435.42
Igény 4	1200	-2.02	2557.00	0.00	-2.02	2556.00	1.00	-0.18	1.00	435.42
Igény 5	2000	5.98	2557.00	933.33	5.98	2556.00	934.33	-	-	-
Igény 6	1400	13.98	636.36	∞	13.98	635.36	∞	-	-	-
Termelés 1	0	17.91	99.19	0.00	17.91	98.19	1.00	24.18	1.00	3431.00
Termelés 2	0	18.02	0.00	2557.00	16.18	435.42	1.00	18.02	1.00	2556.00
Termelés 3	0	10.02	0.00	2557.00	8.18	435.42	1.00	10.02	1.00	2556.00
Termelés 4	0	2.02	0.00	2557.00	0.18	435.42	1.00	2.02	1.00	2556.00
Termelés 5	0	-5.98	933.33	2557.00	-5.98	932.33	2558.00	-	-	-
Termelés 6	0	-13.98	2727.27	636.36	-13.98	2726.27	637.36	-	-	-
W_0 feltétel	300	100.00	∞	33.85	100.00	∞	34.84	-	-	-
I_0 feltétel	500	17.91	3432.00	0.00	17.91	3431.00	1.00	24.18	1.00	98.19
I_6 feltétel	600	21.98	∞	600.00	21.98	∞	601.00	-	-	-

Létszám egyenletek:

$$W_t - W_{t-1} - H_t + F_t = 0 \pm 1 \qquad t = 1,\ldots,6$$

$$W_t = W_{t-1} + H_t - F_t \pm 1 \qquad t = 1,\ldots,6$$

Korlát	Eredeti RHS érték	LINGO szoftver			Javasolt mószer					
		y_j	csökkenés	növekedés	y_j (y_j^-)	$n\xi_j^-$	$n\xi_j^+$	y_j^+	$p\xi_j^-$	$p\xi_j^+$
Létszám 1	0	100.00	33.84	∞	100.00	32.84	∞	-	-	-
Létszám 2	0	47.50	0.00	166.19	29.14	42.80	1.00	47.51	1.00	165.19
Létszám 3	0	-15.86	0.00	215.43	-27.75	66.69	1.00	-15.87	1.00	214.43
Létszám 4	0	-42.30	0.00	276.98	-49.32	113.55	1.00	-42.30	1.00	275.99
Létszám 5	0	-50.00	∞	471.63	-50.00	∞	472.63	-	-	-
Létszám 6	0	-30.73	1240.82	289.52	-30.73	1239.82	290.52	-	-	-

Igény egyenletek:

$$P_t - I_t + I_{t-1} = D_t \pm 1 \qquad t = 1,\ldots,6$$

Korlát	Eredeti RHS érték	LINGO szoftver			Javasolt módszer					
		y_j	csökkenés	növekedés	$y_j\,(y_j^-)$	nξ_j^-	nξ_j^+	y_j^+	pξ_j^-	pξ_j^+
Igény 1	1280	-17.91	0.00	99.19	-24.18	3431.00	1.00	-17.91	1.00	98.19
Igény 2	552	-18.02	2557.00	0.00	-18.02	2556.00	1.00	-16.18	1.00	435.42
Igény 3	900	-10.02	2557.00	0.00	-10.02	2556.00	1.00	-8.18	1.00	435.42
Igény 4	1200	-2.02	2557.00	0.00	-2.02	2556.00	1.00	-0.18	1.00	435.42
Igény 5	2000	5.98	2557.00	933.33	5.98	2556.00	934.33	-	-	-
Igény 6	1400	13.98	636.36	∞	13.98	635.36	∞	-	-	-

Termelési egyenletek:

$$P_t - Kn_tW_t = 0 \pm 1 \qquad t = 1,\ldots,6$$

$$P_t = Kn_tW_t \pm 1 \qquad t = 1,\ldots,6$$

Korlát	Eredeti RHS érték	LINGO szoftver			Javasolt módszer					
		y_j	csökkenés	növekedés	$y_j\,(y_j^-)$	nξ_j^-	nξ_j^+	y_j^+	pξ_j^-	pξ_j^+
Termelés 1	0	17.91	99.19	0.00	17.91	98.19	1.00	24.18	1.00	3431.00
Termelés 2	0	18.02	0.00	2557.00	16.18	435.42	1.00	18.02	1.00	2556.00
Termelés 3	0	10.02	0.00	2557.00	8.18	435.42	1.00	10.02	1.00	2556.00
Termelés 4	0	2.02	0.00	2557.00	0.18	435.42	1.00	2.02	1.00	2556.00
Termelés 5	0	-5.98	933.33	2557.00	-5.98	932.33	2558.00	-	-	-
Termelés 6	0	-13.98	2727.27	636.36	-13.98	2726.27	637.36	-	-	-

Összefoglalás

Ha menedzsment döntések a téves LP érzékenységvizsgálati eredményekre épülnek, akkor három fő probléma fordulhat elő:

- Gyakran a célfüggvényegyütthatók érvényességi tartományára a ténylegesnél szűkebb tartományt kapunk.
- Rendszerint csak egyetlen árnyékárat kaponk
- Gyakran a jobb oldali paraméterek érvényességi tartományára a ténylegesnél szűkebb tartományt kapunk.

A megoldandó további LP feladatok száma: **2*I*+6*J***:

- matematikai elemzés a további LP feladatok megoldása előtt
- menedzsment szempontú elemzés a további LP feladatok megoldása előtt
- a számítás felgyorsítása