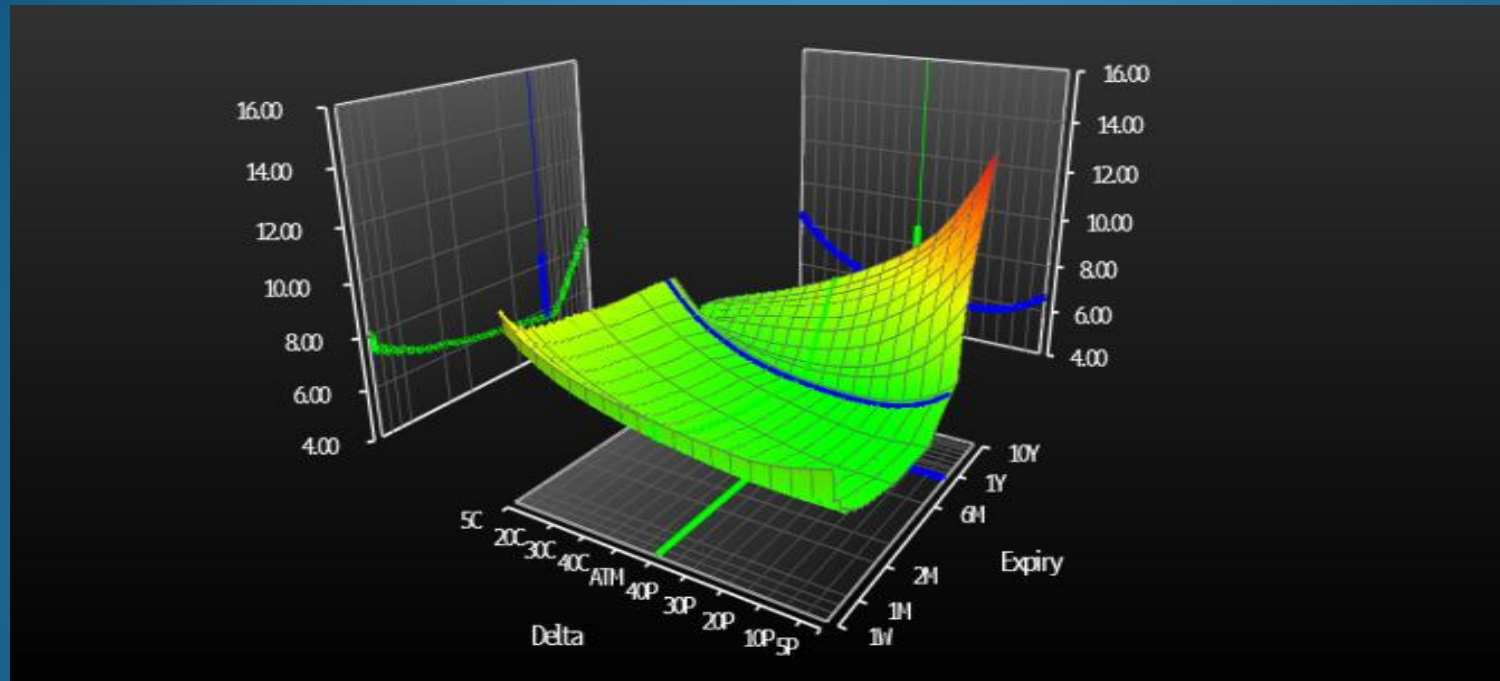


FX opció modellezés és árazás



Matematikai Modellalkotás Szeminárium
2020. november 10.

Koncz Imre,

koncz.imre@gmail.com

DISCLAIMER

All views expressed in this material are my own and do not represent the opinions of any entity whatsoever with which I have been, am now or will be affiliated.

This material is provided for information purposes only and is not intended to be an offer or invitation to anyone to invest in any BlackRock or other products or services. The information and opinions contained herein are not guaranteed as to accuracy or completeness, and are subject to change without notice.

Past performance is not a guide to future performance.

Miről lesz szó?

- FX alaptermék
- Származtatott termékek
- Opció modellek
- **Volatilitás felületek**
- Equity / FX összehasonlítás
- + kérdések, bonusz téma

Piaci szleng

spot is quoted in millions.

billion = 1,000,000,000 = "yard"

Lot = 100,000

USD - Dollar

GBP - Sterling , Cable

JPY - Yen

CHF - Swiss(y)

AUD - Aussie

CAD - Loonie

NZD - Kiwi

SEK - Stocky (named after Stockholm)

DKK - Copey (named after Copenhagen but no longer used)

NOK - Nocky (simply named after its ISO currency code)

SGD - Sing

HKD - Honky

MXN - Mex

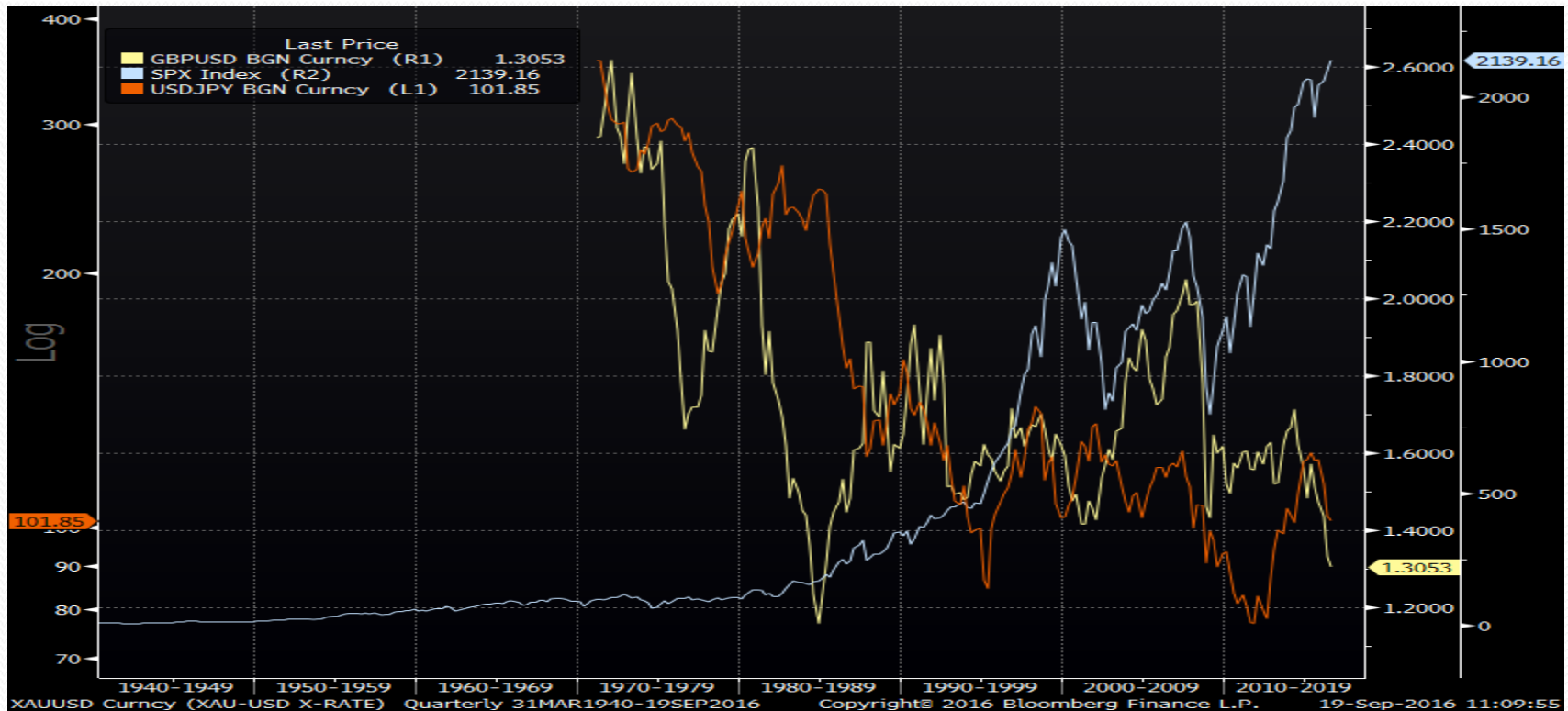
ZAR - Rand

HUF - Huff (simply named after its ISO currency code)

ARS - Argie












Alaptermék (mögöttes termék)

- 1944-1971 *Bretton Woods*
- *OTC, interbank market + e-tőzsdék*
- *Mennyire kereskedhető?*
Kereskedés aktív időpontja, konvertibilitás,
korlátozások (pegged, managed, Non-Delivarable-Forward, etc)



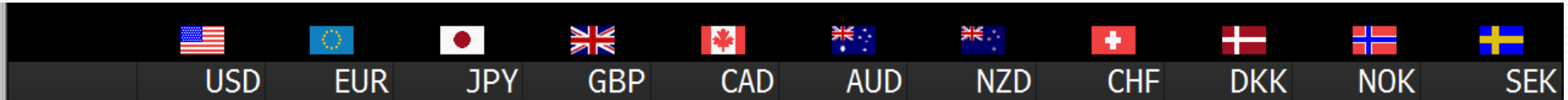
Alaptermék (mögöttes termék)

- G_{10} devizák, $G_{11} = G_{10} + DKK$

	 USD	 EUR	 JPY	 GBP	 CAD	 AUD	 NZD	 CHF	 DKK	 NOK	 SEK
SEK	8.5682	9.5713	.08419	11.202	6.5046	6.4698	6.2676	8.7358	1.2847	1.0357	
NOK	8.2730	9.2415	.08129	10.816	6.2805	6.2468	6.0516	8.4348	1.2404		.96554
DKK	6.6694	7.4502	.06553	8.7196	5.0631	5.0360	4.8786	6.7998		.80617	.77839
CHF	.98082	1.0956	.00964	1.2823	.74460	.74061	.71746		.14706	.11856	.11447
NZD	1.3671	1.5271	.01343	1.7873	1.0378	1.0323		1.3938	.20498	.16525	.15955
AUD	1.3243	1.4794	.01301	1.7315	1.0054		.96875	1.3502	.19857	.16008	.15456
CAD	1.3173	1.4715	.01294	1.7222		.99464	.96356	1.3430	.19751	.15922	.15374
GBP	.76487	.85441	.00752		.58066	.57755	.55950	.77983	.11468	.09245	.08927
JPY	101.77	113.69		133.06	77.261	76.847	74.445	103.76	15.259	12.302	11.878
EUR	.89520		.00880	1.1704	.67960	.67596	.65483	.91271	.13423	.10821	.10448
USD		1.1171	.00983	1.3074	.75916	.75509	.73149	1.0196	.14994	.12088	.11671

Alaptermék (mögöttes termék)

- *G10 devizák, $G11 = G10 + DKK$*



- *EM (Emerging Market)*



- *Latin-Amerika, Afrika, Ázsia*
- *Nemesfémek (FX és commodity határán)*
XAU, XAG, XPT, XPD

Származtatott termékek (derivatívák)

- Alap termék / mögöttes termék (Underlying)
tipikusan egy „spot” árfolyam , pl EUR/USD
 $S : t \rightarrow R$
 $S : t \rightarrow R^n$
 S_t
- Származtatott terméket a kifizetés definiálja amely a mögöttes termék (underlying) árfolyamatának tetszőleges funkcionálja
- $F : S_t, [T_1 \dots T_2] \rightarrow R$ (+numeraire)
- Valójában a kifizetésnek „dimenziója” van, mérhetjük például dollárban, forintban, stb. (numeraire)
- *Prémium/ zero cost (pl. csere-ügyletek)*

Származtatott termékek (derivatívák)

- Path-independent, $F(\dots) = f(S_T)$

<i>forward:</i>	$S_T - K$
<i>call:</i>	$(S_T - K)^+$
<i>put,</i>	$(K - S_T)^+$
<i>digital call...</i>	$I(S_T > K)$

- Path-dependent:
barrier, knockin, variancia-swap, volatility swap, Volatility KnockOut, One-Touch, Double-No-Touch
- Multi-asset:
correlation-swap, worst-of, best-of, basket, spread, option + condition (különböző pár)

Opció

- Származtatott termékek részhalmaza
- Opció:

$$F(..) = \max(0, F^{(1)}(..))$$

Jog (lehetőség) arra, hogy válasszunk: valamilyen kifizetést megkapjunk , vagy ne kapjuk semmit.

Egy opció kifizetése mindig nem-negatív.

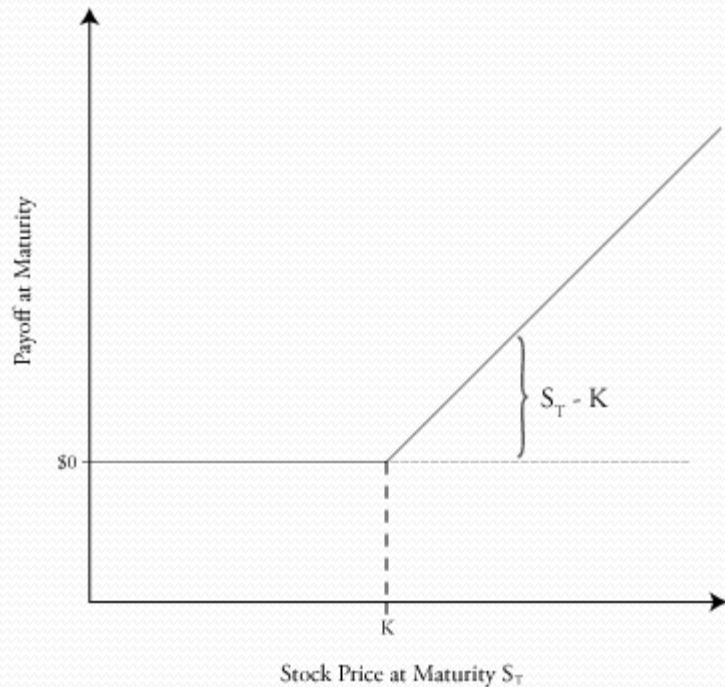
Egy opció várható értéke mindig nem-negatív.

Call és Put opciók

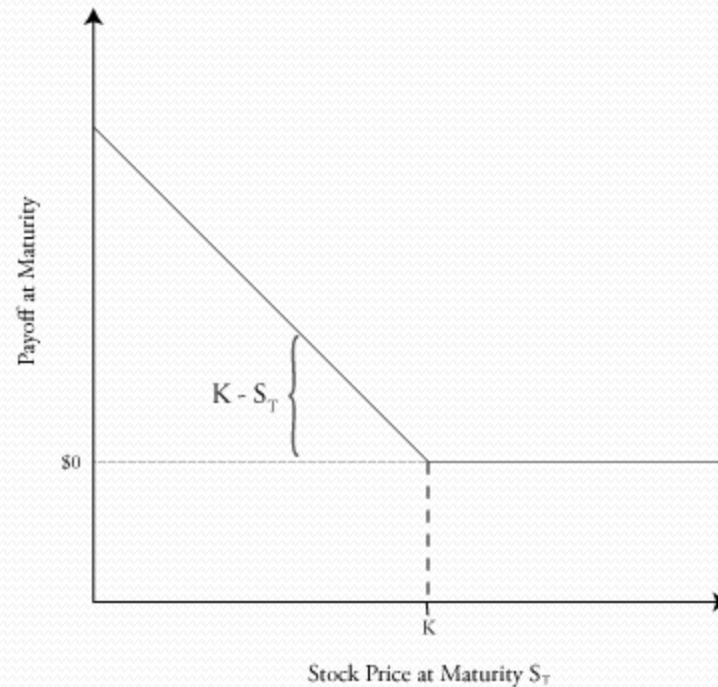
- Call opció
- Jog **megvenni** egy terméket egy adott áron (*Strike*)

- Put opció
- Jog **eladni** egy terméket egy adott áron (*Strike*)

Call Option Payoff as a Function of Stock Price



Put Option Payoff as a Function of Stock Price



Fx piac sajátosságai, kihívásai

- Bármely két deviza arányára lehet opciót kötni (Apple/Google opció ??)
- Szinte tetszőleges funkcionál kereskedhető...
- multi-asset modellezés szükséges
- Opció ára *foreign* devizában, pl. EUR/HUF opció ára EUR-ban (Apple opció Apple-ban??)
- numeraire nagyon fontos,
- Kvantó effektus (természetese módon van jelen), Siegel-paradoxon
- Speciális, (nem konzisztens) konvenciók (strike számolás algoritmussal...) + naptár + ...
- Árazás (quote): ATM, RiskReversal, Butterfly (25 Delta), *premium included delta*, forward points,
- Interest rate (kamatláb):
időfüggő
sztochasztikus
Hozamgörbék „főzése” (külön iparág)
Spot-Forward-Interest Rate arbitrázskör
- + hiányzó/hibás adatok!

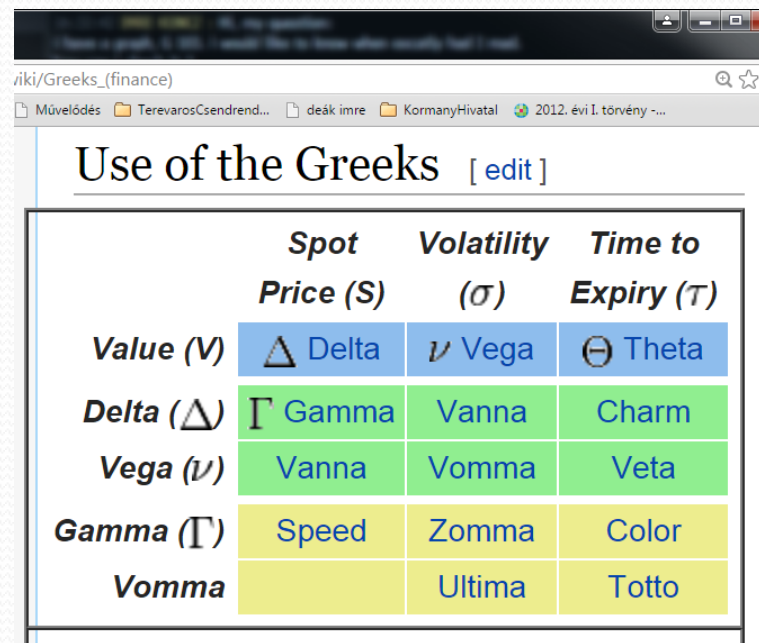
FX Opció modellezés

Hogyan használjuk az árazó modelleket?

1. Kalibráció a „piacra” (vanilla termékek: call, put)
 2. Árazás (tetszőleges termékek beárazása: Monte-Carlo)
 3. Delta, „Greek-ek”, érzékenységek
 4. *Hedgelés* : egy termék kockázatának csökkentése egy másik eszköz használatával. („fedezés”)
- Két megközelítés:
 1. *Interpolálás (model szofisztikált interpolási eszköz)*
 2. *A dinamikának és a paramétereknek érhetőnek kell lennie a fizikai meaurben is, paraméterek legyenek közel a valós fizikai értékekhez*

Elvárások a modelltől:

- arbitrage-mentesség (RN esetén automatikusan)
- Flexibilitás (képes legyen kalibrálni a piaci árakra)
- Gyors árazás/ gyors kalibrálás (analitikus / félanalitikus / MC árazás)
- Parsimony (egyszerűség), stabilitás, simaság, paraméterek közgazdasági jelentése...
- +Multi-asset árazás



The screenshot shows a web browser window with the URL `iki/Greeks_(finance)`. The page title is "Use of the Greeks" with an [edit] link. Below the title is a table with the following structure:

	Spot Price (S)	Volatility (σ)	Time to Expiry (τ)
Value (V)	Δ Delta	ν Vega	Θ Theta
Delta (Δ)	Γ Gamma	Vanna	Charm
Vega (ν)	Vanna	Vomma	Veta
Gamma (Γ)	Speed	Zomma	Color
Vomma		Ultima	Totto

Risk-Neutral modellezés

- $\text{Price}(\text{contract}) = E^Q(\text{discounted payout}(\mathbf{S}))$
- Q : Kockázat-mentes mérték / Risk-neutral measure / martingale measure

- **Arbitrázs-mentesség automatikusan teljesül!**
Eszközárzás első alaptétele (Fundamental Theory of Asset Pricing)
- Általában nem teljes a piac (és/vagy a modellünk),
nem egyértelmű ár / nem unikális a RN measure

Risk-Neutral valószínűség: Mit jelent?

- Mennyi a valószínűsége, hogy Magyarország kijut az EB-re?

NORVÉGIA VAGY MAGYARORSZÁG JUT TOVÁBB? LABDARÚGÁS, EB-SELEJTEZŐ 2015.11.15. 20:45	
KI JUT TOVÁBB?	ODDS
Norvégia	1,65
Magyarország	2,10

$$P_1 = 1 / 2.10 = 47.6\%$$

$$P_2 = 1 - 1/1.65 = 39.4\%$$

VÉTEL/ELADÁS

39.4% / 47.6%

MID

43.5%

Risk-Neutral valószínűség: Miért kockázat –mentes?

- A csapat nyer: 500 fogadás (1\$)
- B csapat nyer : 1000 fogadás (1\$)
- Risk neutrál odds:

A: 1:3 ($p = 1/3$)

B: 1:1.5 ($p = 2/3$)

- Bármilyen történik, a kifizetés 1500 \$. Nincs kockázat!

A bookmaker valójában 5%-al rosszabb oddsokat ad

A : 2.85

B : 1.45

Függetlenül a valódi valószínűségektől biztos haszon kockázat nélkül!

Risk-Neutral valószínűség

- Leicester City nyeri az angol bajnokságot 2016-ban
 - Elvis él
 - Kim Kardashian lesz az USA elnöke
 - EURHUF > 370 egy éven belül(2016. okt)
- 1/ 5000
 - 1/2000
 - 1/2000
 - 3% - 5%

FX Opció modellezés

Black-Scholes model (ár logaritmus normalis eloszlást követ)

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

FX Opció modellezés

Sztochasztikus volatilitás

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

$$\sigma_t = \dots dW_t^{(2)}$$

Heston model:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t$$
$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \omega \sqrt{V_t} dW_t.$$

FX Opció modellezés

Lokális volatilitás

$$dS_t = \mu S_t dt + f(S_t, t) S_t dW_t$$

FX Opció modellezés

Mix: Sztochasztikus-Lokális mix („blended”)

$$dS_t = \mu S_t dt + f(S_t) V_t S_t dW_t$$

$$V_t = \dots dW_t^{(2)}$$

FX Opció modellezés

Ugrások bevezetése

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + J_t dN_t$$

FX Opció modellezés

Más folyamatok, pl Levy-folyamatok

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$

FX Opció modellezés

Más megközelítések

- **Diszkrét** árfolyam modellek :nagyon gyors, jól kezelhető
Buehler, Ryskin, “Discrete Local Volatility for Large Time Steps”, WP November 2015
- Vanna-Volga, fedezet alapú modell
nem arbitrázsmentes (!!!)
- Weighted Monte-Carlo
- Interpoláció (SVI)
- ...

Weighted Monte Carlo

- Mérték csere, path-ek átsúlyozása
- Duális problémaként felírható, mindig megoldható
- Egy nem teljesen jól kalibrált model „finomhangolása”
- Érzékenységek MC futtatás nélkül számolhatóak
- Múltbeli minták az underlying folyamatból: Historic MC

Hogyan mérjük a volatilitást

drift levonása: átlag / risk neutral / zero

Business-time vs Calendar time

Matematikai módszerek, trükkök

- Monte-Carlo
- Weighted Monte-Carlo (measure –change, lineáris algebra,)
- Automatikus deriválás
- FFT (félanalitikus modellek: karakterisztikus függvény-> sűrűségfüggvény)
- Ökonometriai módszerek (pl realizált volatilitás mérésére), AR, GARCH, HMM, Kálmán-filter, stb
- Statisztika, valószínűségszámítás, pl. copula, kernel density estimation, resampling/Jackknife, hipotézisvizsgálatok, stb...

BS model

Tények és tévhitek

- BS egy rossz modell, mert...
- „Arbitrázs-mentes, amíg a piacon ez nem igaz”
- „Folytonos hedgelést feltételez”
- „Az ármozgások nem követnek log-normális eloszlást”

BS model:

- Quoting , nem Pricing
- BS modellben gondolkoznak, számolnak és kereskednek a piaci szereplők
- Delta hedge, és egyéb érzékenységekre használatos
- Arbitrázsmentes: a piacon lehet arbitrázs, a modellben nem!
Az arbitrázs megtalálásához is szükséges lehet egy arbitrázsmentes model
- Volatilitásban monoton!
o-inf tartomány lefedi az összes arbitrázsmentes árat

Kereskedés

- $C = BS(S, K, T, r, q, \sigma)$
- $F = S e^{(r-q)T}$

EUR-CHF X-RATE Currency OVDV Related Functions Menu Message

EURCHF ↑ 1.09505 +.00138 BGN 1.09500 / 1.09511 BGN
 At 15:33 Op 1.09330 Hi 1.09578 Lo 1.09268 Close 1.09368 Value 09/21/16

EURCHF Currency 90) Asset 91) Actions 92) Settings Volatility Surface

Bloomberg BGN Offshore New York 10:00 Weekdays As of 09/19/2016

1) Vol Table 2) 3D Surface 3) Term 4) Smile 5) Dep and Fwd Rates 6) Contribution Metrics 7) Correlation

Format ● RR/BF ● Put/Call Side ● Bid/Ask ● Mid/Spread

Exp	ATM			25D Call EUR		25D Put EUR		15D Call EUR		15D Put EUR		10D Call EUR		10D Put EUR		5D
	Mid	Spread		Mid	Spread	Mid	Spread	Mid	Spread	Mid	Spread	Mid	Spread	Mid	Spread	
1D	3.920	6.500		4.090	8.180	4.390	8.780	4.344	8.688	4.781	9.563	4.553	9.105	5.068	10.135	4.
1W	3.582	2.125		3.701	2.742	4.149	2.734	4.302	3.894	4.762	3.857	4.915	5.226	5.280	5.213	5.
2W	3.570	1.110		3.713	1.400	4.063	1.405	4.126	1.930	4.679	1.934	4.554	2.588	5.186	2.590	5.
3W	3.705	0.940		3.664	1.183	4.386	1.188	3.906	1.628	5.019	1.630	4.190	2.182	5.445	2.178	4.
1M	3.832	0.825		3.656	1.036	4.699	1.043	3.874	1.423	5.206	1.428	4.100	1.905	5.565	1.906	4.
2M	4.457	0.825		4.214	1.033	5.636	1.045	4.276	1.417	6.334	1.431	4.378	1.896	6.787	1.908	4.
3M	4.933	0.775		4.716	0.968	6.349	0.984	4.814	1.324	7.266	1.347	4.953	1.768	7.843	1.795	5.
4M	5.300	0.710		5.114	0.885	6.831	0.904	5.326	1.208	8.154	1.238	5.603	1.609	9.018	1.649	6.
6M	5.595	0.650		5.431	0.807	7.394	0.830	5.772	1.101	8.863	1.139	6.175	1.464	9.755	1.518	6.
9M	6.192	0.645		5.989	0.797	8.096	0.829	6.356	1.086	9.649	1.138	6.794	1.444	10.621	1.518	7.
1Y	6.597	0.625		6.362	0.768	8.647	0.805	6.724	1.045	10.386	1.108	7.165	1.388	11.470	1.478	7.
18M	7.378	0.615		7.064	0.749	9.566	0.799	7.419	1.018	11.756	1.103	7.858	1.351	13.163	1.475	8.
2Y	7.750	0.220		7.392	0.266	10.107	0.288	7.756	0.361	12.369	0.398	8.215	0.478	13.790	0.533	9.
3Y	9.330	0.300		8.615	0.355	11.305	0.397	8.949	0.481	12.976	0.549	9.345	0.637	14.185	0.735	9.
4Y	9.880	0.750		9.788	0.871	10.929	0.993	10.221	1.176	12.048	1.373	10.654	1.559	12.960	1.838	11.
5Y	10.380	0.700		10.278	0.799	11.405	0.932	10.731	1.077	12.497	1.290	11.177	1.427	13.392	1.727	11.
6Y	10.957	0.722		10.846	0.809	11.958	0.966	11.322	1.088	13.024	1.339	11.785	1.440	13.902	1.794	12.

98) Legend

99) Quick Pricer 97) Option Pricing (OVML) via USD

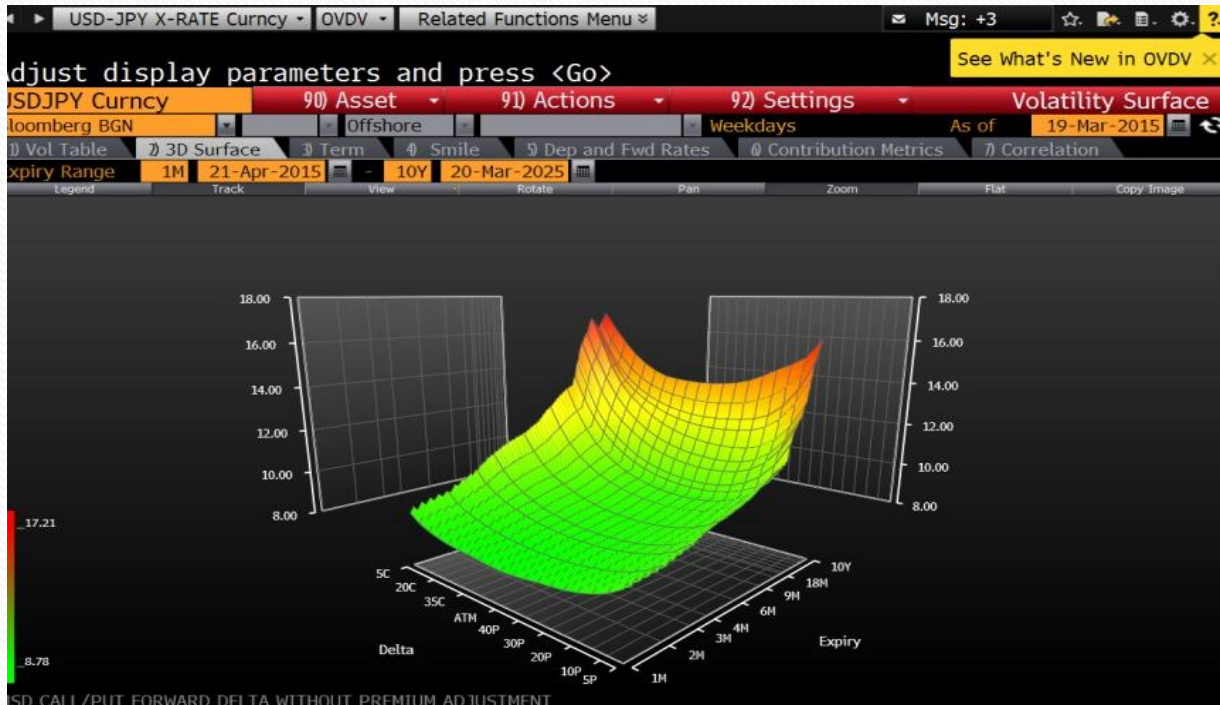
Mty	1M	Delta	50.01	C	Vol	3.832	Spread	0.825	Fwd	1.09457	EUR	Deposit	-0.302%
Exp	10/19/2016	Strike	1.09451	EUR Price	0.441%	0.094%	Spot	1.09505	CHF	-0.825%			

BS Volatilitás felület

- Black-Scholes képlet: opció ár az opció jellemzőinek, és σ paraméternek függvénye

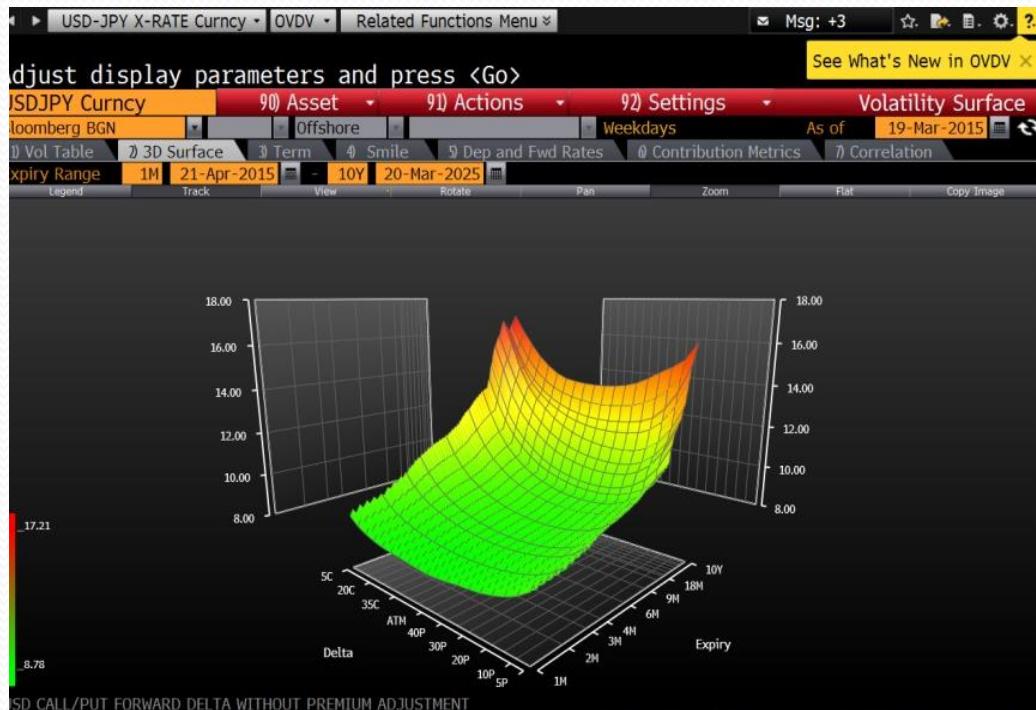
$$\text{Call} = C_{\text{BS}}(\text{Spot}, K, r, q, T, \sigma)$$

- BS Implied Volatility : a Black-Scholes formula invertálása
- Volatilitás felület: Implied Vol kiszámolva minden Strike és lejáratidő kombinációra
- Interpoláció, extrapoláció



BS Volatilitás felület

- Black-Scholes model: lapos felület, s_T ár logaritmus normális eloszlást követ,
- Volatilitás felület az ettől való eltérést jelzi
- Skew/Ferdeség: aszimmetrikus kockázat (egyik iránytól jobban tart a piac)
- Konvexitás: széles-farkú eloszlás
- Term structure (likviditás/kockázati prémium?)



Forrás: *Bloomberg*

Mit határoz meg a volatilitás felület?

A volatilitás felület egyértelműen meghatározza:

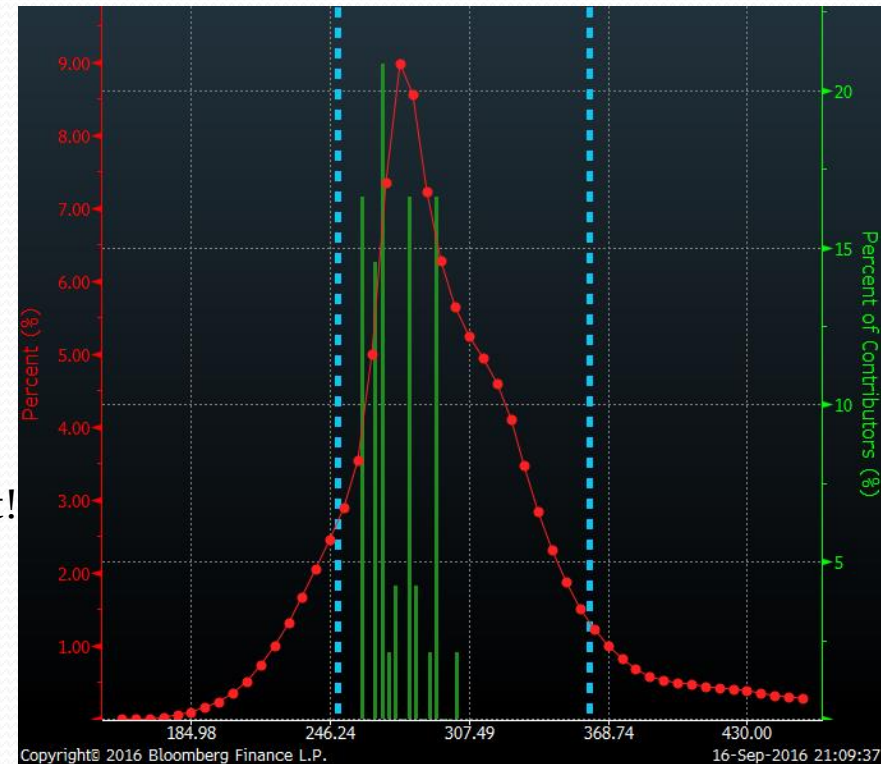
- Adott lejáratához tartozó ár eloszlását $f(S(T))$
- Vanilla árakat (call/put)
- Minden útvonalfüggetlen termék árát (a kifizetés csak a lejáratkori értéktől függ)

A volatilitás felület **nem** határozza meg

- Feltételes eloszlásokat: $f(S(T_1) | S(T_2))$
- Általában az útvonal-függő termékek árát
Pl: Barrier, One-Touch, stb...

Extrapoláció, interpoláció, erősen modelfüggő lehet!

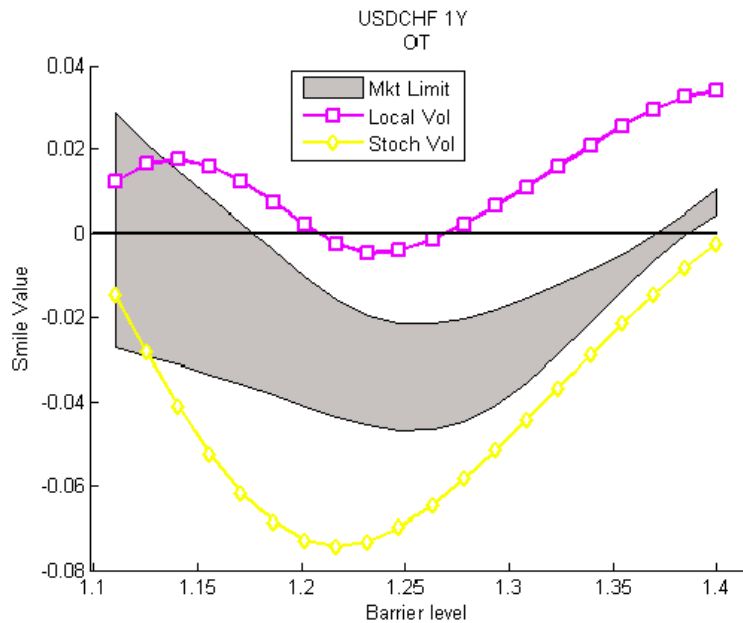
Speciális eset: **variance-swap/volatility-swap**



Mit határoz meg a volatilitás felület(3)

Which model is better ?

Test on the pricing of a “One-Touch”



•F. Bossens, G. Rayée, N. S. Skantzos and G. Deelstra, Vanna-Volga methods applied to FX derivatives : from theory to market practice



Volswap/ Varswap

Fogadás a realizált volatilitásra

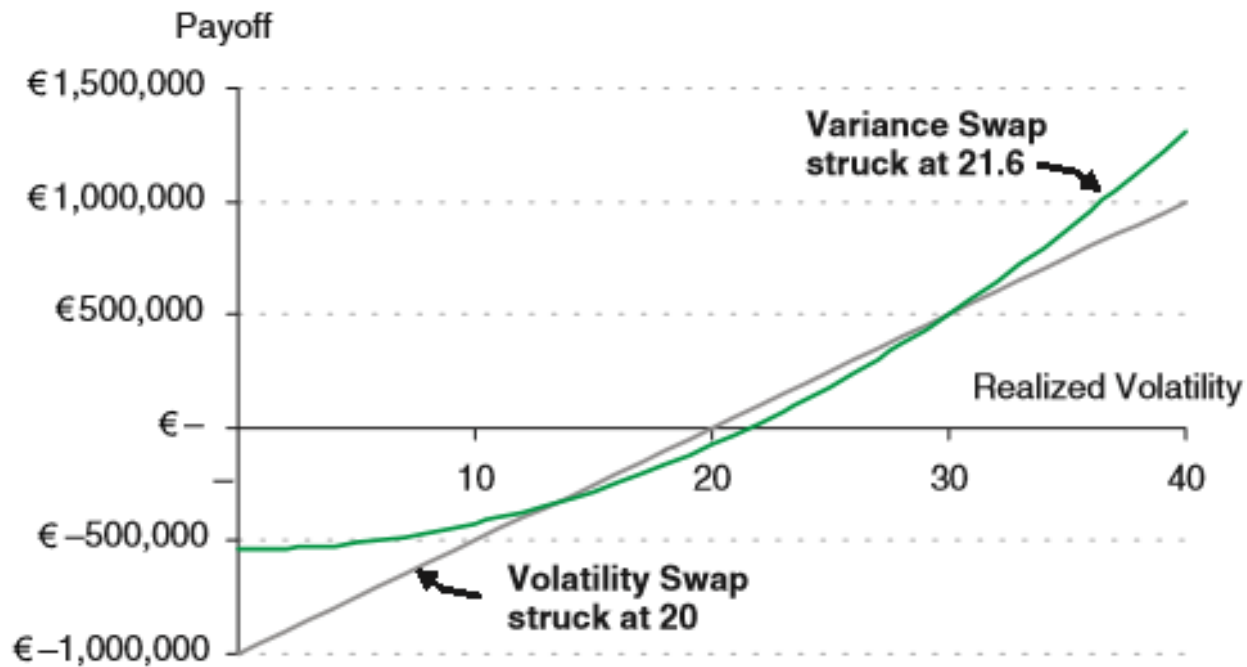
Vol-swap:

$$\sigma - \sigma_K$$

Var-swap:

$$(\sigma^2 - \sigma_K^2)/2\sigma_K$$

Exhibit 2—Variance swaps are convex in volatility



Mit határoz meg a volatilitás felület(2)

Speciális eset: variancia swap

Folytonos modellek között a variancia swap ára **modellfüggetlen**, a realizált variancia *replikálható*

(statikus opció portfólió + delta hedge)

$$\sigma_{\text{CurrencyPair}} = \sqrt{\frac{AF}{N} \times \sum_{i=1}^N (x_i)^2}$$

where

$\sigma_{\text{CurrencyPair}}$ = the Actual Currency Pair Volatility

$N + 1$ = the number of Currency Pair Data Points

over the Observation Period, which for the purposes of
of this transaction shall = 258

and

$$x_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

where $\ln()$ is the natural logarithm and S_i ($i = 0$ to N)

are the Currency Pair Spot Fixings

and

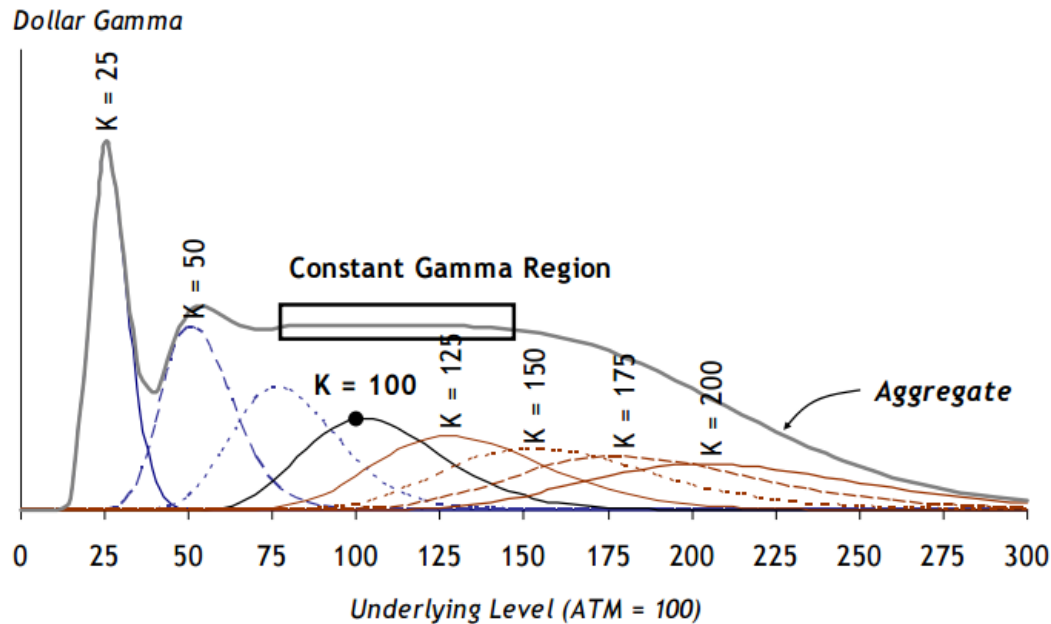
AF = Annualisation Factor

Initial Data Point = To Be Determined on the Effective Date

Variance swap

Carr, Madan (1998). ["Towards a Theory of Volatility Trading"](#) (PDF). In "Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives," R. Jarrow (ed.) RISK Publications, London.

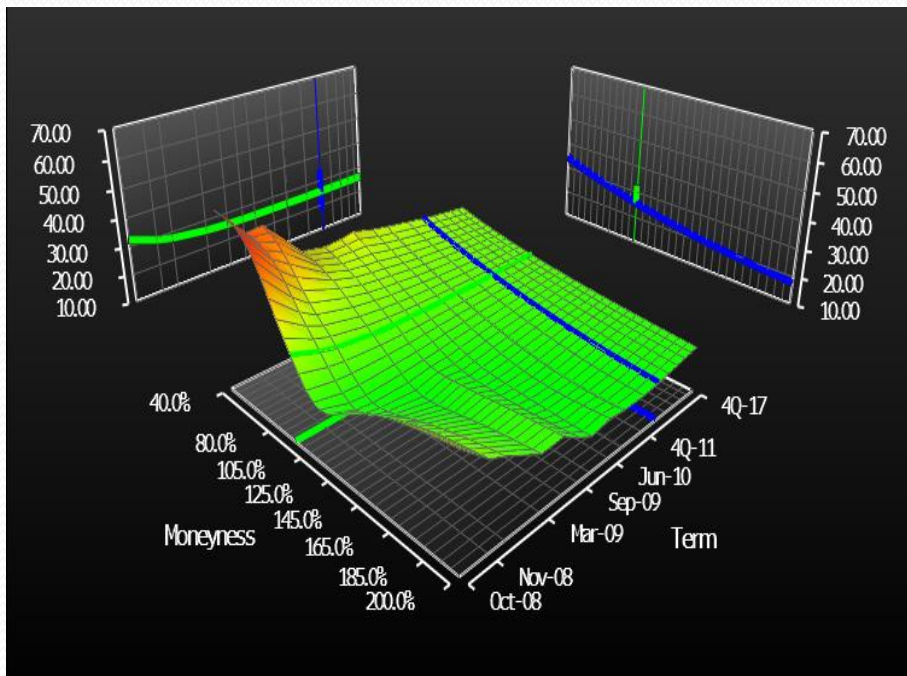
Exhibit 2.2.3 – Dollar gamma of options weighted inversely proportional to the square of strike



Just What You Need To Know About Variance Swaps, Sebastien Bossu JP Morgan

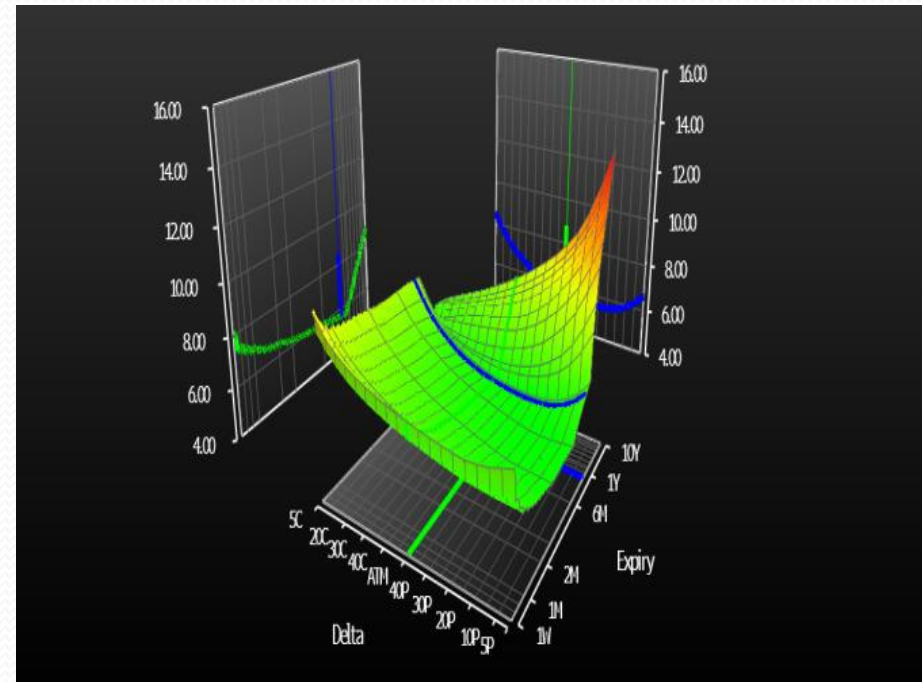
Extrém volatilitás felületek

SPX index 2008-Sep-20



Forrás: *Bloomberg*

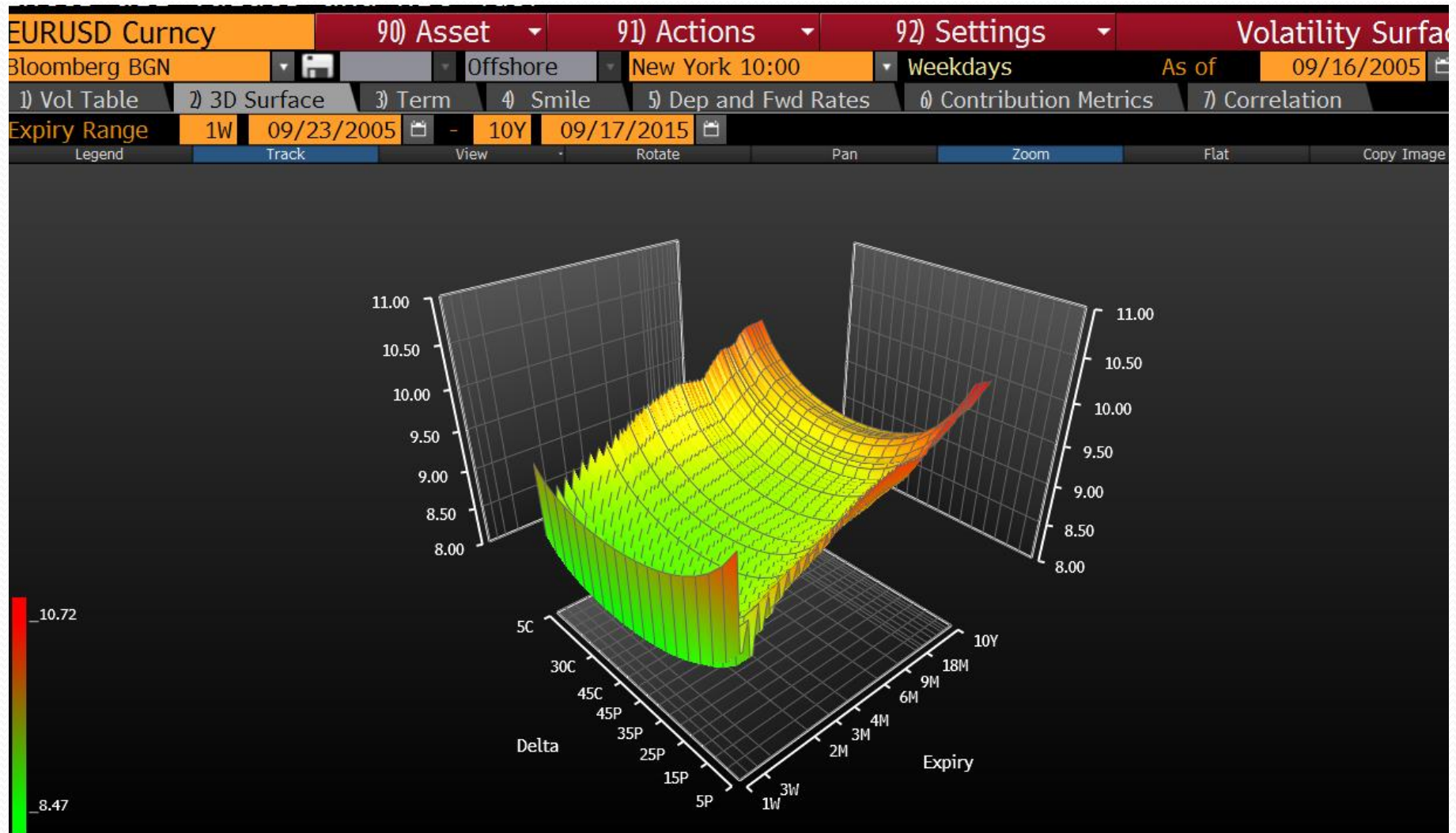
EURCHF (2013)



Forrás: *Bloomberg*

Volatilitás felületek , közgazdasági jelentésük (1)

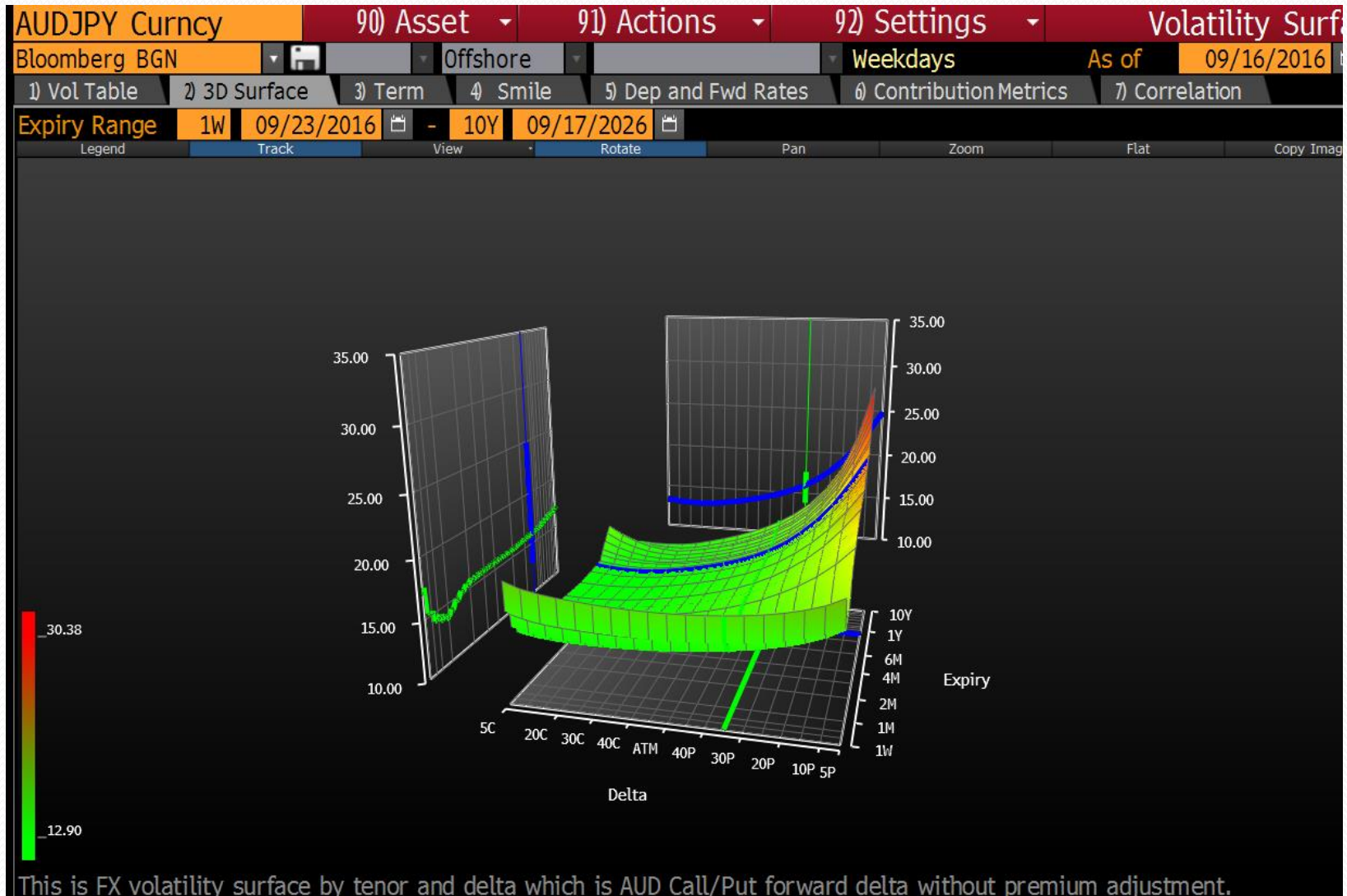
Lapos felület



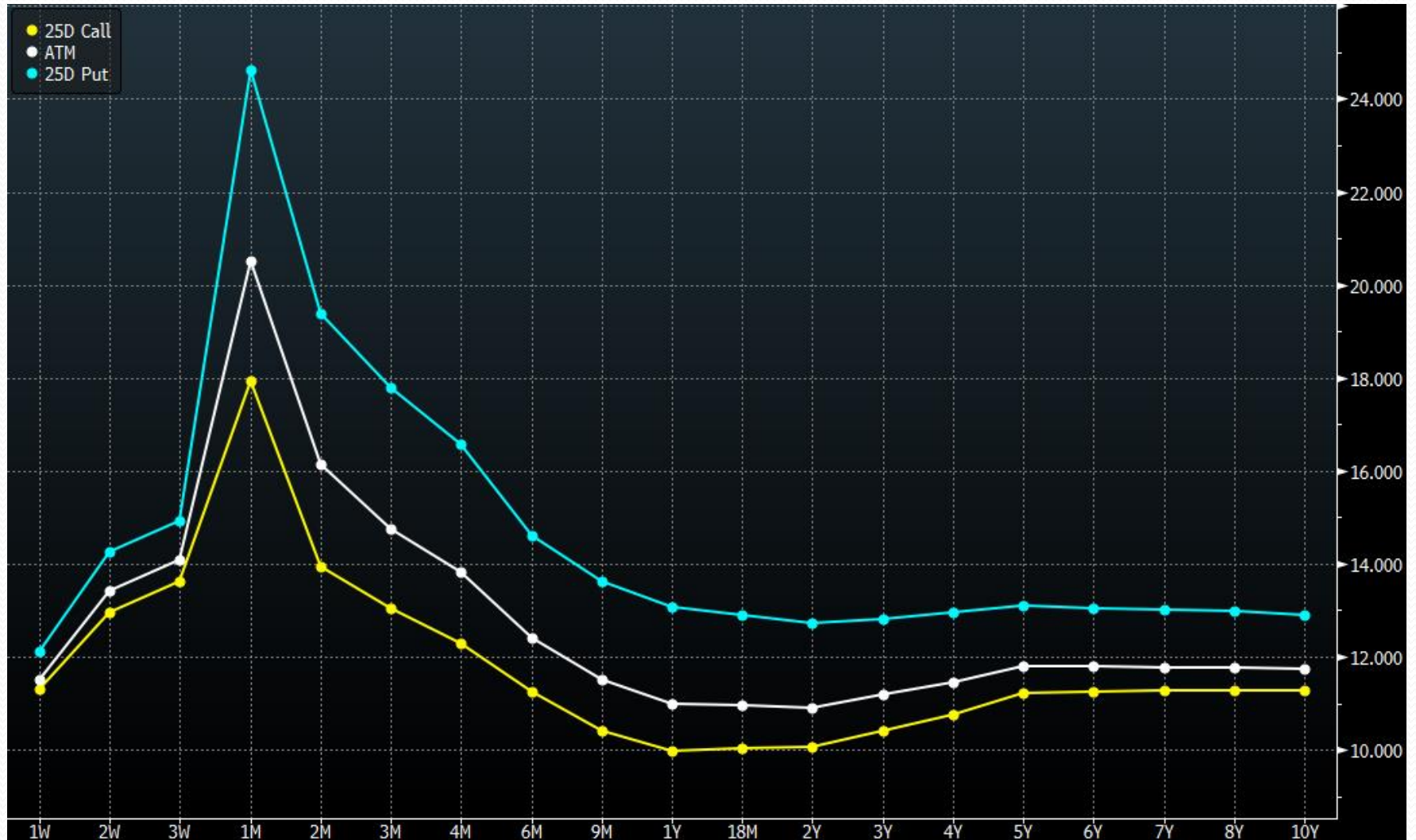
This is FX volatility surface by tenor and delta which is EUR Call/Put forward delta without premium adjustment.

Volatilitás felületek , közgazdasági jelentésük (2)

Skew, Risk-reversal



GBP/USD volatilitás term structure



Forrás: Bloomberg

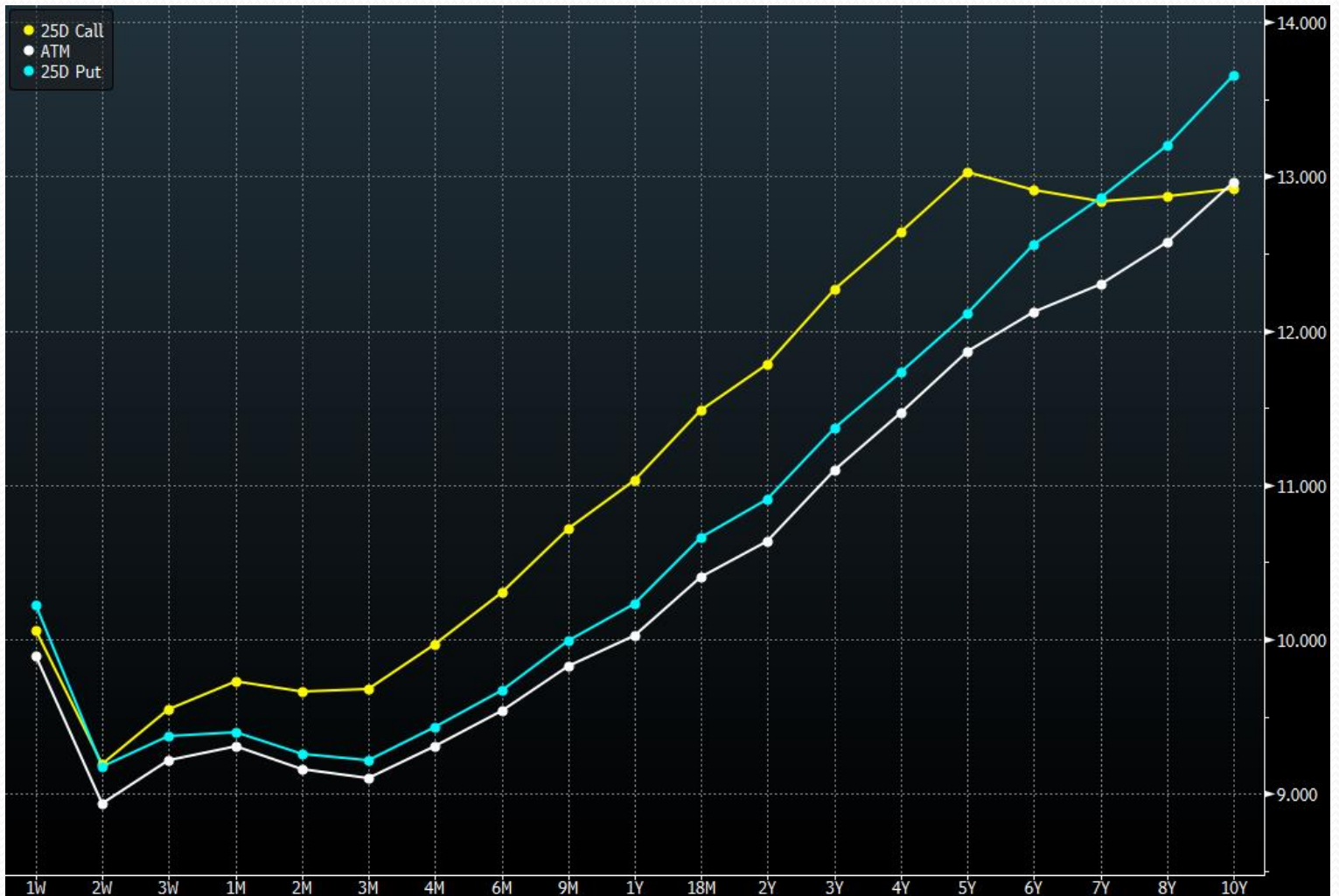
GBP/USD volatilitás Brexit idején



GBP/USD volatilitás Brexit idején



USD/JPY volatilitás term structure



Forrás: Bloomberg

Equity vs FX

Equity	FX
Sok termék (500 ... 7000) Nincs kereszt (AAPL/GOOG) tőzsde Block trade: 100-1000 db (10-100k USD)	Kevés alaptermék G10 (20-50) keresztek OTC Lot: 100000 , nagy trade: 1-10 millió USD
Numeraire USD (aszimmetria)	Numeraire tetszőleges deviza
1 interest rate (hatása nem jelentős)+ dividend	Stochasztikus interest rate (2 db)
Negativ skew, konvexitás lecseng hosszú lejáraton	Skew: szimmetria, nagy konvexitás/skew hosszú lejáratokon is
Strike in USD Amerikai opciók Vanilla, barrier, esetleg varswap.	Strike delta (ATM, 25C,25P) Európai opciók „tetszőleges funkcionál” , multi-asset
Lejárat: fix időpontok	Lejárat: fix időtartamok
	Szimmetria EUR/USD USD/EUR Háromszögek, Kvantó effektus, mérékcsere\

Kereskedés

- Félreárazások, anomáliák felismerése
- Historikus és beárazott (implied) mennyiségek közötti különbség
PL. realizált volatilitás vs implied volatilitás
- Kockázati prémium (túlreagáló piac)
- Statisztikai arbitrázs (relatív eltérésekre való fogadás)

Kockázati prémiumok

- Variance Risk Premium:
- Skew Premium
- Convexity premium:
- Term structure

- Tail risk premium

Kockázati prémiumok

- Variance Risk Premium: varswap eladás
- Skew Premium VKI put, quanto varswap, conditional varswap
- Convexity premium: túl magas vol-of-vol, straddle for variance
- Term structure forward varswap (roll down the curve)

- Tail risk premium

Esettanulmány: EUR/CHF

- 2011 euro-válság: a kockázat kerülés miatt a tőke CHF-ba „menekült”
- EURCHF paritásig zuhan (1.50-ről)
- 2011. Svájci jegybank (SNB) bejelenti hogy 1.20 küszöböt vezet be („peg”)
- 2015. január 15: az euró gyengülése miatt az SNB nem tartja tovább, az árfolyam 0.80-ig zuhan, majd 1.00-1.05 körül stabilizálódik

Milyen volatilitás felületeket eredményezett mindez?

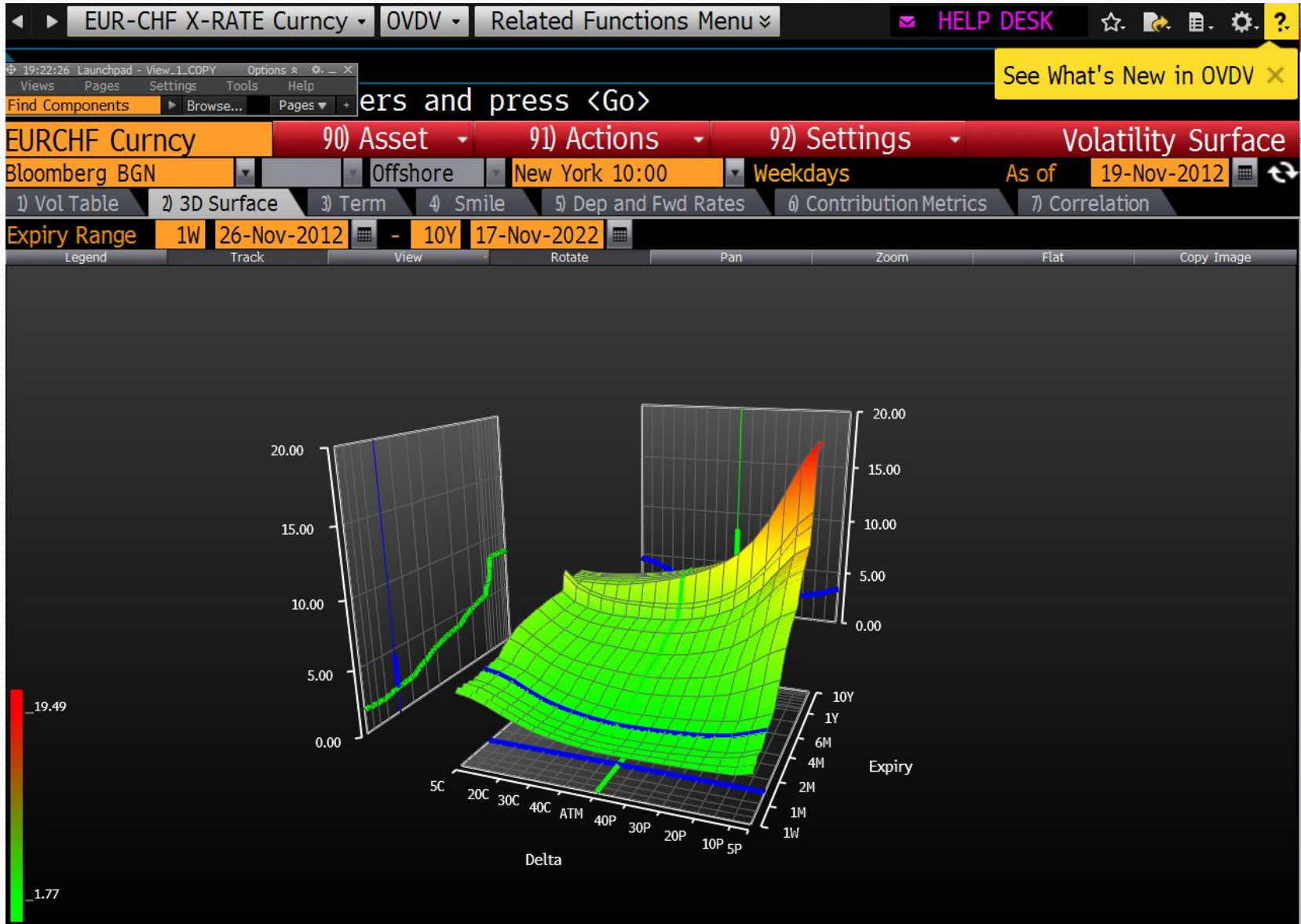
Mit árazott a piac? Mennyire volt „előreláthatatlan”?

2014. november

„The franc probably would strengthen if the Swiss vote Yes, in that the SNB’s ability to influence the currency’s value would diminish”

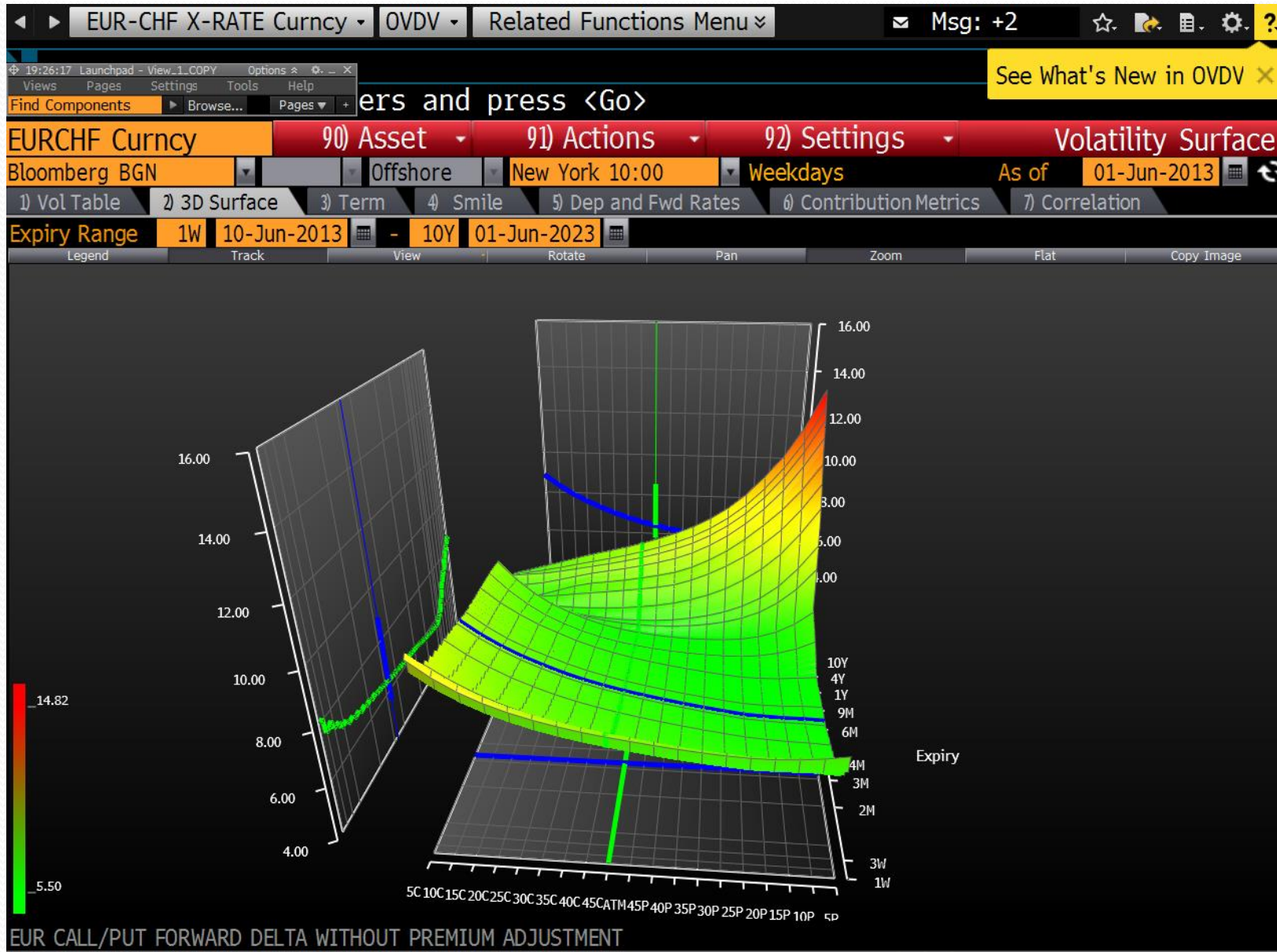
Economist

Esettanulmány: EURCHF

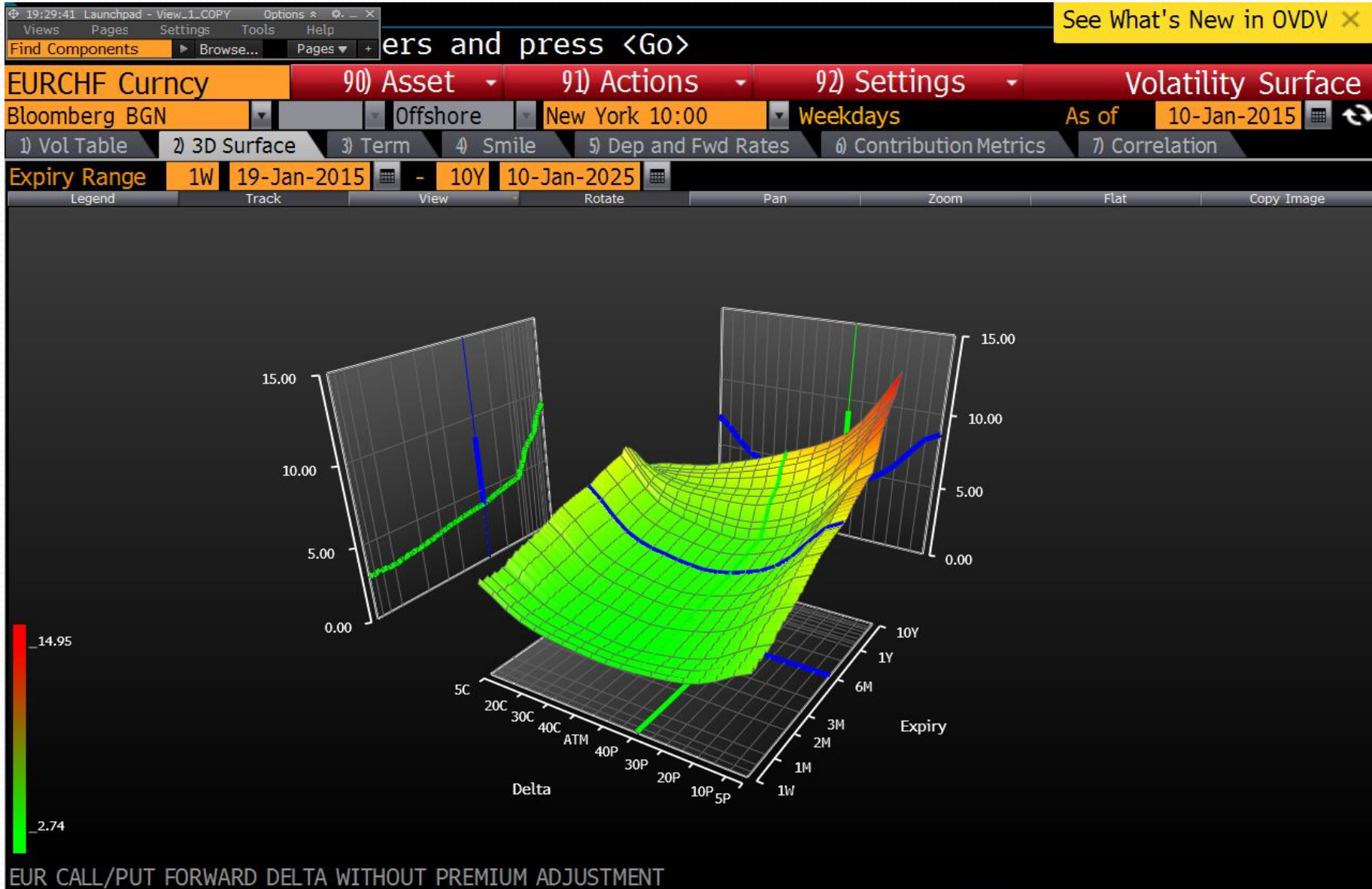


EUR CALL/PUT FORWARD DELTA WITHOUT PREMIUM ADJUSTMENT

Esettanulmány: EURCHF



Esettanulmány: EURCHF

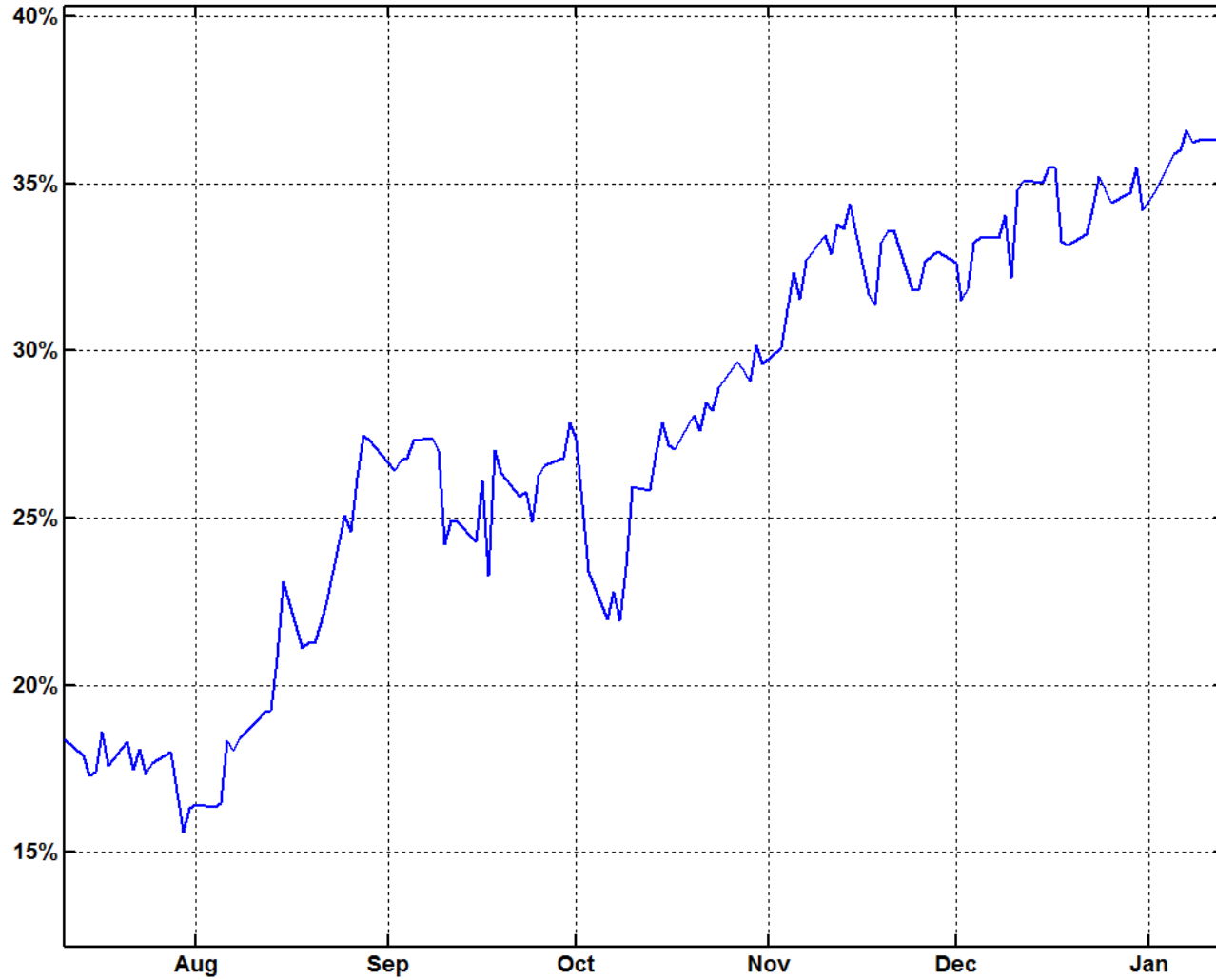


Esettanulmány: EURCHF



Esettanulmány: EURCHF

EURCHF 1.19 Digital 3-month price



Esettanulmány: EURCHF



2014. november

„The franc probably would strengthen if the Swiss vote Yes, in that the SNB’s ability to influence the currency’s value would diminish”