LP érzékenységvizsgálat a szimplex módszer segítségével

A feladat és a kezdeti szimplex tábla

A feladat:

$$\begin{array}{rcl} A\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \rightarrow & \max \end{array}$$

Kezdeti szimplex tábla:

BV	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_1^T$	$\mathbf{x}_2^T$	$\mathbf{u}_1^T$	$\mathbf{u}_2^T$
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{b}_1$	A_{11}	A_{12}	I	0
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{b}_2$	A_{21}	A_{22}	0	I
$z-c$	0	$-\mathbf{c}_1^T$	$-\mathbf{c}_2^T$	$\mathbf{0}^T$	$\mathbf{0}^T$

Ahol:

$\mathbf{x}_1$: az optimális bázisban szereplő változók

$\mathbf{x}_2$: az optimális bázison kívüli változók

$\mathbf{u}_1$: az optimális bázison kívüli segédváltozók

$\mathbf{u}_2$: az optimális bázisban szereplő segédváltozók

Az optimális szimplex tábla

BV	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_1^T$	$\boldsymbol{x}_2^T$	$\boldsymbol{u}_1^T$	$\boldsymbol{u}_2^T$
$\boldsymbol{u}_1$	$\boldsymbol{b}_1$	A_{11}	A_{12}	I	0
$\boldsymbol{u}_2$	$\boldsymbol{b}_2$	A_{21}	A_{22}	0	I
$z-c$	0	$-\boldsymbol{c}_1^T$	$-\boldsymbol{c}_2^T$	$\boldsymbol{0}^T$	$\boldsymbol{0}^T$

Az optimális szimplex tábla:

	BV	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_1^T$	$\boldsymbol{x}_2^T$	$\boldsymbol{u}_1^T$	$\boldsymbol{u}_2^T$
$0 \le$	$\boldsymbol{x}_1$	$A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1$	I	$A_{11}^{-1}A_{12}$	A_{11}^{-1}	0
	$\boldsymbol{u}_2$	$\boldsymbol{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1$	0	$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$	$-A_{21}A_{11}^{-1}$	I
	$z-c$	$\boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1$	$\boldsymbol{0}^T$	$\boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}A_{12} - \boldsymbol{c}_2^T$	$\boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}$	$\boldsymbol{0}^T$

$\uparrow$ Primál megengedett

$\uparrow$ Célfüggvény érték

$\geq \boldsymbol{0}^T$

Duál megengedett (optimalitási feltétel)

Célfüggvény együtthatók

Az optimális szimplex tábla:

BV	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_1^T$	$\mathbf{x}_2^T$	$\mathbf{u}_1^T$	$\mathbf{u}_2^T$
$\mathbf{x}_1$	$A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$	I	$A_{11}^{-1}A_{12}$	A_{11}^{-1}	0
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$	0	$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$	$-A_{21}A_{11}^{-1}$	I
$z - c$	$\mathbf{c}_1^T A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$	$\mathbf{0}^T$	$\mathbf{c}_1^T A_{11}^{-1}A_{12} - \mathbf{c}_2^T$	$\mathbf{c}_1^T A_{11}^{-1}$	$\mathbf{0}^T$

1. Ha egy $\mathbf{c}_1$-beli komponenst mozgatunk, akkor a feltétel (nehezebb):

$$(\mathbf{c}_1 + \Delta\mathbf{c}_1)^T A_{11}^{-1}A_{12} - \mathbf{c}_2^T \geq \mathbf{0}^T$$

   és

$$(\mathbf{c}_1 + \Delta\mathbf{c}_1)^T A_{11}^{-1} \geq \mathbf{0}^T$$

2. Ha egy $\mathbf{c}_2$-beli komponenst mozgatunk, akkor a feltétel (könyebb):

$$\mathbf{c}_1^T A_{11}^{-1}A_{12} - (\mathbf{c}_2 + \Delta\mathbf{c}_2)^T \geq \mathbf{0}^T$$

Jobboldal értékei

Az optimális szimplex tábla:

BV	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_1^T$	$\boldsymbol{x}_2^T$	$\boldsymbol{u}_1^T$	$\boldsymbol{u}_2^T$
$\boldsymbol{x}_1$	$A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1$	I	$A_{11}^{-1}A_{12}$	A_{11}^{-1}	0
$\boldsymbol{u}_2$	$\boldsymbol{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1$	0	$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$	$-A_{21}A_{11}^{-1}$	I
$z - c$	$\boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1$	$\boldsymbol{0}^T$	$\boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}A_{12} - \boldsymbol{c}_2^T$	$\boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}$	$\boldsymbol{0}^T$

1. Ha egy $\boldsymbol{b}_1$-beli komponenst mozgatunk, akkor a feltétel (nehezebb):
$$A_{11}^{-1}(\boldsymbol{b}_1 + \Delta\boldsymbol{b}_1) \geq \boldsymbol{0}$$
és
$$\boldsymbol{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}(\boldsymbol{b}_1 + \Delta\boldsymbol{b}_1) \geq \boldsymbol{0}$$
2. Ha egy $\boldsymbol{b}_2$-beli komponenst mozgatunk, akkor a feltétel (könyebb):
$$(\boldsymbol{b}_2 + \Delta\boldsymbol{b}_2) - A_{21}A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1 \geq \boldsymbol{0}$$

Árnyékár

Az optimális szimplex tábla:

BV	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_1^T$	$\boldsymbol{x}_2^T$	$\boldsymbol{u}_1^T$	$\boldsymbol{u}_2^T$
$\boldsymbol{x}_1$	$A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1$	I	$A_{11}^{-1}A_{12}$	A_{11}^{-1}	0
$\boldsymbol{u}_2$	$\boldsymbol{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1$	0	$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$	$-A_{21}A_{11}^{-1}$	I
$z - c$	$\boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1$	$\boldsymbol{0}^T$	$\boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}A_{12} - \boldsymbol{c}_2^T$	$\boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}$	$\boldsymbol{0}^T$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Árnyékárak:}\boldsymbol{y}_{opt}^T}$$

Valóban:

$$OFV(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}(\boldsymbol{b}_1+\Delta\boldsymbol{b}_1)$$

$$= \boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{c}_1^T A_{11}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}_1 = OFV(\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{y}_{opt}^T\Delta\boldsymbol{b}$$

Az árnyékárak nem változnak, míg az optimális bázis nem változik.
Felmerülő probléma pl. degenerált optimális megoldás, többféle opt. bázis, többféle árnyékár. Ld. Koltai Tamás tavalyi előadása.

A példa érzékenységvizsgálata szimplex módszerrel

$$\begin{array}{cccccc}
\text{R1} & x_1 & +x_2 & \leq & 1200 \\
\text{R2} & x_1 & +2x_2 & \leq & 1600 \\
\text{MIN1} & x_1 & & \geq & 200 \\
\text{MAX1} & x_1 & & \leq & 1000 \\
\text{MIN2} & & x_2 & \geq & 100 \\
\max & (180x_1 & +290x_2) & &
\end{array}$$

Legyen $x_1' = x_1 - 200$ és $x_2' = x_2 - 100$. Ekkor a fentivel ekvivalens feladat:

$$\begin{array}{cccccc}
\text{R1} & x_1' & +x_2' & \leq & 900 \\
\text{R2} & x_1' & +2x_2' & \leq & 1200 \\
\text{MAX1} & x_1' & & \leq & 800 \\
 & x_1', & x_2' & \geq & 0 \\
\max & (180x_1' & +290x_2') & &
\end{array}$$

Megoldás szimplex módszerrel

BV	$\mathbf{x}_B$	x_1'	x_2'	u_1	u_2	u_3
u_1	900	1	1	1	0	0
u_2	1200	1	2	0	1	0
u_3	800	$\underline{\mathbf{1}}$	0	0	0	1
$z-c$	0	-180	-290	0	0	0

BV	$\mathbf{x}_B$	x_1'	x_2'	u_1	u_2	u_3
u_1	100	0	$\underline{\mathbf{1}}$	1	0	-1
u_2	400	0	2	0	1	-1
x_1	800	1	0	0	0	1
$z-c$	144000	0	-110	0	0	180

BV	$\mathbf{x}_B$	x_1'	x_2'	u_1	u_2	u_3
x_2	100	0	1	1	0	-1
u_2	200	0	0	-2	1	1
x_1	800	1	0	0	0	1
$z-c$	155000	0	0	110	0	70