

Sztocasztikus folyamatok alapfogalmak

Nándori Péter

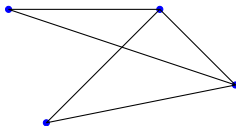
Matematikai Modellalkotás Szeminárium
2011. szeptember 13.

- 1 Folytonos idejű Markov láncok
- 2 Béta-eloszlás
- 3 Matringálok
- 4 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

- 1 Folytonos idejű Markov láncok
- 2 Béta-eloszlás
- 3 Matringálok
- 4 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

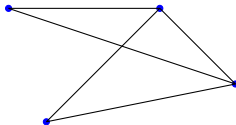
Folytonos idejű Markov láncok I

Adott egy $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ gráf



Folytonos idejű Markov láncok I

Adott egy $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ gráf



Egy $X_t; t \in [0, \infty)$ folyamat folytonos idejű Markov lánc, ha $\forall t$ -re $X_t \in \mathcal{V}$, és egy $\alpha(x, y)$ rátafüggvénnyel

$$P(X_{t+dt} = x | X_t = x) = 1 - \alpha(x)dt + o(dt)$$

$$P(X_{t+dt} = y | X_t = x) = \alpha(x, y)dt + o(dt)$$

$$\alpha(x) = \sum_{y \neq x} \alpha(x, y).$$

Folytonos idejű Markov láncok II

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

Folytonos idejű Markov láncok II

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

Folytonos idejű Markov láncok II

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

azaz

$$\dot{\underline{p}}(t) = \underline{p}(t)A, \tag{1}$$

Folytonos idejű Markov láncok II

Az előzőekből, ha

$$p_x(t) = P(X_t = x), \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{|\mathcal{V}|}(t)),$$

kapjuk

$$\dot{p}_x(t) = -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t),$$

azaz

$$\dot{\underline{p}}(t) = \underline{p}(t)A, \quad (1)$$

ahol $A_{x,y} = \alpha(x, y)$, ha $x \neq y$, és $-\alpha(x)$, ha $x = y$.

Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Mátrixexponenciális függvény

Az (1) egyenlet megoldása:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

De mit is jelent egy mátrix exponenciális függvénye?

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Például legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mátrixexponenciális függvény - példa

Ekkor $A = QDQ^{-1}$, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Mátrixexponenciális függvény - példa

Ekkor $A = QDQ^{-1}$, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q(tD)^n Q^{-1}}{n!} \\ &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 1 Folytonos idejű Markov láncok
- 2 Béta-eloszlás
- 3 Matringálok
- 4 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:

béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



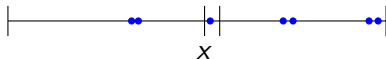
béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



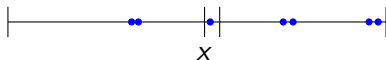
béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



béta-eloszlás I

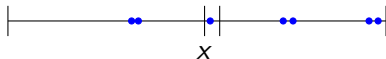
ξ legyen 7 db $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



$$P(\xi \in [x, x + dx]) = \frac{7!}{2!4!} x^2 dx (1 - x - dx)^4 + o(dx),$$

béta-eloszlás I

ξ legyen 7 db $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású független véletlen szám közül a 5. legnagyobb:



$$P(\xi \in [x, x + dx]) = \frac{7!}{2!4!} x^2 dx (1 - x - dx)^4 + o(dx),$$

így ξ sűrűsége az $x \in [0, 1]$ helyen:

$$f(x) = \frac{7!}{2!4!} x^2 (1 - x)^4$$

béta-eloszlás II

Általában $\beta(a, b)$ eloszlás sűrűsége a $[0, 1]$ intervallumon:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}.$$

béta-eloszlás II

Általában $\beta(a, b)$ eloszlás sűrűsége a $[0, 1]$ intervallumon:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}.$$

Itt a, b pozitív, nem feltétlenül egész számok, és

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$$

- 1 Folytonos idejű Markov láncok
- 2 Béta-eloszlás
- 3 Matringálok**
- 4 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

Matringálok - szemléletes definíció

Egy M_1, M_2, \dots valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke " M_1, \dots, M_{k-1} ismeretében" épp M_{k-1} minden k -ra.

Matringálok - szemléletes definíció

Egy M_1, M_2, \dots valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke " M_1, \dots, M_{k-1} ismeretében" épp M_{k-1} minden k -ra.

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

Matringálok - szemléletes definíció

Egy M_1, M_2, \dots valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke " M_1, \dots, M_{k-1} ismeretében" épp M_{k-1} minden k -ra.

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A nyereségem: $M_0 = 0$,

ha $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$, akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Matringálok - szemléletes definíció

Egy M_1, M_2, \dots valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke " M_1, \dots, M_{k-1} ismeretében" épp M_{k-1} minden k -ra.

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A nyereségem: $M_0 = 0$,

ha $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$, akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Ha pedig $M_{k-1} = 1$, akkor $M_k = 1$.

Matringálok - szemléletes definíció

Egy M_1, M_2, \dots valószínűségi változó sorozat **martingál**, ha $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ és M_k feltételes várható értéke " M_1, \dots, M_{k-1} ismeretében" épp M_{k-1} minden k -ra.

1. Példa: Érmedobás játékban addig duplázom a tétet, míg először nem nyerek, utána kiszállok.

A nyereségem: $M_0 = 0$,

ha $M_{k-1} = -(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-2}) = -2^{k-1} + 1$, akkor

$$P(M_k = 1) = P(M_k = -2^k + 1) = 1/2.$$

Ha pedig $M_{k-1} = 1$, akkor $M_k = 1$.

Tehát $\mathbb{E}(M_k | M_1, \dots, M_{k-1}) = M_k$.

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van.

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt. Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**

Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**



Pólya féle urnamodell

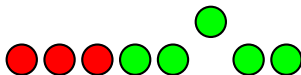
2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**



Pólya féle urnamodell

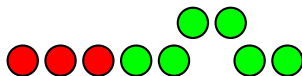
2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy másik, **ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**



Pólya féle urnamodell

2. Példa: Egy urnában kezdetben 3 piros és 5 zöld golyó van. Egy lépésben kiveszek egy golyót, majd azt visszateszem egy **másik, ugyanolyan színű** golyóval együtt.

Be lehet látni, hogy a piros golyók aránya martingál.

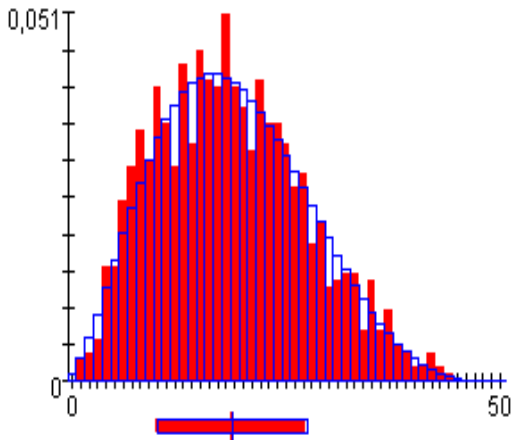
Kérdés: Sok lépés után vajon konvergens-e a piros golyók aránya?

Ha igen, mihez tart? Függ a limesz a véletlentől?

A választ (egyelőre) nem tudjuk, ezért **szimulálunk!**

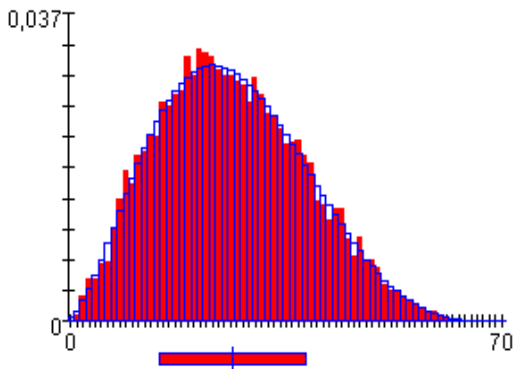


Monte Carlo szimuláció I



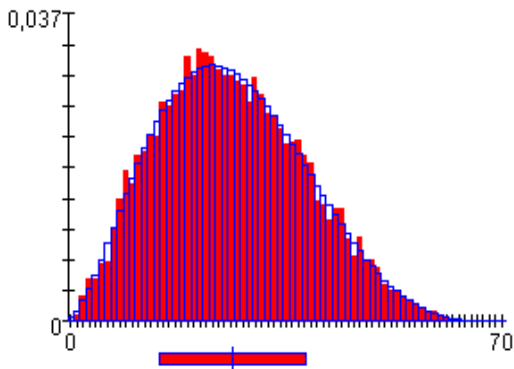
ábra: 1000 szimuláció, 50 lépés

Monte Carlo szimuláció II



ábra: 10000 szimuláció, 70 lépés

Monte Carlo szimuláció II

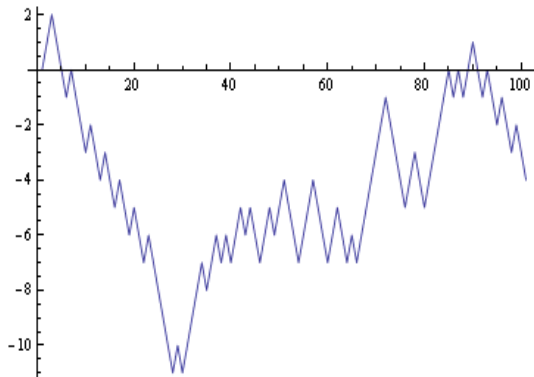


ábra: 10000 szimuláció, 70 lépés

A tényleges limesz a $\beta(3,5)$ eloszlás!

Brown mozgás

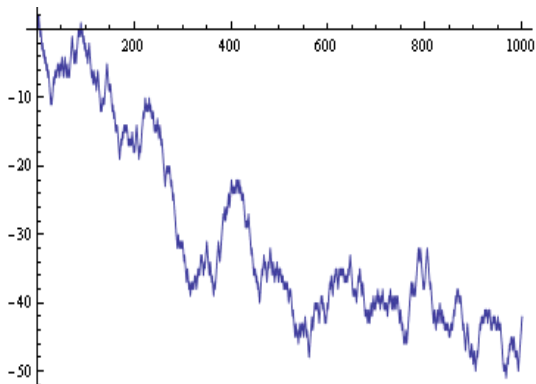
3. Példa: Brown mozgás



ábra: Véletlen bolyongás, 100 lépés

Brown mozgás

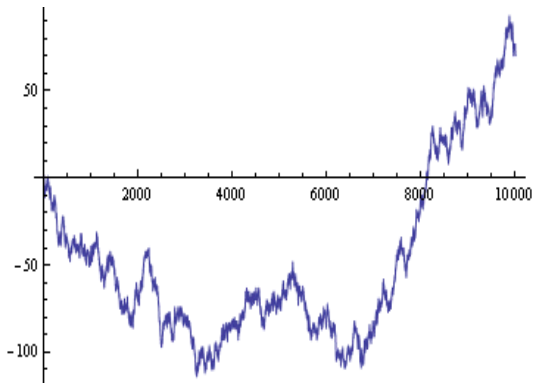
3. Példa: Brown mozgás



ábra: Véletlen bolyongás, 1000 lépés

Brown mozgás

3. Példa: Brown mozgás



ábra: Véletlen bolyongás, 10000 lépés

Brown mozgás II

A limeszben kapott folyamat a Brown mozgás.

Brown mozgás II

A limeszben kapott folyamat a Brown mozgás.

Definíció: X_t Brown mozgás, ha

- $X_0 = 0$
- minden $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ esetén $X_{t_1} - X_{s_1}, \dots, X_{t_n} - X_{s_n}$ függetlenek
- minden $s \leq t$ esetén $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = t - s)$
- $t \rightarrow X_t$ majdnem biztosan folytonos.

- 1 Folytonos idejű Markov láncok
- 2 Béta-eloszlás
- 3 Matringálok
- 4 Pontfolyamatok, sorbanállási modellek

Poisson folyamat

Legyenek T_1, T_2, \dots iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.

Poisson folyamat

Legyenek T_1, T_2, \dots iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



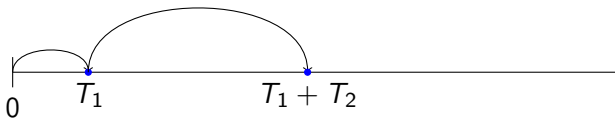
Poisson folyamat

Legyenek T_1, T_2, \dots iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



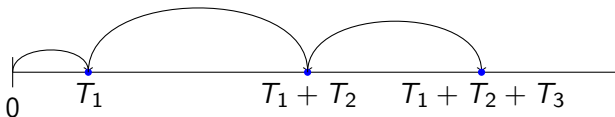
Poisson folyamat

Legyenek T_1, T_2, \dots iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



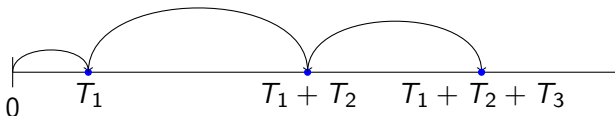
Poisson folyamat

Legyenek T_1, T_2, \dots iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



Poisson folyamat

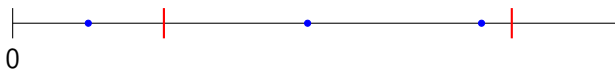
Legyenek T_1, T_2, \dots iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



A félegyenesen kapott pontok: **homogén 1 dimenziós Poisson folyamat**

Poisson folyamat

Legyenek T_1, T_2, \dots iid $Exp(\lambda)$ valószínűségi változók.



A félegyenesen kapott pontok: **homogén 1 dimenziós Poisson folyamat**

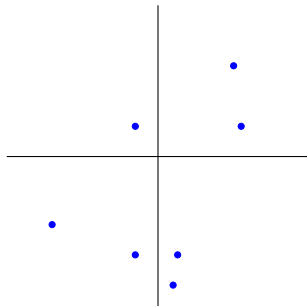
Egy I intervallumba eső pontok száma: $POI(\lambda|I|)$ eloszlású.

Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:
Poisson folyamat: Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.

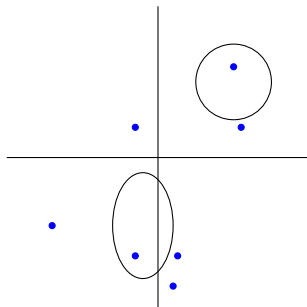
Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:
Poisson folyamat: Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.



Többdimenziós Poisson folyamat

Az előző észrevétel alapján több dimenzióban is definiálhatjuk:
Poisson folyamat: Olyan véletlen térbeli pontok, hogy minden halmazba Poisson eloszlású pont esik, és diszjunkt halmazokra ezek függetlenek.



M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.

M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.

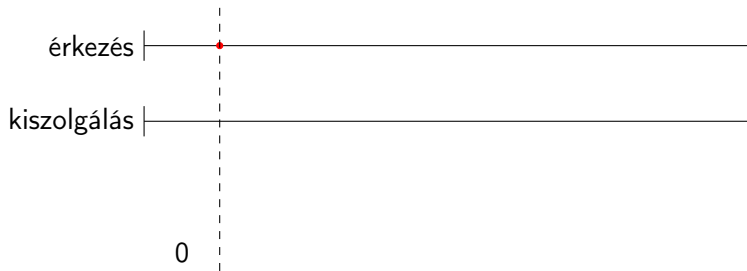
érkezés | _____

kiszolgálás | _____

M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

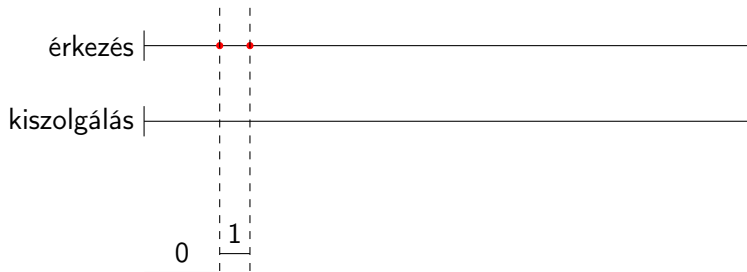
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

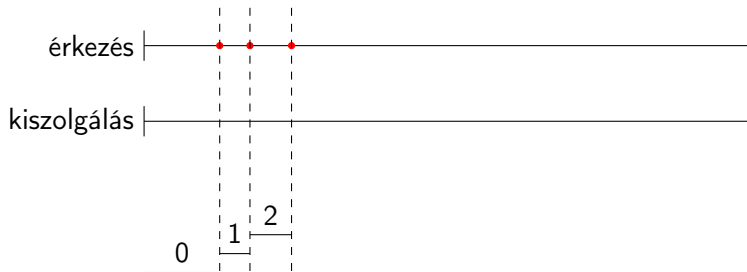
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

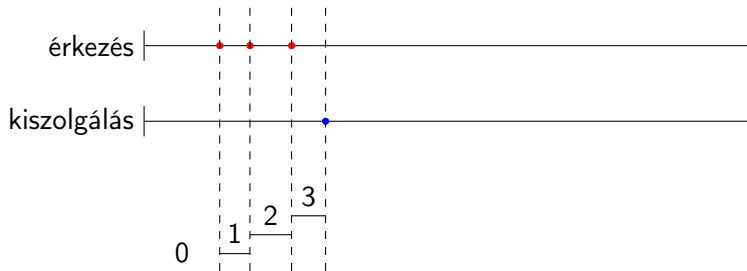
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

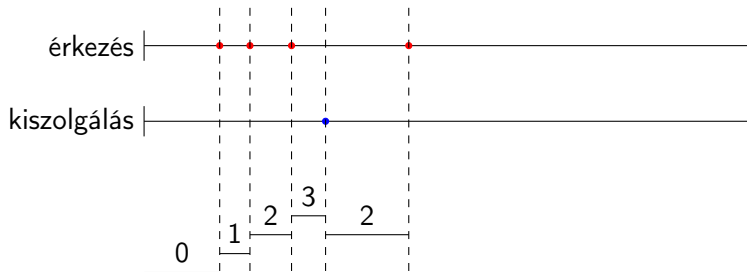
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

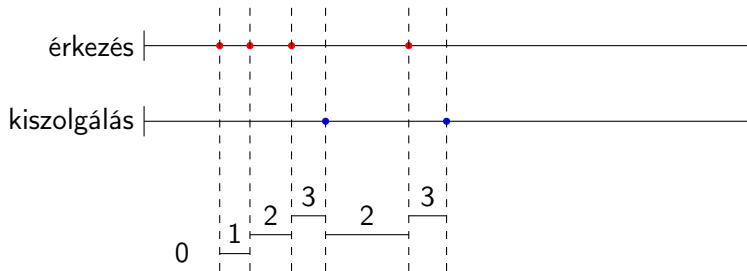
Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell I

Egy üzletbe a vásárlók λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek.

Az egyetlen eladó μ paraméterű exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt.



M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha $\lambda > \mu$, akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.

M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha $\lambda > \mu$, akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.

Ha $\lambda < \mu$, akkor a sorhossz nem tart a végtelenhez, és sok idő múlva kb. geometriai eloszlású.

M/M/1 sorbanállási modell II

Belátható, hogy ha $\lambda > \mu$, akkor "túl sok vevő érkezik", a várakozók száma tart a végtelenhez.

Ha $\lambda < \mu$, akkor a sorhossz nem tart a végtelenhez, és sok idő múlva kb. geometriai eloszlású.

Általánosítási lehetőségek: nem csak egy kiszolgáló (könnyű), nem Poisson folyamat az érkezési idő (nehéz).

Köszönöm a figyelmet!