

3. gyakorlat Vektorok

- Legyen $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{n} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$. Fejezzük ki $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ vektorokkal a következőket:

(a) $3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$
(b) $4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$
(c) $2\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{n}$
(d) $3\mathbf{m} + \frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{n}$
- Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge $\frac{\pi}{3}$, abszolút értékük $|\mathbf{a}| = 3$ és $|\mathbf{b}| = 4$. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatok értékét!

(a) $\mathbf{a}\mathbf{b}$
(c) $\mathbf{b}^2$
(e) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$

(b) $\mathbf{a}^2$
(d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$
(f) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$
- Végezzük el az alábbi vektori szorzásokat, majd hozzuk egyszerűbb alakra az eredményt!

(a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$
(c) $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + 3\mathbf{a})$
(e) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$

(b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$
(d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})$
- Tegyük fel, hogy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Az α és β paraméterek mely értékénél lesznek $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ kollineárisak?

(a) $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ $\mathbf{w} = 4\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$
(c) $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \mathbf{c}$ $\mathbf{w} = 4\mathbf{a} + 2\alpha\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$

(b) $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ $\mathbf{w} = 2\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + \alpha\mathbf{c}$
(d) $\mathbf{v} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \alpha\mathbf{c}$ $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$
- Tegyük fel, hogy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Döntsük el, hogy az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan független-e!

(a) $\mathbf{r} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{t} = \mathbf{0}$
(d) $\mathbf{r} = \mathbf{a}$, $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

(b) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$
(e) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{t} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$

(c) $\mathbf{r} = \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{t} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$
(f) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = -2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{t} = 2\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c}$
- Készítsük el az $\mathbf{0}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ vektorok vektori szorzatának művelet tábláját!
- Az $\mathbf{a} = [2, -1, 2]$, $\mathbf{b} = [3, 1, 5]$, $\mathbf{c} = [\alpha, 2, -1]$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata α milyen értéke mellett lesz 10 egység?
- Az alábbi feladatokban szereplő $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$ vektorokat az $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ alapvektorrendszerre vonatkoztatott koordinátáikkal adtuk meg. Fejezzük ki a $\mathbf{v}$ vektort az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!

(a) $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [1, -1, 0]$, $\mathbf{c} = [1, 1, -1]$, $\mathbf{v} = [3, 5, 7]$

(b) $\mathbf{a} = [1, 0, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 1, 0]$, $\mathbf{c} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{v} = [2, 1, 3]$

(c) $\mathbf{a} = [1, 0, 0]$, $\mathbf{b} = [1, 1, 1]$, $\mathbf{c} = [0, 0, 1]$, $\mathbf{v} = [3, 1, -2]$
- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ olyan egységvektorok, amelyekre $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ teljesül. Számítsuk ki az $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ értékét!
- Bizonyítsuk be a következő azonosságot: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$. Mi ennek az azonosságnak a geometriai jelentése?
- A következő feladatokban megadott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok valamelyik koordinátája egy t paraméterrel egyenlő. A két vektor szöge a t paraméter mely értékére lesz az adott α szög?

(a) $\mathbf{a} = [1, t, 1]$ $\mathbf{b} = [-1, 2, 1]$ $\alpha = 60^\circ$

(b) $\mathbf{a} = [1, t, 1]$ $\mathbf{b} = [\frac{1}{2}, 2, 1]$ $\alpha = 45^\circ$

(c) $\mathbf{a} = [t, 1, 2]$ $\mathbf{b} = [0, -1, 1]$ $\alpha = 90^\circ$

12. Állítsuk elő az $\mathbf{a}$ vektort két olyan vektor összegeként, amelyek közül az egyik párhuzamos a $\mathbf{b}$ vektorral, a másik pedig merőleges $\mathbf{b}$ -re! Számítsuk ki e két vektort, ha pl. $\mathbf{a} = [3, 2, 2]$ és $\mathbf{b} = [4, 2, 2]$!
13. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ egyenlőségből következik-e, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?
14. Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe T , akkor mekkora a $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ és a $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma területe?
15. Fejezzük ki a következő vegyes szorzatokat az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzattal!
- (a) $\mathbf{ab}(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})$, ahol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- (b) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} \frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$
16. Komplanárisak-e a $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $3\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, $2\mathbf{a} + 5\mathbf{c}$ vektorok, ha a $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok nem komplanárisak?
17. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}(\mathbf{ab})}{\mathbf{a}^2}$ ($\mathbf{a} \neq 0$) vektor merőleges az $\mathbf{a}$ vektorra!
18. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorhármassal esetén $|\mathbf{abc}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$! Milyen feltételek mellett teljesül az egyenlőség?
19. A következő feladatokban megadott $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer az α paraméter mely értékeinél lineárisan független és mely értékeinél lineárisan összefüggő?

- | | | | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|---------------------------|------------------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| (a) $\mathbf{a} = [0, 2, 3]$ | $\mathbf{b} = [\alpha, -1, 2]$ | $\mathbf{c} = [1, 2, 1]$ | (d) $\mathbf{a} = [\alpha, 2, 1]$ | $\mathbf{b} = [0, \alpha, 2]$ | $\mathbf{c} = [1, -1, 3]$ |
| (b) $\mathbf{a} = [2, \alpha, 4]$ | $\mathbf{b} = [0, 0, 0]$ | $\mathbf{c} = [3, -1, 2]$ | (e) $\mathbf{a} = [\alpha, 5, 1]$ | $\mathbf{b} = [3, 0, 3]$ | $\mathbf{c} = [1, 0, 1]$ |
| (c) $\mathbf{a} = [\alpha, 1, 2]$ | $\mathbf{b} = [3, -1, 0]$ | $\mathbf{c} = [2, 1, 0]$ | (f) $\mathbf{a} = [3, \alpha, 03]$ | $\mathbf{b} = [0, 3, \alpha]$ | $\mathbf{c} = [1, 0, -1]$ |