

1. A határértékek műveleti szabályait felhasználva számítsuk ki az alábbi limeszeket (ha csak egyoldali limesz létezik, akkor azt)!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \sin x + \frac{x}{x^2+3} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^3} \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{1}{x-1} & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{1-\frac{1}{x}} & \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2-\frac{3}{x})^{-x^2} \end{array}$$

2. Alkalmas egyszerűsítés segítségével számítsuk ki a következő határértékeket!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^2}{8x^3 + 3} & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \end{array}$$

3. Definíció alapján bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, ha $a > 0$, és $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$.

4. Számítsuk ki az alábbi limeszeket! Ahol szükséges, "gyöktelenítsük" a nevezőt vagy a számlálót!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^4}}{x + \frac{2}{x}} & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3} + 3x} & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+8} - 2} \end{array}$$

5. A következő határértékek kiszámításánál használjunk trigonometrikus azonosságokat, illetve a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ határértéket!

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x} & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x(\pi-x)} & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} \end{array}$$

6. a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{x-1}$ függvénynek aszimptotája a $g(x) = 2x+3$ függvény, azaz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$.
b) Határozzuk meg a 4.c) feladat eredményének segítségével a $\sqrt{x^2 + 2x + 3}$ függvény aszimptotáit $+\infty$ -ben és $-\infty$ -ben!

7. Hol folytonos az $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ függvény, és milyen típusúak a szakadásai?

8. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az alábbi függvény mindenütt folytonos legyen!

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - \sin^2 x}, & \text{ha } x < 0 \\ ax + \frac{b}{x}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

9. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x-1}$ függvény összes aszimptotáját!