

2. Röpzárthelyi

Elmélet:

1. A komplex függvénytan főtétele (Cauchy-tétel).
2. Milyen feltételt tud arra vonatkozóan, hogy a komplex vonalintegrál csak a görbék kezdő- és végpontjától függjön?
3. Milyen feltételt ismer a $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ egyenlőség biztosítására? (a főtétele következménye)
4. Mit nevezünk egy analitikus f komplex függvény F primitív függvényének egy D tartományon?
5. Milyen feltételt ismer a primitív függvény létezésére?
6. Írja fel a Cauchy-féle integrálformulát!
7. Hogyan definiáljuk egy komplex függvény $z_0 \in \mathbb{C}$ körüli Taylor-sorát?
8. Hogyan szól egy analitikus komplex függvény Taylor-sorral való előállításáról szóló tétel?
9. Írja fel az általánosított Cauchy-formulát (feltételekkel együtt)!
10. Adja meg az izolált szinguláris hely definícióját és szingularitás típusait!
11. Hogyan szól egy körgyűrűben analitikus komplex függvény Laurent-sorral való előállíthatóságáról szóló tétel?
12. Hogyan értelmezzük az f komplex függvény z_0 izolált szinguláris helyéhez tartozó reziduumát?
13. Hogyan szól a reziduum tétel?
14. Hogyan számítható ki a reziduum $\left. \begin{array}{l} \text{a.) egyszeres} \\ \text{b.) m-szeres} \end{array} \right\}$ pólusra vonatkozóan!

Példák:

1. Létezik-e az alábbi vektormezőnek komplex potenciálja? Ha igen, adja meg!

a.) $\underline{p}(x, y) = \begin{pmatrix} 2(1-y) \\ -2x \end{pmatrix}$

b.) $\underline{p}(x, y) = \frac{1}{x+y}\underline{i} + \frac{1}{x+y}\underline{j}$

c.) $\underline{p}(x, y) = (\cos x \operatorname{ch} y)\underline{i} + (\sin x \operatorname{sh} y)\underline{j}$

d.) $\underline{p}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}\underline{i} - \frac{2xy}{(y^2 + x^2)^2}\underline{j}$

2. Számítsa ki az alábbi függvények vonalintegrálját a definíciója alapján:

a.) $f(z) = z^2$ $\gamma_1 : z_1 = 1$ -ből $z_2 = -1$ -be vezető egyenes mentén,
 $\gamma_2 : z_1 = 1$ -ből $z_2 = -1$ -be vezető felső félkörív mentén.

b.) $f(z) = \bar{z}$ $\gamma_1 : z_1 = 0$ -ből $z_2 = 1$ -be, majd $z_3 = 1 + i$ -be vezető egyenes mentén,
 $\gamma_2 : z_1 = 0$ -ből $z_2 = 1 + i$ -be vezető egyenes mentén.

c.) $f(z) = 3z^2$ $\gamma_1 : z_1 = 0$ -ből $z_2 = x$ -be, majd $z_3 = x + iy$ -ba vezető egyenes mentén,
 $\gamma_2 : z_1 = 0$ -ből $z_2 = iy$ -ba, majd $z_3 = x + iy$ -ba vezető egyenes mentén.

d.) $\int_{\gamma_i} \frac{1}{z} dz$ $\gamma_1 : z_1 = 1$ -ből $z_2 = -1$ -be vezető felső félkörív mentén,
 $\gamma_2 : z_1 = 1$ -ből $z_2 = -1$ -be vezető alsó félkörív mentén.

e.) $f(z) = |z|$ $\gamma_1 : z_1 = -i$ -ből $z_2 = i$ -be, vezető egyenes mentén,
 $\gamma_2 : z_1 = -i$ -ből $z_2 = i$ -be vezető jobb oldali félkörív mentén.

f.) $f(z) = z^2$ $\gamma_1 : z_1 = 0$ -ből $z_2 = 1 + i$ -be, vezető egyenes mentén,
 $\gamma_2 : z_1 = 0$ -ből $z_2 = 1 + i$ -be vezető $y = x^2$ parabolaív mentén.

A továbbiakban minden görbe pozitív irányítású.

3. A Cauchy-tétel vagy a Cauchy-formula felhasználásával számítsa ki az alábbi integrálokat!

a.) $\oint_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2-1} dz, \quad \gamma : \left| z - \frac{1}{2} \right| = 1.$

b.) $\oint_{\gamma_k} \frac{dz}{z(z^2-1)}, \quad \gamma_1 : |z-4i|=1; \quad \gamma_2 : |z|=\frac{1}{2}; \quad \gamma_3 : |z-1|=\frac{1}{2}; \quad \gamma_4 : |z+1|=\frac{3}{4}; \quad \gamma_5 : |z|=2.$

c.) $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^4+1} dz, \quad \gamma : x^2 + y^2 = 2x.$

d.) $\oint_{\gamma} \left(\frac{\sin z}{z(z-1)(z-2)} + z \sin z \right) dz, \quad \gamma : |z-1| = \frac{1}{2}.$

e.) $\oint_{\gamma} \left(\frac{\cos z}{z(z-1)(z-2)} + z \cos z \right) dz, \quad \gamma : |z-1| = \frac{1}{2}.$

f.) $\oint_{\gamma} \left(\frac{\bar{z}}{z} + \frac{e^z}{z} \right) dz, \quad \gamma : |z| = 1.$

4. Számítsa ki az alábbi integrálokat az általánosított Cauchy-formula segítségével!

a.) $\oint_{\gamma} \frac{e^z-1}{z^3} dz, \quad \gamma : |z| = 2.$

b.) $\oint_{\gamma} \frac{\sin 2z}{z^3+z^2} dz, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2}.$

c.) $\oint_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z^3+z^2} dz, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2}.$

d.) $\oint_{\gamma} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2-1} dz, \quad \gamma : |z| = 2.$