

3. Röpzárthelyi Időpont: 2012. március 19. hétfő, 10:15, Hely: KF38.

(A 6. héten minden gyakorlat elmarad, pótolni viszont csak a pénteki csoportoknál lehet és kell.
Az azonos esélyek biztosítására csak így van mód.)

Elmélet:

1. Hogyan szól a Liouville-tétel?
2. Hogyan szól az algebra alaptétele?
3. Hogyan értelmezzük az f komplex függvény z_0 izolált szinguláris helyéhez tartozó reziduumát?
4. Hogyan szól a reziduum tétel?
5. Hogyan számítható ki a reziduum $\left. \begin{array}{l} \text{a.) egyszeres} \\ \text{b.) m-szeres} \end{array} \right\}$ pólusra vonatkozóan!
6. Mikor nevezünk egy $V \neq \emptyset$ halmazt lineáris térnek?
7. Mit jelent az, hogy a V lineáris térbeli $b^1, \dots, b^k$ vektorok lineárisan függetlenek? (Ismétlés, utána kell nézni!!!)
8. Mit jelent az, hogy a $b^1, \dots, b^n$ vektorok a V lineáris tér bázisát alkotják? (Ismétlés, utána kell nézni!!!)
9. Mit jelent az, hogy a H halmaz a V lineáris tér altere? (Ismétlés, utána kell nézni!!!)
10. Mikor nevezünk egy $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ függvényt négyzetesen integrálhatónak?
11. Mikor nevezünk egy $a, b \in V \mapsto \langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$ leképezést skaláris szorzatnak?
12. Cauchy - Bunyakovszkij - Schwarz egyenlőtlenség.
13. Mit nevezünk lineáris leképezésnek?
14. Milyen kapcsolatot ismer az $\mathbb{R}^n$ önmagába történő lineáris leképezései és az $n \times n$ méretű valós mátrixok között?
15. Milyen összefüggést ismer egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektornak a standard bázisra és egy $b^1, \dots, b^n$ bázisra vonatkozó koordinátái között?

Példák:

1. Írja fel az alábbi függvények Taylor-sorát a $z_0 = 0$ körül!

a.) e^z , b.) $\sin z$, $\cos z$, c.) $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$.

2. Írja fel az alábbi függvények Laurent-sorát!

a.) $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}$ a $z_0 = 1$ körül,

b.) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ a $z_0 = 0$ körül a következő tartományokra: $\bullet |z| < 1$; $\bullet 1 < |z| < 2$; $\bullet 2 < |z|$.

c.) $f(z) = \frac{z^2+z+3}{z^2-1}$ a $z_0 = 1$ körül.

d.) $f(z) = \frac{e^z}{z^k}$ a $z_0 = 0$ körül.

e.) $f(z) = \frac{2z}{(z+1)^2(z-4)}$ a $z_0 = -1$ körül.

f.) $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$ a $z_0 = 0$ körül.

g.) $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$ a $z_0 = 0$ körül.

- 3.) Számítsa ki az alábbi függvények reziduumát:

a.) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}$ $z_0 = i$ pólusra vonatkozóan.

b.) $f(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}$ $z_0 = \pi$ pólusra vonatkozóan.

c.) $f(z) = \frac{3z^2+1}{z^4-1}$ $z_0 = \pm 1, \pm i$ pólusra vonatkozóan.

- d.) $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$ $z_0 = 1$ pólusra vonatkozóan.
e.) $f(z) = \frac{z+3i}{z^2+1}$ $z_0 = -i$ pólusra vonatkozóan.
f.) $f(z) = \frac{\sin 5z}{(z-i)^4}$ $z_0 = i$ pólusra vonatkozóan.

4.) Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduum tétel segítségével! (Minden görbe pozitív irányítású.)

- a.) $\oint_{\gamma} \frac{e^z-1}{z^3} dz, \quad \gamma : |z| = 2,$ b.) $\oint_{\gamma} \frac{\sin 2z}{z^3+z^2} dz, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2},$
c.) $\oint_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z^3+z^2} dz, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2},$ d.) $\oint_{\gamma} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2-1} dz, \quad \gamma : |z| = 2,$
e.) $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2} \sin z dz, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2},$ f.) $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2} \cos z dz, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2}.$

5. Döntsük el, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak lineáris vektorteret! Válaszunkat indokoljuk!

- a.) $\mathbb{R}^n,$
b.) $\Pi_n = \{\text{legfeljebb } n\text{-edfokú valós együtthatós polinomok}\},$
c.) $\tilde{\Pi}_n = \{1 \text{ főegyütthatójú, legfeljebb } n\text{-edfokú valós együtthatós polinomok}\},$
d.) $\bar{\Pi}_n = \{p \in \Pi_n : p(1) = 0\},$
e.) $C_{[a,b]},$
f.) $\Sigma_{[a,b]}$ (az $[a,b]$ -n Riemann szerint integrálható függvények halmaza).

6. Igaz-e, hogy

- a.) Π_n a $C_{[a,b]}$ -nek,
b.) $\tilde{\Pi}_n$ a Π_n -nek,
c.) $C_{[a,b]}$ a $\Sigma_{[a,b]}$ -nek,
d.)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0 \right\}$$

az $\mathbb{R}^4$ -nek,

e.)

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 1 \right\}$$

az $\mathbb{R}^4$ -nek,

- f.) $S = \{f \in C_{\mathbb{R}}^2 : f''(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$ a $C_{\mathbb{R}}$ -nek

altère? Válaszunkat indokoljuk!

7. Adjunk meg egy-egy bázist az $\mathbb{R}^n$, Π_n , $\bar{\Pi}_n$ és S térben, és mondjuk meg a tér dimenzióját!

8. Igazoljuk, hogy

$$b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ortogonális vektorrendszert alkot $\mathbb{R}^3$ -ban!

Mik lesznek az $x = (1, 1, 1)^T$ (itt T a transzponáltat jelöli) vektor koordinátái a b^1, b^2, b^3 bázisra vonatkozóan? (Emlékezzünk az ortonormált bázis és ortogonális mátrix kapcsolatára!)