

4. Röpzárthelyi (Március 29-30-i gyakorlaton mindenkinek.)

Elmélet:

1. Mikor neveziünk egy $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosnak, illetve szakaszonként folytonosan differenciálhatónak?
2. Mit tud egy $2p$ -szerint periodikus és szakaszonként folytonosan differenciálható függvény Fourier-sorának pontonkénti konvergenciájáról?
3. Milyen feltételt ismer arra vonatkozóan, hogy egy $2p$ -szerint periodikus f függvény Fourier-sora az egész számsíkon egyenletesen konvergáljon f -hez?
4. Írja fel egy páros, $2p$ szerint periodikus, szakaszonként folytonos f függvény Fourier sorát!
5. Írja fel egy páratlan, $2p$ szerint periodikus, szakaszonként folytonos f függvény Fourier
6. Mikor mondjuk azt, hogy a $\{\varphi_k \in L^2(a, b) : k \in \mathbb{N}\}$ ortogonális, illetve ortonormált függvényrendszert alkot?
7. Hogyan értelmezzük a $f \in L^2(a, b)$ függvény $\{\varphi_k \in L^2(a, b) : k \in \mathbb{N}\}$ ortogonális rendszerre vonatkozó ortogonális sorát;
8. Mit jelent az, hogy a $f \in L^2(a, b)$ függvényt az ortogonális sora átlagosan (vagy $L^2(a, b)$ -értelemben) előállítja, és mi ennek a szükséges és elégséges feltétele?
9. Mit neveziünk trigonometrikus polinomnak, és mit tud az $f \in L^2(-\pi, \pi)$ függvényt átlagos hibanégyzet értelemben legjobban közelítő trigonometrikus polinomról?
10. Fogalmazza meg a legkisebb négyzetek feladatát valós euklideszi téren!
11. Írja fel azt az egyenletrendszert, amelyből megkaphatjuk a valós euklideszi térben kitűzött legkisebb négyzetek feladat megoldását!
12. Mit neveziünk túlhatározott lineáris egyenletrendszernek, mit neveziünk megoldásának?
13. Fogalmazza meg a mérési adatokra történő polinom illesztés feladatát!
14. Írja fel azt az egyenletrendszert, amelyből megkaphatjuk az adott pontrendszerre legkisebb négyzetek értelemben legjobban illeszkedő polinomot!

Példák:

1. Ismert, hogy ha egy gépkocsi v sebességről 0 sebességre lefékez, akkor a fékút a v sebességnek kvadrátikus függvénye: $y = a + b v + c v^2$. Mérés eredményeként az alábbi (v_i, y_i) számpárokat kaptuk:

$$(9; 3), (17; 9), (17; 5), (25; 14), (35; 23).$$

- a.) Értelmezzük a feladatot túlhatározott lineáris egyenletrendszerként, és írjuk fel azt az egyenletrendszert, amelyből az a, b, c , paraméterek kiszámíthatók!
 - b.) Értelmezzük a feladatot mérési adatokhoz történő legkisebb négyzetek értelemben legjobb polinomillesztési feladatként, és írjuk fel azt az egyenletrendszert, amelyből az a, b, c , paraméterek kiszámíthatók! Mi a különbség?
2. Számítsuk ki az alábbi adatokhoz legkisebb négyzetek értelemben legjobban illeszkedő legfeljebb másodfokú polinomot! Ábrázoljuk vázlatosan a kapott eredményt!
 - a.) $(-2; -1), (-1; -1), (0; 0), (1; 1), (2; 1)$
 - b.) $(0; 1), (1; -1), (2; 0), (3; -1), (4; 1)$
 - c.) $(-2; -1), (-1; 1), (0; -1), (1; 1), (2; -1)$
 - d.) $(-3; 1), (-1; -1), (0; 0), (1; -1), (3; 1)$

3. Legyen $f \in L^2(-1, 1)$ az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}] \\ -1, & x \in (-\frac{1}{2}, 0] \cup (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Keresendő az a $p_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinom, amelyre

$$\int_{-1}^1 (f(x) - p_4(x))^2 dx \rightarrow \min$$

Írjuk fel a megoldandó egyenletrendszert!

4. Legyen $f \in L^2(-1, 1)$ az alábbiakban megadott függvény! Keresendő az a $p_1(x) = a_1x + a_0$ polinom, amelyre

$$\int_{-1}^1 (f(x) - p_1(x))^2 dx \rightarrow \min$$

Írjuk fel a megoldandó egyenletrendszert, és számoljuk ki a polinom együtthatóit!

a.)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \cup (\frac{1}{2}, 1] \\ -1, & x \in (0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

b.)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup (0, 1] \\ -1, & x \in (-\frac{1}{2}, 0]. \end{cases}$$

c.)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

d.)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\frac{1}{2}, 1] \\ 1, & x \in [-1, -\frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Röpzh. eddig. Gyakorlaton még:

5. Tekintsük az $f_i \in L^2(-1, 1)$ elemeket, ahol $f_0(x) \equiv 1$, $f_1(x) \equiv x$, $f_2(x) \equiv x^2$. Keressünk olyan p_i , $i = 0, 1, 2$ pontosan i -edfokú polinomokat, amelyek ortogonálisak $L^2(-1, 1)$ -ben! (Ezt a gondolatot fogjuk alkalmazni a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárásnál.)