

5. Röpzárthelyi

A példák munkaidő igényére tekintettel az 5. röpz-h-ban nem lesz elméleti kérdés.

A gyakorlatok megértéséhez azonban elengedhetetlen az előadások anyagának ismerete!

Példák:

1. a.) Legyen $\varphi(x) = x$, ha $0 < x \leq 2$. Adjuk meg és ábrázoljuk φ -nek olyan, lehető legkisebb periódusú kiterjesztését $(-\infty, \infty)$ -re, amely páratlan periodikus függvény. Határozzuk meg a Fourier sorát!
- b.) Legyen $\varphi(x) = x$, ha $0 < x \leq 2$. Adjuk meg és ábrázoljuk φ -nek olyan, lehető legkisebb periódusú kiterjesztését $(-\infty, \infty)$ -re, amely páros periodikus függvény. Határozzuk meg a Fourier sorát!
2. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier sorát!
- b.) $f(x) = \sin^2(x)$,
- b.) $f(x) = \sin^2(x) \cos(2x)$.

3. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier sorát!

$$f(x) = x^2, \text{ ha } 0 < x \leq 2\pi, \text{ és } f(x + 2k\pi) = f(x).$$

4. Tekintsük az $f_i \in L^2(-1, 1)$ elemeket, ahol $f_1 \equiv 1$, $f_2 \equiv x$, $f_3 \equiv x^2$. Keressünk olyan p_i , $i = 0, 1, 2$ pontosan i -edfokú polinomokat, amelyek ortogonálisak $L^2(-1, 1)$ -ben! (Eddig a 4. röpz-h. tudnivalók 5. feladat) Normáljuk a kapott polinomokat úgy, hogy $p_i(1) = 1$, $i = 0, 1, 2$ teljesüljön!
5. Számítsuk ki a

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Rodrigues-formulával a P_0 , P_1 , P_2 polinomokat, és hasonlítsuk össze az előző feladatban kapott polinomokkal!

6. a.) Annak ismeretében, hogy az $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$ függvények bármely pozitív hosszúságú intervallumon lineárisan függetlenek, a Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással határozzunk meg olyan másodfokú polinomot, amely $L^2(0, 2)$ értelemben ortogonális a $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x - 1$ polinomokra!
- b.) Annak ismeretében, hogy az $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$ függvények bármely pozitív hosszúságú intervallumon lineárisan függetlenek, a Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással határozzunk meg olyan másodfokú polinomot, amely $L^2(-2, 0)$ értelemben ortogonális a $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = -x - 1$ polinomokra!
7. A Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással határozzunk meg olyan pontosan i -edfokú p_i polinomokat $i = 0, 1, 2$ -re, amelyek az alábbi x_j értékekre vonatkozóan ortogonális rendszert alkotnak!

a.)

x_j	-2	-1	0	1	2
-------	----	----	---	---	---

b.)

x_j	0	1	2	3	4
-------	---	---	---	---	---

8. Írjuk fel az alábbi adatokra a Lagrange féle interpolációs polinomot, és számítsuk ki a polinom értékét a megadott $\bar{x}$ helyen.

a.)

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1	8	27

 $\bar{x} = -1,$

b.)

x_i	-1	1	2	3
y_i	-8	0	1	8

 $\bar{x} = 0,$

c.)

x_i	-1	1	-2	2
y_i	0	8	-1	27

 $\bar{x} = 0,$

d.)

x_i	0	-1	1	2
y_i	0	1	0	3

 $\bar{x} = -2.$

9. Írjunk "pseudokódos" algoritmust, amely a Lagrange interpolációs polinomhoz a bekért adatok alapján kiszámítja a polinom értékét egy megadott $\bar{x}$ helyen!
10. Becsüljük meg a $\sin x$ függvényhez készített másodfokú interpolációs polinom hibáját az osztópontok közötti $\bar{x}$ helyen, ha az osztópontok távolsága $h = 0,01$ (a függvényérték hibájától eltekintünk)!
11. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\{x_k\}_{k=0}^n$, $(x_i \neq x_j, i \neq j)$ -re

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$$

12. Írjuk fel az alábbi adatokra az Hermite-féle interpolációs polinomot!

x_i	0	1
y_i^0	0	1
y_i^1	0	3
y_i^2	-	6

,

x_i	0	2
y_i^0	-1	3
y_i^1	-	3

,

x_i	0	1
y_i^0	1	2
y_i^1	-	3

- 13.) Számítsuk ki az e^{tA} mátrixot az alábbi mátrixokra!

a.)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

c.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beadható házi feladat:

Hibátlan megoldás 3 pont, ami az ÉRVÉNYES "nagy" zárthelyi eredményéhez hozzáadódik.

1. Mutassuk meg, hogy az 5. feladatban szereplő, Rodrigues formulával megadott P_n polinom kielégíti az úgynevezett Legendre-féle differenciálegyenletet:

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0$$

(Útmutató: Vegyük a $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$ polinom deriváltját, szorozzuk meg mindkét oldalt $(x^2 - 1)$ -gyel, majd differenciáljuk a kapott egyenlőség mindkét oldalát x szerint $n+1$ -szer. A szorzat $n+1$ -dik deriváltjának kiszámítására alkalmazzuk az Euler formulát!)

Határidő: 2011. április 6. 11 óra. Beadható a gyakorlatvezetőnek, vagy a H ép. IV. emeleti postaládába, a gyakorlatvezető nevének feltüntetésével.