

6. Röpzárthelyi

Elmélet:

1. Hogyan értelmezzük egy f függvény Laplace transzformáltját?
2. Milyen feltételt ismer a Laplace transzformált létezésére?
3. Hogyan értelmezzük a f és g függvények $f \star g$ konvolúcióját?
4. Mit tud a $f \star g$ konvolúció Laplace transzformáltjáról?

Példák:

Az 5. röpzh tudnivalókból az e^{tA} mátrix kiszámítása: 13 feladat, az a.) rész első két mátrixának kivételével.

1. Számítsuk ki az alábbi f és g függvények konvolúcióját, és a megadott Laplace transzformált(ka)t!
a.) $f(t) = \sqrt{t}$, $g(t) = f(t)$, $L(f \star g)$ és $L(\sqrt{t})$.
b.) $f(t) = e^t$, $g(t) = f(t)$, $L(f \star g)$.
2. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az

$$\begin{aligned}x'(t) &= \int_0^t x(\tau) \cos(t - \tau) d\tau, \\x(0) &= 1\end{aligned}$$

integro-differenciálegyenletet!

3. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi lineáris elsőrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

a.)

$$y'(t) - y(t) = 2, \quad y(0) = 1.$$

b.)

$$y'(t) - y(t) = \sin t, \quad y(0) = 0.$$

c.)

$$y'(t) - 2y(t) = \cos t, \quad y(0) = 0.$$

d.)

$$y' - y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2, \text{ vagy } x \geq 3, \\ 1, & 2 \leq x < 3 \end{cases}, \quad y(0) = -1.$$

e.)

$$y'(t) - y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t \end{cases}, \quad y(0) = 1.$$

f.)

$$y'(t) + 2y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = -1.$$

g.)

$$y'(t) + y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}, \quad y(0) = -1.$$

4. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi lineáris másodrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

a.)

$$x''(t) + 4x(t) = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

b.)

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

c.)

$$x''(t) + 4x(t) = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

ahol

$$\begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad f(t+2k) = f(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi lineáris differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

a.)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + y(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t \geq 1, \end{cases} & x(0) &= 0 \\ \dot{y}(t) - x(t) &= 0, & y(0) &= 1. \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + y(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t \geq 1, \end{cases} & x(0) &= 0 \\ \dot{y}(t) + x(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2, \end{cases} & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Táblázat részlet: $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}(\eta(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s), \quad \mathcal{L}(\eta(t))(s) = \frac{1}{s},$
 $\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{1+s^2}, \quad \mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{s}{1+s^2}.$