6. Röpzárthelyi

1. Hogyan értelmezzük egy f függvény Laplace transzormáltját?
2. Milyen feltételt ismer a Laplace transzformált létezésére?
3. Hogyan értelmezzük a f és g függvények $f \star g$ konvolucióját?
4. Mit tud a $f \star g$ konvolució Laplace transzormáltjáról?
5. Fogalmazza meg a polinommal történő közönséges interpoláció feladatát!
6. Fogalmazza meg az Hermite interpoláció feladatát!

Példák:

1. Írja fel az alábbi függvények Taylor-sorát a $z_0 = 0$ körül!

   a.) e^z, b.) $\sin z$, $\cos z$, c.) $\mathrm{sh} z$, $\mathrm{ch} z$.

2. Írja fel az alábbi függvények Laurent-sorát!

   a.) $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}$ a $z_0 = 1$ körül,
   b.) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ a $z_0 = 0$ körül a következő tartományokra: • $|z| < 1$; • $1 < |z| < 2$; • $2 < |z|$.
   c.) $f(z) = \frac{z^2+z+3}{z^2-1}$ a $z_0 = 1$ körül.
   d.) $f(z) = \frac{e^z}{z^k}$ a $z_0 = 0$ körül.
   e.) $f(z) = \frac{2z}{(z+1)^2(z-4)}$ a $z_0 = -1$ körül.
   f.) $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$ a $z_0 = 0$ körül.
   g.) $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$ a $z_0 = 0$ körül.

3.) Számítsa ki az alábbi függvények reziduumát:

   a.) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}$ $z_0 = i$ pólusra vonatkozóan.
   b.) $f(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}$ $z_0 = \pi$ pólusra vonatkozóan.
   c.) $f(z) = \frac{3z^2+1}{z^4-1}$ $z_0 = \pm 1,\ \pm i$ pólusra vonatkozóan.
   d.) $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$ $z_0 = 1$ pólusra vonatkozóan.
   e.) $f(z) = \frac{z+3i}{z^2+1}$ $z_0 = -i$ pólusra vonatkozóan.
   f.) $f(z) = \frac{\sin 5z}{(z-i)^4}$ $z_0 = i$ pólusra vonatkozóan.

4.) Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduum tétel segítségével! (Minden görbe pozitív irányítású.)

   a.) $\oint_\gamma \frac{e^z-1}{z^3} dz$, $\gamma : |z| = 2$, b.) $\oint_\gamma \frac{\sin 2z}{z^3+z^2} dz$, $\gamma : |z| = \frac{1}{2}$,
   c.) $\oint_\gamma \frac{\cos 2z}{z^3+z^2} dz$, $\gamma : |z| = \frac{1}{2}$, d.) $\oint_\gamma \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2-1} dz$, $\gamma : |z| = 2$,
   e.) $\oint_\gamma \frac{1}{z^2} \sin z dz$, $\gamma : |z| = \frac{1}{2}$, f.) $\oint_\gamma \frac{1}{z^2} \cos z dz$, $\gamma : |z| = \frac{1}{2}$.

5. Számítsuk ki az alábbi f és g függvényel konvolucióját, és a megadott Laplace transzformálta(ka)t!

   a.) $f(t) = \sqrt{t}$, $g(t) = f(t)$, $L(f \star g)$ és $L(\sqrt{t})$.
   b.) $f(t) = e^t$, $g(t) = f(t)$, $L(f \star g)$.

6. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int_0^t x(\tau) \cos(t-\tau) d\tau, \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

   integro-differenciálegyenletet!

7. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi lineáris elsőrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

   a.)
   $$y'(t) - y(t) = 2, \qquad y(0) = 1.$$

   b.)
   $$y'(t) - y(t) = \sin t, \qquad y(0) = 0.$$

   c.)
   $$y'(t) - 2y(t) = \cos t, \qquad y(0) = 0.$$

   d.)
   $$y' - y = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2, \text{ vagy } x \ge 3, \\ 1, & 2 \le x < 3 \end{cases} \qquad y(0) = -1.$$

   e.)
   $$y'(t) - y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 3 \\ 0, & 3 \le t \end{cases}, \qquad y(0) = 1.$$

   f.)
   $$y'(t) + 2y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}, \qquad y(0) = -1.$$

   g.)
   $$y'(t) + y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 4 \\ 0, & t \ge 4 \end{cases}, \qquad y(0) = -1.$$

8. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi lineáris másodrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

   a.)
   $$x''(t) + 4x(t) = \cos t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

   b.)
   $$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^x, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

   c.)
   $$x''(t) + 4x(t) = f(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0,$$

   ahol
   $$\begin{cases} 1, & 0 \le x < 1, \\ 0, & 1 \le x < 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad f(t+2k) = f(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

   A pénteki kurzusoknak az 5. rzh. 3. feladata, ebből az 1-8. feladatok!

9. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi lineéris differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

   a.)
   $$\begin{aligned} \dot{x}(t) + y(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1, \end{cases} & x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) - x(t) &= 0, & y(0) = 1. \end{aligned}$$

   b.)
   $$\begin{aligned} \dot{x}(t) + y(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1, \end{cases} & x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) + x(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2, \\ 0, & t \ge 2, \end{cases} & y(0) = 0. \end{aligned}$$

<u>Táblázat részlet:</u> $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s-a)$, $\mathcal{L}(\eta(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}(\eta(t))(s) = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{1+s^2}$, $\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{s}{1+s^2}$.