

7. Röpzárthelyi

Elmélet:

1. Írja le a $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény azon 3 tulajdonságát, ami mellett valószínűséget határoz meg!
2. Mi a klasszikus valószínűségi mező, és mivel egyenlő egy A esemény valószínűsége?
3. Mi a geometriai valószínűségi mező, és mivel egyenlő egy A esemény valószínűsége?
4. Feltételes valószínűség definíciója.
5. Események függetlenségének definíciója, kapcsolat a feltételes valószínűséggel.
6. Mit nevezünk teljes eseményrendszernek?
7. Teljes valószínűség tétele.
8. Bayes tétel.
9. Mit nevezünk valószínűségi változónak, és hogyan definiáljuk az eloszlásfüggvényét?
10. Mi az a 4 tulajdonság, ami karakterizálja az eloszlásfüggvényt?
11. Mit nevezünk diszkrét valószínűségi változónak?
12. Mit nevezünk abszolút folytonos valószínűségi változónak?
13. Hogyan definiáljuk egy diszkrét valószínűségi változó várható értékét?
14. Hogyan definiáljuk egy abszolút folytonos valószínűségi változó várható értékét?
15. Hogyan definiáljuk egy valószínűségi változó szórását, és milyen képlettel számoljuk ki?
16. Mit értünk a ξ , η diszkrét valószínűségi változók együttes valószínűség-eloszlásán?
17. Mit értünk a ξ , η abszolút folytonos valószínűségi változók együttes valószínűség-eloszlásán?
18. Mikor nevezzük a ξ , η valószínűségi változókat függetlennek?
19. Mit értünk a ξ , η valószínűségi változók kovarianciáján, és mikor nevezzük őket korrelálatlannak?

Példák:

1. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a klasszikus valószínűség témakörből!
 - a.) Egy 52 lapos kártyacsomagból 13 lapot találmra kihúzunk. (Az egyszer kihúzott lapot nem tesszük vissza a csomagba.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy
 - a1.) a treff király a kihúzott lapok között lesz;
 - a2.) pontosan két treff lesz a kihúzott lapok között;
 - a3.) a treff király és a treff ász is a kihúzott lapok között lesz;
 - a4.) legalább egy treff lesz a kihúzott lapok között?
 - b.) Kitöltünk egy ötös lottószelvényt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
 - b1.) pontosan 3 találatunk lesz;
 - b2.) legalább 3 találatunk lesz;
 - b3.) legfeljebb 3 találatunk lesz?
 - c.) Bálint P. 1.2.3/a, 1.2.4 kidolgozott feladat (14-16. old.), 1.3.1 gyakorló feladat (19. old.)
2. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a geometriai valószínűség témakörből!
 - a.) Háromszög szerkeszthetőségének valószínűsége. A $(0, 1)$ intervallumon találmra kiválasztunk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett 3 szakaszból háromszög szerkeszthető?

- b.) Ketten megbeszéljük, hogy de. 10 és 11 óra között egy meghatározott helyen találkoznak. Megállapodás szerint, aki korábban érkezik 20 percet vár a másikra. Mennyi a találkozás valószínűsége, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek?
- c.) Az $x^2 + b x + c = 0$ másodfokú egyenlet b és c együtthatóit válasszuk véletlenszerűen a $(-2, 2)$ intervallumból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyenlet gyökei valós számok lesznek?
- d.) Bálint P. 1.2.5, 1.2.6 kidolgozott feladat (16-17. old.), 1.3.5 gyakorló feladat (20. old.)
3. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a feltételes valószínűség, függetlenség témakörből!
- a.) Egy urnában 6 fehér és 4 fekete golyó van. Egymás után kihúzzunk 2 golyót (visszatevés nélkül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy másodikra feketét húzzunk, feltéve, hogy az első fehér volt?
- b.) Három kockával dobunk egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kocka hatost mutat, feltéve hogy az egyes kockák különböző jelzésű számokat mutatnak?
- c.) Egy munkás 2 gépen dolgozik. Az első gépet 0.87, a másodikat 0.90 valószínűséggel nem kell javítani egy műszak alatt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
- c1.) legfeljebb 1 géppel kell foglalkoznia;
- c2.) pontosan 1 géppel kell foglalkoznia
- javítás céljából egy műszak alatt, ha a gépek meghibásodása egymástól független?
- d.) Három urnában fekete és fehér golyók vannak: az elsőben 3 fekete és 2 fehér, a másodikban 4 fekete és 3 fehér, a harmadikban 5 fekete és 4 fehér. Véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát, mégpedig az első 1/2, a másodikat 1/3, a harmadikat 1/6 valószínűséggel. A kiválasztott urnából kihúzzunk egy golyót úgy, hogy minden golyó kihúzása azonos valószínűségű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy fehéret húzzunk?
- e.) Egy rekeszben 15 labda van, amelyek közül 9 új. Az első játékhoz találmra kiveszünk 3 labdát, és ezeket játék után visszatesszük. A második játékhoz ismét 3 labdát veszünk ki találmra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utóbb kivett labdák mind újak lesznek?
- f.) Három urnában fekete és fehér golyók vannak: az elsőben 3 fekete és 2 fehér, a másodikban 4 fekete és 3 fehér, a harmadikban 5 fekete és 4 fehér. Véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát, mégpedig az első 1/2, a másodikat 1/3, a harmadikat 1/6 valószínűséggel. A kiválasztott urnából kihúzzunk egy golyót úgy, hogy minden golyó kihúzása azonos valószínűségű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első urnából húztunk, feltéve, hogy a húzás eredménye fehér?
- g.) N pénzérme között kettőnek mindkét oldalán fej van, a többi érme hibátlan. Találmra kiválasztunk egy érmét és háromszor feldobjuk. Eredményül mindig fejet kapunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy hibás érmét választottunk?
- h.) Hat doboz mindegyikében 6 golyó van, amelyek között rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6 golyó fehér. Egy találmra kiválasztott dobozból 3 golyót húzzunk visszatevéssel. Azt találjuk, hogy mindhárom húzásra fehér golyót vettünk ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 6 golyó közül éppen 2 fehér volt a dobozban?
- g.) Bálint P. 1.2.3/b,c, 1.2.7, 1.2.8 kidolgozott feladat (14. és 17-19. old.), 1.3.3, 1.3.4, 1.3.6 gyakorló feladat (19-20. old.)

A május 3.-án írandó 2. (nagy) zárthelyi anyaga eddig tart.

4. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelynek értékei 0, 1, 2, ... nemnegatív egész számok. Tudjuk, hogy a $\xi = k$ esemény valószínűsége arányos $\frac{1}{k!}$ -sal. Határozzuk meg a $P(\xi = k)$ valószínűségeket!
5. Lehet-e az

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{1+2x}{x-0.8}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény eloszlásfüggvény?

6. Legyen

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1 \\ A + \frac{B}{x+1}, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

- a.) Az A és B milyen értékeire lehet az F eloszlásfüggvény?
 - b.) Ábrázoljuk F -t!
 - c.) Határozzuk meg az eloszlás sűrűségfüggvényét!
 - d.) Számítsuk ki a $P(\xi > 9)$ valószínűséget!
- 7.) Az A és B milyen értékeire lehet az $F(x) = A + B \arctan x$, $(-\infty < x < \infty)$ eloszlásfüggvény?
- 8.) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} A \left(x + \frac{1}{2}\right), & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- a.) Az A milyen értékére lehet az f sűrűségfüggvény?
 - b.) Határozzuk meg az F eloszlás eloszlásfüggvényét!
 - c.) Számítsuk ki a $P(0 < \xi < 0,3)$ valószínűséget!
9. Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x \geq a, \\ 0, & \text{ha } x < a. \end{cases}$$

- a.) Határozzuk meg az a értékét!
 - b.) Számítsuk ki a $P(\xi \geq \ln 2)$ valószínűséget!
 - c.) Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórását!
10. Egységnyi hosszúságú szakaszon egymástól függetlenül választunk két pontot taláломra. Legyen a valószínűségi változó a két pont távolsága. Határozzuk meg a két pont távolságának várható értékét!
11. Egy céllövés során minden találat egy 18 cm sugarú körlapra jut. A lövés a körlap bármely pontjára azonos eséllyel találhat. Számítsuk ki a találat helyének a kör középpontjától való távolságának szórását!
12. Mutassuk meg, hogy a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{2}{x^3}, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak nem létezik szórása.

13. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Számítsuk ki a ξ várható értékét és szórását!

14. Bálint P. 2.2.2 - 2.2.5 kidolgozott feladat (30-36. old.), 2.3.1-2.3.5 gyakorló feladat (37. old.)