MATEMATIKA FELADATOK AZ ÖTÖDIK SZEMESZTERBEN

Differenciálegyenletek és numerikus módszereik BMETE 93AX11

Matematika Intézet Gépészkari fejlesztőmérnök szakirány 2012. szeptember 17.

1.) Vizsgálja az $\dot{x}= t - x^2$ egyenletet! a.) Vázolja az irámezőt kézzel és számítógéppel egyaránt! b.) Legyen $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mutassa meg, hogy az $\dot{x}= t - x^2$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték feladatnak létezik egyetlen lokális megoldása, és az folytatható a $[t_0, \infty)$ intervallumra! c.) Mutassa meg, hogy $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ esetén a megoldás szogorúan monoton növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon! d.) Alkalmazza az explicit Euler módszert a $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ értékeknek megfelelő kezdetiérték feladat megoldására különböző rögzített h lépésközzel különböző intervallumokon! Mutassa ki, hogy bármilyen kicsinynek is választja a $h > 0$ lépésközt, az $x(0) = 0$ kezdetiérték–probléma numerikus megoldásával (egyre nagyobb $t > 0$ idő esetén) mindig baj lesz! Mi ennek az oka?

2.) Vizsgálja az $\dot{p}= p^2 - 2p - 1$, $p(t_1) = g$ kezdetiérték feladat megoldását a $[0, t_1]$ intervallumon a ”$g \geq 0$” érték függvényében! Számítsa ki a pontos megoldást, és vázolja a megoldásgörbéket kézzel, majd számítógéppel! Számítógéppel kisérletezzen különböző g és t_1 értékekkel! Mit lehet sejteni a megoldásgörbék viselkedéséről, ha $t_1 \to \infty$? Igazolja a sejtését a pontos megoldás alapján!

3.) Vizsgálja az $\dot{x}= y + xf(r), \dot{y}= -x + yf(r)$ egyenletrendszert, ahol $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, és (első eset) $f(r) = -r^2$ illetve (második eset) $f(r) = (2 - r)(r - 1)^2$ (és $r \geq 0$)! Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Használja az explicit Euler módszert és az implicit Euler módszert egyaránt! Értelmezze a kapott geometriai különbözőségeket!

4.) Vizsgálja az $\dot{x}= y + hxf(r)$, $\dot{y}= -x + hyf(r)$ egyenletrendszert a h paraméter $h = 0$, 1 és -1 értékeire, ahol $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $f(r) = -r^2$ (és $r \geq 0$)! Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Használja az explicit Euler módszert és az implicit Euler módszert egyaránt! Értelmezze a kapott geometriai különbözőségeket!

5.) Vizsgálja az $\dot{x}= -xy$, $\dot{y}= x^2 - y - 1 + \mu(y - y^3)$ egyenletrendszert, először a $\mu = 1$ paraméterértéknél, majd a $\mu \in (0, 2)$ paraméter függvényében! Határozza meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását linearizálással! Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt!

6.) A sajátértékek (valós részei) előjelének függvényében adja meg az $\dot{x}= Ax$ síkbeli egyenlet (tehát amikor A valós, 2×2 méretű mátrix, x pedig kételemű oszlopvektor) $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzetének összes lehetséges típusát. Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Használja az explicit Euler módszert és az implicit Euler módszert egyaránt! Megmarad–e az egyensúlyi helyzet típusa, ha a h lépésközt növeli? Mi a helyzet az $X = x + h(f(x) + f(X))/2$ másodrendű diszkretizációs módszer esetében?

7.) Vizsgálja az (első eset) $\dot{x}= x(6 - 3x - y)$, $\dot{y}= y(4 - 4x - y)$ valamint a (második eset) $\dot{x}= x(6 - 3x - 3y)$, $\dot{y}= y(12 - 8x - 4y)$ és a (harmadik eset) $\dot{x}= x(6 - 2x - y)$, $\dot{y}= y(12 - 3x - 3y)$ egyenletrendszert! Határozza meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását linearizálással! Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Interpretálja a feladatot, mint két növényevő faj együttélésére vonatkozó táplálék–korlátos biológiai modellt! (A feladatban mindvégig feltesszük, hogy $x, y \geq 0$.)

8.) Vizsgálja az (első eset) $\dot{x}= x(4 - 2x - 2y)$, $\dot{y}= y(-4 + 4x)$ valamint a (második eset) $\dot{x}= x(2 - y)$, $\dot{y}= y(2x - 2)$ egyenletrendszert! Határozza meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását linearizálással! Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Interpretálja a feladatot, mint egy ragadozó és egy növényevő faj együttélésére vonatkozó biológiai modellt! (A feladatban mindvégig feltesszük, hogy $x, y \geq 0$.)

9.) Vizsgálja az (első eset) $\ddot{x} + \sin(x) = 0$ valamint a (második eset) $\ddot{x} + \dot{x}/10 + \sin(x) = 0$ egyenletet! Határozza meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását linearizálással! Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Vizsgálja az $\ddot{x} + \dot{x}/10 + \sin(x) = \cos(t)$ egyenletet is, ez utóbbit már csak számítógéppel!

10.) Vizsgálja az $\dot{x}= 2x(y-x)$, $\quad \dot{y}= y(3y-4x)$ egyenletrendszert! Megállapítható-e az egyensúlyi helyzet stabilitási tulajdonsága linearizálással? Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Számítsa ki az alábbi kezdeti feltételekhez tartozó megoldásokat: a.) $(x_0, 0)$; b.) $(0, y_0)$; c.) $(x_0, 2x_0)$. Állapítsa meg, hogy az (x, y) sík mely tartományain lesz $t \to x(t)$ szigorúan monoton! Ezen tartományokra vonatkozóan írja fel az un. "pályagörbék egyenletét", és oldja meg! Vonja le a következtetést az egyensúlyi helyzet stabilitásáról!

11.) Vizsgálja az $\dot{x}= x^2 - 5xy + y^2$, $\quad \dot{y}= x^2 - 2xy - 2y^2$ egyenletrendszer stabilitási tulajdonságait! Megállapítható-e az egyensúlyi helyzet stabilitási tulajdonsága linearizálással? Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Számítsa ki az $(x(0), y(0)) = (a, a)$ kezdeti feltételhez tartozó megoldást! Vonja le a következtetést az egyensúlyi helyzet stabilitásáról! Adjon meg minél bővebb olyan tartományt, hogy az onnan induló trajektóriák $t \to \infty$ esetén az origóhoz tartsanak!

12.) Vizsgálja az $\ddot{y} + h(y)\, \dot{y} + g(y) = 0$ un. Liénard egyenlet stabilitási tulajdonságait, ahol $h, g \in C^1(\mathbb{R})$, $h(y) > 0$, $yg(y) > 0$, $\forall\ y \neq 0$-ra és $G(y) := \int_0^y g(s)ds \to \infty$, ha $|y| \to \infty$! Írja át elsőrendű egyenletrendszerré és próbálkozzonaz $x \to V(x) := G(x_1) + 1/2x_2^2$ Lyapunov függvénnyel! Mutassa meg, hogy az eredmények alkalmazhatók az $\ddot{y} + \dot{y} + y^3 = 0$ rendszerre! Számítógép segítségével vázolja az utóbbi egyenlet trajektóriáit néhány kezdőpont mellett!

13.) Vizsgálja az $\dot{\underline{x}}= \underline{f}(\underline{x})$ egyenlet stabilitási tulajdonságait linearizálással is, és Lyapunov tétel segítségével is, ha $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ és $f_1(x_1, x_2) = -2x_1 - x_1^3 + x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Próbálkozzon a $V(\underline{x}) = \left\|\underline{f}(\underline{x})\right\|^2$ függvénnyel! Számítógép segítségével vázolja a V függvény szintvonalait, valamint a fenti egyenletrendszer néhány trajektóriáját!

14.) Vizsgálja az

$$\dot{x_1}= x_2, \quad \dot{x_2}= -\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} - \frac{x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}$$

egyenlet stabilitási tulajdonságait a Lyapunov tétel segítségével a $V(x) = x_2^2 + \frac{x_1^2}{1+x_1^2}$ függvény felhasználásával! Ábrázolja a V függvény $V(x) = c$ típusú szintvonalait, és numerikusan számítsa ki és ábrázolja a fenti egyenletrendszer néhány kezdeti feltétel melletti trajektóriáját!

15.) Vizsgálja az $m\dot{v} = -mg + bv^2$, $v(0) = 0$ "szabadesés közegellenállással a levegőben" feladatot! Mennyi idő alatt zuhan a test a földre h magasságból? Mi történik a $b \to 0^+$ esetben? Ha ez megvan, térjen át az $m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + kx = 0$ feladat számítógépes vizsgálatára!

16.) Vizsgálja az $y'(t) = \lambda(y(t) - g(t)) + g'(t)$, $y(0) = y_0$, $(t > 0)$ kezdetiérték feladatot! Számítsa ki a potos megoldást! Rajzolja fel $g(t) = t$ mellett az egzakt megoldást különböző negatív λ paraméterek és különböző y_0 értékek mellett a [0,10] intervallumon! Ugyanezen értékek esetén számítsa ki a megoldás közelítését explicit Euler módszerrel, különböző lépésközökkel! Milyen lépésközzel kapható az egzakt megoldás viselkedését tükröző közelítést? Magyarázza meg a tapasztalatot!

17.) Vizsgálja az $\ddot{x} - \alpha(1-x^2)\, \dot{x} + x = 0$ ún. Vander Pol-féle differenciálegyenletet! Az $\alpha = 1$ paraméter mellett vázolja a trajektóriák menetét kézzel és számítógéppel egyaránt! Számítógéppel rajzolja fel az $x(0) = 1$ és $\dot{x}\ (0) = 1$ kezdetiértékhez tartozó megoldásgörbéket a $[0, 40]$ intervallumon és $\alpha = 1$ és $\alpha = 10$ esetén! Hasonlítsa össze a MATLAB ode23, de45, valamint az ode23s és ode45s munkaigényét a fenti kezdetiértékek és az α paraméter $\alpha = 1,\ 10,\ 100,\ 1000$ értékei mellett!

18.) Egykarú, rugalmas csatlakozású robotkar mozgását leíró differenciálegyenlet:

$$\begin{aligned} J_L\, \ddot{q}_1 + K(q_1 - q_2) + Mgl \sin(q_1) &= 0, \\ J_R\, \ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) &= u. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $q_1 = q_d$, $\dot{q}_1 = 0$ a beállítandó munkapont. Vezesse be a

$$z_1 = q_1 - q_d, \;\; z_2 = \dot{q}_1, \;\; z_3 = q_2 - p_d, \;\; z_4 = \dot{q}_2, \;\; v = u - u_d$$

új koordinátákat, és írja fel azt a $\underline{\dot{z}} = \underline{f}(\underline{z}, \underline{v})$ elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert, amely a kiindulási egyenletrendszerrel ekvivalens! a.) Hogyan kell megválasztani a p_d és u_d értékeket, hogy a $z(t) \equiv 0,\ v(t) \equiv 0$, az új egyenlet egyensúlyi megoldása legyen? b.) Határozza meg a $d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,$ paraméterek értékét a μ függvényében úgy, hogy $p_4(\lambda) := \lambda^4 - d_4\lambda^3 - d_3\lambda^2 - d_2\lambda - d_1 \equiv (z+\mu)^4$ teljesüljön! Az $a = \frac{Mgl}{J_L},\ b = \frac{K}{J_L},\ c = \frac{K}{J_R},\ d = \frac{1}{J_R}$ jelölések mellett alkalmazza a

$$v = \kappa(z) = \frac{1}{bd}\left[d_1 z_1 + d_2 z_2 + d_3(-a(\sin(z_1+q_d) - \sin q_d) - b(z_1 - z_3))\right.$$
$$\left. - d_4((a\cos(z_1+q_d) + b)z_2 - bz_4) - L_y^4(\varphi(z))\right]$$

visszacsatolást, ahol $\varphi(z) = z_1$ és

$$L_y^4(\varphi(z)) = az_2^2\sin(z_1+q_d) + (a\cos(z_1+q_d)+b)\left[a(\sin(z_1+q_d) - \sin q_d) + b(z_1 - z_3)\right] + bc(z_1 - z_3).$$

Írjon számítógépes programot, amely különböző μ paraméterek mellett kiszámítja a visszacsatolt zárt rendszer közelítő megoldását az alábbi adatok esetén:

$$\begin{aligned}
M &= 1\,\mathrm{kg};\ l = 1\,\mathrm{m};\ K = 30;\ J_R = 0,1\,\mathrm{kgm}^2;\ J_L = 0,4\,\mathrm{kgm}^2;\ q_d = 1,2 \\
z_1(0) &= 0,1;\ z_2(0) = z_3(0) = z_4(0) = 0 \quad (\mu = 1 \text{ és } \mu = 10) \\
z_1(0) &= 2;\ z_2(0) = 0,9;\ z_3(0) = 0,3;\ z_4(0) = 0,1 \quad (\mu = 10).
\end{aligned}$$

19.) Tekintse a 19.) feladatot azzal a különbséggel, hogy a számítógépes szimulációban a v visszacsatolás helyett un. mintavételezett vezérlést használunk: a $[0,T]$ intervallumon: tekintjük a $t_i = i\tau$ felosztást és az i-dik intervallumon $v(t) = \kappa(z(t_i)),\ t \in [i\tau, (i+1)\tau)\ \ (i = 0, 1, ..., N)$ - konstans - vezérlést alkalmazzuk. A szimulációnál használja az előző feladatban megadott adatokat, de csak $\mu = 10$-re számolja, és vegye $\tau = 0,01;\ \tau = 0,045;\ \tau = 0,05$ értékeket $T = 2$ mellett!

20.) Állítsa elő az $x(k+1) = Ax(k)$, $(k = 0, 1, 2, ...)$ síkbeli differenciaegyenlet (tehát amikor A valós, 2×2 méretű mátrix, x pedig kételemű oszlopvektor) általános megoldását az mátrix sajátértékei és sajátvektorai segítségével! Komplex sajátértékek esetén adja meg a valós általános megoldást is! Vizsgálja a fenti egyenlet $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzetének stabilitását! Milyen kapcsolat lehetséges az $\dot{y} = By$, (B valós, 2×2 méretű mátrix) és a fenti egyenlet között? Adott B mátrixhoz adjon meg eljárást az A meghatározására, amivel az $y(kh) = x(k)$, $(k = 0, 1, 2, ...)$ teljesül. A kapott eredményeket számítógép segítségével illusztrálja!

****

A hallgatók maximum két fős csoportokban dolgozzanak. Minden feladat 20 pontot ér minden, a kidolgozásban résztvevő hallgatónak. A csoportokat úgy célszerű kialakítani, hogy a számítógéphez való hozzáférés megnyugtatóan biztosítva legyen. Valamennyi feladat matematikai és számítástechnikai részből áll, s mindegyikük vagy a mechanikai/biológiai modellalkotás, vagy pedig a számítógépes hiba-analízis szempontjából jól interpretálható és érdekes tulajdonságokkal rendelkezik. A feladatok kiosztása a harmadik héten történik. Olvassák el az összes feladatot, gondolják át is őket, amennyire az időből telik, és alakítsák is ki a csoportokat! Azt kérem, hogy a harmadik hétre alakuljon ki ez a beosztás! Beadási határidő: 2014. november 12.

Habár a feladatok (legalábbis a "minimális" megoldás szintjén) nem nehezek, nem elvárás, hogy azokat teljesen egyedül oldják meg. Kívánom tehát (s amennyire méltányos, menet közben segítem is) a félévközi feladatok sikeres megoldását – jó kedvet és jó munkát is hozzá!

Gyurkovics Éva