MATEMATIKA FELADATOK AZ ÖTÖDIK SZEMESZTERBEN

Differenciálegyenletek és numerikus módszereik BMETE 93AX11

Matematika Intézet Gépészkari fejlesztőmérnök szakirány *2013. szeptember 23.*

1.) Vizsgálja az $\dot{x}= t - x^2$ egyenletet! a.) Vázolja az irámezőt kézzel és számítógéppel egyaránt! b.) Legyen $t_0 \geq 0,\ x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mutassa meg, hogy az $\dot{x}= t - x^2$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték feladatnak létezik egyetlen lokális megoldása, és az folytatható a $[t_0, \infty)$ intervallumra! c.) Mutassa meg, hogy $t_0 = 0,\ x_0 = 0$ esetén a megoldás szogorúan monoton növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon! d.) Alkalmazza az explicit Euler módszert a $t_0 = 0,\ x_0 = 0$ értékeknek megfelelő kezdetiérték feladat megoldására különböző rögzített h lépésközzel különböző intervallumokon! Mutassa ki, hogy bármilyen kicsinynek is választja a $h > 0$ lépésközt, az $x(0) = 0$ kezdetiérték–probléma numerikus megoldásával (egyre nagyobb $t > 0$ idő esetén) mindig baj lesz! Mi ennek az oka?

2.) Vizsgálja az $\dot{p}= p^2 - 2p - 1,\ p(t_1) = g$ kezdetiérték feladat megoldását a $[0, t_1]$ intervallumon a ”$g \geq 0$” érték függvényében! Számítsa ki a pontos megoldást, és vázolja a megoldásgörbéket kézzel, majd számítógéppel! Számítógéppel kisérletezzen különböző g és t_1 értékekkel! Mit lehet sejteni a megoldásgörbék viselkedéséről, ha $t_1 \to \infty$? Igazolja a sejtését a pontos megoldás alapján! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát a pontos megoldás ismeretében!

3.) Vizsgálja az $\dot{x}= y + xf(r), \dot{y}= -x + yf(r)$ egyenletrendszert, ahol $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, és (első eset) $f(r) = -r^2$ illetve (második eset) $f(r) = (2 - r)(r - 1)^2$ (és $r \geq 0$)! Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Használja az explicit Euler módszert és az implicit Euler módszert egyaránt! Értelmezze a kapott geometriai különbözőségeket! Néhány kezdeti értékre számítsa ki a numerikus megoldást megadott pontossággal! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

4.) Vizsgálja az $\dot{x}= y + hxf(r),\ \dot{y}= -x + hyf(r)$ egyenletrendszert a h paraméter $h = 0,\ 1$ és -1 értékeire, ahol $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $f(r) = -r^2$ (és $r \geq 0$)! Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Használja az explicit Euler módszert és az implicit Euler módszert egyaránt! Értelmezze a kapott geometriai különbözőségeket! Néhány kezdeti értékre számítsa ki a numerikus megoldást megadott pontossággal! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

5.) A sajátértékek (valós részei) előjelének függvényében adja meg az $\dot{x}= Ax$ síkbeli egyenlet (tehát amikor A valós, 2×2 méretű mátrix, x pedig kételemű oszlopvektor) $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzetének összes lehetséges típusát. Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Használja az explicit Euler módszert és az implicit Euler módszert egyaránt! Megmarad–e az egyensúlyi helyzet típusa, ha a h lépésközt növeli? Mi a helyzet az $X = x + h(f(x) + f(X))/2$ másodrendű diszkretizációs módszer esetében?

6.) (Zombi-járványkitörés.) Tekintsük az alábbi modellt!

$$
\begin{aligned}
H'(t) &= -\beta H(t)Z(t),\\
Z'(t) &= \beta H(t)Z(t) + \zeta R(t) - \alpha H(t)Z(t),\\
R'(t) &= \alpha H(t)Z(t) - \zeta R(t),
\end{aligned}
$$

ahol $H(T)$, $Z(t)$ és $R(t)$ rendre az emberek, a zombik és az "eltávolított" zombik számát jelöli a t időpillanatban, az α, β, ζ pedig pozitív konstansok. Mutassa meg, hogy a pozitív térnyolcad pozitívan invariáns (ha $H(0) \geq 0$, $Z(0) \geq 0$ és $R(0) \geq 0$, akkor ezek az egyenlőtlenségek minden $t \geq 0$-ra teljesülnek)! Tud-e (a pozitív térnyolcadon belül) további pozitívan invariáns halmazokat mutatni? Határozza meg az egyensúlyi helyzeteket, és vizsgálja azok stabilitási tulajdonságait! Számítógép felhasználásával számítsa ki és ábrázolja a $H(0) = 500$, $Z(0) = 10$ és $R(0) = 0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldás numerikus közelítését, ha $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.01$, $\zeta = 0.02$. Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

7.) Vizsgálja az (első eset) $\dot{x}= x(8-4x-y)$, $\dot{y}= y(3-3x-y)$ valamint a (második eset) $\dot{x}= x(4-2x-2y)$, $\dot{y}= y(9-6x-3y)$ és a (harmadik eset) $\dot{x}= x(4-2x-y)$, $\dot{y}= y(9-3x-3y)$ egyenletrendszert! Határozza meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását linearizálással! Interpretálja a feladatot, mint két növényevő faj együttélésére vonatkozó táplálék–korlátos biológiai modellt! (A feladatban mindvégig feltesszük, hogy $x, y \geq 0$.) Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Néhány kezdeti értékre számítsa ki a numerikus megoldást megadott pontossággal! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

8.) Vizsgálja az (első eset) $\dot{x}= x(1-2x-y)$, $\dot{y}= y(-2+6x)$ valamint a (második eset) $\dot{x}= x(1-y)$, $\dot{y}= y(2x-4)$ egyenletrendszert! Határozza meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását linearizálással! Interpretálja a feladatot, mint egy ragadozó és egy növényevő faj együttélésére vonatkozó biológiai modellt! (A feladatban mindvégig feltesszük, hogy $x, y \geq 0$.) Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Néhány kezdeti értékre számítsa ki a numerikus megoldást megadott pontossággal! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

9.) Vizsgálja az (első eset) $\ddot{x} + \sin(x) = 0$ valamint a (második eset) $\ddot{x} + \dot{x}/10 + \sin(x) = 0$ egyenletet! Határozza meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását linearizálással! Az első esetben vizsgálja a trajektóriák viselkedését a $H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q$ függvény segítségével is, ahol $q = x$, $p = \dot{x}$. Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Vizsgálja az $\ddot{x} + \dot{x}/10 + \sin(x) = \cos(t)$ egyenletet is, ez utóbbit már csak számítógéppel!

10.) Vizsgálja az $\dot{x}= 2x(y-x)$, $\dot{y}= y(3y-4x)$ egyenletrendszert! Megállapítható-e az egyensúlyi helyzet stabilitási tulajdonsága linearizálással? Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Számítsa ki az alábbi kezdeti feltételekhez tartozó megoldásokat: a.) $(x_0, 0)$; b.) $(0, y_0)$; c.) $(x_0, 2x_0)$. Állapítsa meg, hogy az (x, y) sík mely tartományain lesz $t \to x(t)$ szigorúan monoton! Ezen tartományokra vonatkozóan írja fel az un. "pályagörbék egyenletét", és oldja meg! Vonja le a következtetést az egyensúlyi helyzet stabilitásáról! Néhány kezdeti értékre számítsa ki a numerikus megoldást megadott pontossággal! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

11.) Vizsgálja az $\dot{x}= x^2 - 5xy + y^2$, $\dot{y}= x^2 - 2xy - 2y^2$ egyenletrendszer stabilitási tulajdonságait! Megállapítható-e az egyensúlyi helyzet stabilitási tulajdonsága linearizálással? Vázolja a fázisportrét kézzel és számítógéppel egyaránt! Számítsa ki az $(x(0), y(0)) = (a, a)$ kezdeti feltételhez tartozó megoldást! Vonja le a következtetést az egyensúlyi helyzet stabilitásáról! Adjon meg minél bővebb olyan tartományt, hogy az onnan induló trajektóriák $t \to \infty$ esetén az origóhoz tartsanak! Néhány kezdeti értékre számítsa ki a numerikus megoldást megadott pontossággal! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

12.) Vizsgálja az $\ddot{y} + h(y)\dot{y} + g(y) = 0$ un. Liénard egyenlet stabilitási tulajdonságait, ahol $h, g \in C^1(\mathbb{R})$, $h(y) > 0$, $yg(y) > 0$, $\forall\ y \neq 0$-ra és $G(y) := \int_0^y g(s)ds \to \infty$, ha $|y| \to \infty$! Írja át elsőrendű egyenletrendszerré és próbálkozzonaz $x \to V(x) := G(x_1) + 1/2x_2^2$ Lyapunov függvénnyel! Mutassa meg, hogy az eredmények alkalmazhatók az $\ddot{y} + \dot{y} + y^3 = 0$ rendszerre! Számítógép segítségével vázolja az utóbbi egyenlet trajektóriáit néhány kezdőpont mellett! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

13.) Vizsgálja az $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ egyenlet stabilitási tulajdonságait linearizálással is, és Lyapunov tétel segítségével is, ha $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ és $f_1(x_1, x_2) = -2x_1 - x_1^3 + x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Próbálkozzon a $V(\underline{x}) = \left\|\underline{f}(\underline{x})\right\|^2$ függvénnyel! Számítógép segítségével vázolja a V függvény szintvonalait, valamint a fenti egyenletrendszer néhány trajektóriáját! Néhány kezdeti értékre számítsa ki a numerikus megoldást megadott pontossággal! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

14.) Vizsgálja az

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} - \frac{x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}$$

egyenlet stabilitási tulajdonságait a Lyapunov tétel segítségével a $V(x) = x_2^2 + \frac{x_1^2}{1+x_1^2}$ függvény felhasználásával! Ábrázolja a V függvény $V(x) = c$ típusú szintvonalait, és numerikusan számítsa ki és ábrázolja a fenti egyenletrendszer néhány kezdeti feltétel melletti trajektóriáját! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

15.) Vizsgálja az $m\dot{v} = -mg + bv^2$, $v(0) = 0$ "szabadesés közegellenállással a levegőben" feladatot! Mennyi idő alatt zuhan a test a földre h magasságból? Mi történik a $b \to 0^+$ esetben? Ha ez megvan, térjen át az $m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + kx = 0$ feladat számítógépes vizsgálatára! Néhány kezdeti értékre számítsa ki a numerikus megoldást megadott pontossággal! Hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

16.) Vizsgálja a konstans magasságban történő repülés feladatát az alábbi modell alapján!

$$\dot{v} = a_0 - a_1 v^2 - a_2 \frac{1}{v^2},$$

ahol

$$\begin{array}{lllll} a_0 = \frac{F}{m}, & a_1 = \frac{\varrho S c_{W_0}}{2m}, & a_2 = \frac{1kG^2}{m\varrho S}, & F = F_0\varrho, & F_0 = 1.5 \cdot 10^5 \ \frac{m^4}{s^2} \\ c_{W_0} = 0.02, & G = 2 \cdot 10^5 \ N, & g = 9.81 \ \frac{m}{s^2}, & k = 0.2, & S = 50 \ m^2 \\ \varrho = \varrho_0 e^{-\beta h}, & \beta = 1.2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{m}, & \varrho_0 = 1.225 \ \frac{kg}{m^3}, & h = 2 \cdot 10^3 m & \end{array}.$$

Vázolja az irámezőt kézzel és számítógéppel egyaránt! Határozza meg az egyensúlyi helyzeteket és azok stabilitási tulajdonságait. Milyen határok között változik a (reális) repülési sebesség? Numerikusan számítsa ki és ábrázolja a fenti egyenletrendszer néhány kezdeti feltétel melletti trajektóriáját! A trajektóriák számítógépes ábrázolásánál hasonlítsa össze az Ön által alkalmazott számítógépes programban rendelkezésre álló (legalább 2) különböző módszer hatékonyságát az előírt pontosság eléréhez szükséges függvénykiszámítások száma alapján!

17.) Vizsgálja az $\ddot{x} - \alpha(1-x^2)\,\dot{x} + x = 0$ ún. Vander Pol-féle differenciálegyenletet! Az $\alpha = 1$ paraméter mellett vázolja a trajektóriák menetét kézzel és számítógéppel egyaránt! Számítógéppel rajzolja fel az $x(0) = 1$ és $\dot{x}\,(0) = 1$ kezdetiértékhez tartozó megoldásgörbéket a $[0, 40]$ intervallumon és $\alpha = 1$ és $\alpha = 10$ esetén! Hasonlítsa össze a MATLAB ode23, de45, valamint az ode23s és ode45s munkaigényét a fenti kezdetiértékek és az α paraméter $\alpha = 1,\ 10,\ 100,\ 1000$ értékei mellett!

18.) Egykarú, rugalmas csatlakozású robotkar mozgását leíró differenciálegyenlet:

$$\begin{aligned} J_L\,\ddot{q}_1 + K(q_1 - q_2) + Mgl\sin(q_1) &= 0, \\ J_R\,\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) &= u. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $q_1 = q_d$, $\dot{q}_1 = 0$ a beállítandó munkapont. Vezesse be a

$$z_1 = q_1 - q_d, \ \ z_2 = \dot{q}_1, \ \ z_3 = q_2 - p_d, \ \ z_4 = \dot{q}_2, \ \ v = u - u_d$$

új koordinátákat, és írja fel azt a $\dot{\underline{z}}= \underline{f}(\underline{z}, \underline{v})$ elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert, amely a kiindulási egyenletrendszerrel ekvivalens! a.) Hogyan kell megválasztani a p_d és u_d értékeket, hogy a $z(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$, az új egyenlet egyensúlyi megoldása legyen? b.) Határozza meg a d_1, d_2, d_3, d_4, paraméterek értékét a μ függvényében úgy, hogy $p_4(\lambda) := \lambda^4 - d_4\lambda^3 - d_3\lambda^2 - d_2\lambda - d_1 \equiv (z+\mu)^4$ teljesüljön! Az $a = \frac{Mgl}{J_L}$, $b = \frac{K}{J_L}$, $c = \frac{K}{J_R}$, $d = \frac{1}{J_R}$ jelölések mellett alkalmazza a

$$v = \kappa(z) = \frac{1}{bd}\left[d_1 z_1 + d_2 z_2 + d_3(-a(\sin(z_1+q_d) - \sin q_d) - b(z_1 - z_3))\right.$$

$$\left. - d_4((a\cos(z_1+q_d)+b)z_2 - bz_4) - L_y^4(\varphi(z))\right]$$

visszacsatolást, ahol $\varphi(z) = z_1$ és

$$L_y^4(\varphi(z)) = az_2^2 \sin(z_1+q_d) + (a\cos(z_1+q_d)+b)\left[a(\sin(z_1+q_d) - \sin q_d) + b(z_1-z_3)\right] + bc(z_1-z_3).$$

Írjon számítógépes programot, amely különböző μ paraméterek mellett kiszámítja a visszacsatolt zárt rendszer közelítő megoldását az alábbi adatok esetén:

$$\begin{aligned} M &= 1\,\mathrm{kg};\ l = 1\,\mathrm{m};\ K = 30;\ J_R = 0,1\,\mathrm{kgm}^2;\ J_L = 0,4\,\mathrm{kgm}^2;\ q_d = 1,2 \\ z_1(0) &= 0,1;\ z_2(0) = z_3(0) = z_4(0) = 0 \quad (\mu = 1 \text{ és } \mu = 10) \\ z_1(0) &= 2;\ z_2(0) = 0,9;\ z_3(0) = 0,3;\ z_4(0) = 0,1 \quad (\mu = 10). \end{aligned}$$

19.) Tekintse a 18.) feladatot azzal a különbséggel, hogy a számítógépes szimulációban a v visszacsatolás helyett un. mintavételezett vezérlést használunk: a $[0,T]$ intervallumon: tekintjük a $t_i = i\tau$ felosztást és az i-dik intervallumon $v(t) = \kappa(z(t_i))$, $t \in [i\tau, (i+1)\tau)$ $(i = 0,1,...,N)$ - konstans - vezérlést alkalmazzuk. A szimulációnál használja az előző feladatban megadott adatokat, de csak $\mu = 10$-re számolja, és vegye $\tau = 0,01$; $\tau = 0,045$; $\tau = 0,05$ értékeket $T = 2$ mellett!

20.) Állítsa elő az $x(k+1) = Ax(k)$, $(k = 0,1,2,...)$ síkbeli differenciaegyenlet (tehát amikor A valós, 2×2 méretű mátrix, x pedig kételemű oszlopvektor) általános megoldását az mátrix sajátértékei és sajátvektorai segítségével! Komplex sajátértékek esetén adja meg a valós általános megoldást is! Vizsgálja a fenti egyenlet $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzetének stabilitását! Milyen kapcsolat lehetséges az $\dot{y}= By$, (B valós, 2×2 méretű mátrix) és a fenti egyenlet között? Adott B mátrixhoz adjon meg eljárást az A meghatározására, amivel az $y(kh) = x(k)$, $(k = 0,1,2,...)$ teljesül. A kapott eredményeket számítógép segítségével illusztrálja!

****

A hallgatók maximum két fős csoportokban dolgozzanak. Minden feladat maximum 20 pontot ér minden, a kidolgozásban résztvevő hallgatónak. A csoportokat úgy célszerű kialakítani, hogy a számítógéphez való hozzáférés megnyugtatóan biztosítva legyen. Valamennyi feladat matematikai és számítástechnikai részből áll, s mindegyikük vagy a mechanikai/biológiai modellalkotás, vagy pedig a számítógépes hibaanalízis szempontjából jól interpretálható és érdekes tulajdonságokkal rendelkezik. A feladatok kiosztása a harmadik héten történik. Olvassák el az összes feladatot, gondolják át is őket, amennyire az időből telik, és alakítsák is ki a csoportokat! Azt kérem, hogy a harmadik hétre alakuljon ki ez a beosztás!

Beadási határidő: 2013. november 18.

Habár a feladatok (legalábbis a "minimális" megoldás szintjén) nem nehezek, nem elvárás, hogy azokat teljesen egyedül oldják meg. Kívánom tehát (s amennyire méltányos, menet közben segítem is) a félévközi feladatok sikeres megoldását – jó kedvet és jó munkát is hozzá!

Gyurkovics Éva