Modell feladat (logisztikus diff. egy.)

$$y' = a\cdot y(1-by) \qquad y(0)=y_0$$

Megoldása: (Hf. oldjuk meg a fenti KÉF-t!)

$$y(t) = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{1-by_0}{(1-by_0)+by_0 e^{at}}\right)$$

Spec: $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{20}$, $y_0=1$ -re

$$y(t) = 20\left(1-\frac{\frac{19}{20}}{\frac{19}{20}+\frac{1}{20}e^{\frac{1}{4}t}}\right) = 20\left(1-\frac{19}{19+e^{t/4}}\right)$$

(1.) Számoljuk a numerikus megoldást az alábbi programokkal:

gyeuler1	$h=1$; $h=0{,}5$; $h=0{,}0021$; $h=0{,}00092$
gyrk41	$h=1$; $h=0{,}5$; $h=2$; $h=1{,}6$

intervallum: $[0,20]$, kezd. ért. $y_0=1$

Készítsünk táblázatot, amelybe a lépéshossz mellett feljegyezzük a globális hiba abszé-nek max-át, fgv-kiértékelések számát (par).
Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

1.) Egy módszeren belül hogyan változott a hiba a lépéshossz felezésekor?

2.) Azonos lépéshossz mellett, milyen javulás tapasztalható e_n-ben R-K alkalmazásával az expl. E-hez képest?

3.) Mérjük a hatékonyságot

$$\frac{e_n^{EE}(h_i)}{4\cdot e_n^{RK}(h_i)}$$

-vel!

ill. hasonlítsuk a kb. azonos pontosság eléréséhez szüks. fgv-kiértékelések számát

(2.) Számítsuk ki a fenti feladat numerikus megoldását az alábbi programokkal:

gyrk41	$h = 0,5$ lépésközzel
gyrkfp	$\varepsilon = 1,8 \cdot 10^{-6}$ pontossági követelménnyel

Hasonlítsuk össze az elért pontosságokat és a ráfordítást a fgv kiértékelések számával mérve!
Hasonlítsuk össze a felosztásokban szereplő részintervallumok számát is!

Tesztegyenlet:

$$y' = \lambda y \;,\quad y(0) = 1 \qquad \text{pontos mo: } y(t) = e^{\lambda t}$$

(3.) Alkalmazzuk erre a feladatra a $[0, 10]$ intervallumon $\lambda = -5$ és $\lambda = -10$ esetén az alábbi programokat!

gyeulexp | $\lambda = -5$-höz $h = 0.25$, $h = 0.39$, $h = 0,41$
$\lambda = -10$-hez $h = 0.1$, $h = 0.19$, $h = 0.202$

ill

gyimpeulexp | $\lambda = -5$-höz: $h = 0.1$, $h = 0.5$, $h = 2.1$
$\lambda = -10$-hez: $h = 0,3$, $h = 1$

és

gyrkexp | $\lambda = -5$ höz: $h = 0.25$, $h = 0.54$, $h = 0.57$
$\lambda = -10$-hez: $h = 0.25$, $h = 0.27$, $h = 0.28$

lépésközökkel.
1.) Hogyan viselkednek a hibák?
2.) Mi a magyarázat?

Stiffség jelentősége:

$$y' = \lambda(y - \sin t) + \cos t \qquad y(t_0) = y_0$$

pontos megoldás: $y(t) = (y(t_0) - \sin t_0)e^{\lambda(t - t_0)} + \sin t$

(4.) Futtassuk le az iránymező kirajzoltatására gystiffirmez programot! $\lambda = -0.5$, $\lambda = -1$, $\lambda = -5$, $\lambda = -10$ értékekre! (3 db "enter" a rajz közben)

Mi jellemző az iránymező ill. a pontos megoldások változására?

(5.) Futtassuk a fenti egyenletre az alábbi programokat:

[0,30] intervallum, $y_0 = 1$ kezdőérték

gyeulsin | $\lambda = -5$-höz: $h = 0.2$, $h = 0.39$, $h = 0.41$

$\lambda = -10$-hez: $h = 0.1$, $h = 0.198$, $h = 0.202$

gyimpeul | $\lambda = -5$-höz: $h = 0.2$, $h = 0.5$, $h = 1$

$\lambda = -10$-hez: $h = 0.1$, $h = 0.25$, $h = 0.5$, $h = 1$

gyrk4stsin | $\lambda = -5$-höz: $h = 0.2$, $h = 0.54$, $h = 0.57$

$\lambda = -10$-hez: $h = 0.1$, $h = 0.27$, $h = 0.28$

Stiff egyenletrendszer

$$\dot{y}_1 = -501 y_1 + 500 y_2 \qquad y_1(0) = 1$$
$$\dot{y}_2 = 500 y_1 - 501 y_2 \qquad y_2(0) = 0$$

Pontos megoldás: $y_1(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{-1001t}\right)$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-1001t}\right)$$

(6.) Futtassuk le erre az egyenletre az alábbi programokat a [0, 5] intervallumon

gyrkfpst | $\varepsilon = 1.e-3$, $\varepsilon = 1.e-4$

gyode23sst | $\varepsilon = 1.e-3$ $\varepsilon = 1.e-4$

Hasonlítsuk össze a megoldások költségét a fgv. kiértékelések számával (pár) mérve!

Hasonlítsuk össze az elért pontosságot is!