Optimalitás és stabilitás kapcsolata. Lineáris-kvadratikus feladatok (folytonos idejű eset)

11. előadás

2012. 11. 19.

A rendszer:

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

ahol $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, és $f(0,0) = 0$.

A megengedett irányítások $\Delta(0,\infty)$ *halmaza:*

$$\Delta(0,\infty) = \{u(.) : \ u(.) \text{ mérhető és } u(t) \in \mathcal{U}, \ 0 \le t, \ \text{ és } \forall x_0\text{-ra } \xi(t) = x(t;0,x_0,u(.)) \to 0, \text{ha } t \to \infty\}$$

A célfüggvény:

$$J(x_0,u(.)) = \int_0^\infty f_0(\xi(t),u(t))dt,$$

ahol $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, $f_0(x,u) \ge 0$ $\forall(x,u)$-ra, és $f(0,0) = 0$.

Legyen a $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, $V(0) = 0$. Jelölést:

$$\dot{V}(x,u) = V_x'(x) f(x,u).$$

Tétel

Tegyük fel, hogy

$$\dot{V}(x,u) + f_0(x,u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

és a $(\xi^*(.), u^*(.))$ megengedett folyamatra

$$\dot{V}(\xi^*(t), u^*(t)) + f_0(\xi^*(t), u^*(t)) = 0 \tag{3}$$

majdnem minden $t \geq 0$-ra. Ekkor

$$V(x_0) = J(x_0, u^*(.)) = \min_{u \in \Delta(0,\infty)} J(x_0, u(.))$$

az optimális költség, és $u^*(.)$ optimális vezérlés.

Bizonyítás. a.) Legyen $v \in \Delta(0,\infty)$ tetszőleges, $\xi_v(.)$ a megfelelő trajektória. Ekkor

$$\frac{d}{dt}V(\xi_v(t)) = \dot{V}(\xi_v(t), v(t)) \geq -f_0(\xi_v(t), v(t)).$$

Az egyenlőtlenséget integrálva, majd rendezve azt kapjuk, hogy

$$V(x_0) \leq V(\xi_v(T)) + \int_0^T f_0(\xi_v(t), v(t))dt.$$

Mivel $v \in \Delta(0,\infty) \;\Rightarrow\; \lim_{T\to\infty} \xi_v(T) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{T\to\infty} V(\xi_v(T)) = 0$. Másrészt

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f_0(\xi_v(t), v(t))dt = J(x_0, v(.)),$$

ezért $V(x_0) \leq J(x_0, v(.))$ minden $v \in \Delta(0,\infty)$ és $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén.

b.) Alkalmazzuk ugyanezt a technikát $(\xi^*(.), u^*(.))$-ra! Ekkor

$$V(x_0) = V(\xi^*(T)) + \int_0^T f_0(\xi^*(t), u^*(t))dt,$$

amiből $V(x_0) = J(x_0, u^*(.))$ egyenlőséghez jutunk, ha itt is figyelembe vesszük, hogy $u^* \in \Delta(0, \infty)$ miatt $\xi^*(T) \to 0$, ha $T \to \infty$.

c.) Ebből következik, hogy

$$V(x_0) = J(x_0, u^*(.)) \leq J(x_0, v(.)) \quad \forall v \in \Delta(0, \infty)\text{-re},$$

ami megfelel a tételbeli állításnak. $\square$

Következmény

Tegyük fel, hogy $k : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ *olyan, hogy*

$$\dot{V}(x, k(x)) + f_0(x, k(x)) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \dot{V}(x, u) + f_0(x, u) \right\} = 0 \qquad (4)$$

és a $(\xi^*(.), u^*(.))$ *folyamat, amit a* $k(.)$ *visszacsatolás definiál, megengedett (vagyis* $u^*(.) \in \Delta(0, \infty)$*).*

Ekkor $V(x_0)$ *az optimális célfüggvényérték, és* $u^*(.)$ *az optimális irányítás.*

Vegyük észre, hogy (4) a következő alakú:

$$\boxed{V'_x(x) f(x, k(x)) + f_0(x, k(x)) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ V'_x(x) f(x, u) + f_0(x, u) \right\} = 0.}$$

Ez a *stacionárius Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet* (SHJB) .

Tétel

Tegyük fel, hogy

1. $k : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ *lokálisan Lipschitz folytonos, és kielégíti a (SHJB) egyenletet egy* V *folytonosan differenciálható függvénnyel és* $f(0, k(0)) = 0$;
2. $V(x) > 0$, *ha* $x \neq 0$, $f_0(x, u) > 0$, *ha* $x \neq 0$ *(bármely u-ra), és* V *radiálisan nem korlátos.*

Ekkor $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$*-re az*

$$\dot{x} = f(x, k(x)), \quad x(0) = x_0 \tag{5}$$

kezdetiérték feladatnak létezik egyetlen $\xi^*(.)$ *megoldása a* $[0, \infty)$ *intervallumon,* $u^*(t) = k(\xi^*(t))$ *az optimális vezérlés,* $V(x_0)$ *az optimális célfüggvény érték, és* $x(t) \equiv 0$ *(5) globálisan aszimptotikusan stabilis megoldása* V *Ljapunov függvénnyel.*

Bizonyítás. k lokális Lipschitz folytonosságából következik, hogy létezik *lokális* megoldás, és az egyértelmű. Másrészt

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t), k(x(t))) = -f_0(x(t), k(x(t))) < 0,$$

ha $x(t) \neq 0$, amiből következik, hogy V kielégíti a Ljapunov II. tétel feltételeit. Eszerint

- a megoldás folytatható $[0, \infty)$-ig,
- $x(t) \equiv 0$ aszimptotikusan stabilis,
- $\xi^*(t) \to 0$, ha $t \to \infty$.

Ebből már következik, hogy $u^*(.)$ megengedett. Így az optimalitásra vonatkozó állítás következik a fentiekből. $\square$

A rendszer:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0 \qquad (6)$$

A megengedett irányítások $\Delta(0,\infty)$ *halmaza:*

$$\Delta(0,\infty) = \{u(.) : u(.) \text{ mérhető és } u(t) \in \mathbf{R}^m, \quad 0 \le t, \quad \text{és}$$
$$\forall x_0\text{-ra } \xi(t) = x(t; 0, x_0, u(.)) \to 0, \text{ ha } t \to \infty\}$$

A célfüggvény:

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty \left\{ \xi(t)^T Q \xi(t) + u(t)^T R u(t) \right\} dt \qquad (7)$$

ahol $\xi(t) = x(t; 0, x_0, u)$ az (6) $u(.)$ melletti megoldása.

Feltétel: Q és R szimmetrikus, Q pozitív szemidefinit, R pozitív definit mátrix.

Emlékeztető: Az

$$\dot{x} = Ax$$

differenciálegyenlet rendszer $x(t) \equiv 0$ (és ezzel együtt bármely más) megoldása aszimptotikusan stabilis, $\Leftrightarrow$ ha az A mátrix minden $\lambda_i(A)$ sajátértékére

$$Re(\lambda_i(A)) < 0.$$

Az ilyen A mátrix elnevezése: *stabilis (vagy Hurwitz) mátrix*.

Feltétel (A)

Az (A, B) pár stabilizálható, vagyis létezik olyan $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, hogy az $(A + BD)$ mátrix stabilis.

A lineáris algebrából ismert tény:

Ha Q szimmetrikus és pozitív szemidefinit mátrix, akkor megadható egy olyan $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ mátrix, hogy

$$Q = C^T C,$$

ahol $p = rang\ Q$.

Feltétel (B)

Az (A, C) pár teljesen megfigyelhető, ha $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ olyan mátrix, amelyre $Q = C^T C$, és $rang\ Q = rang\ C = p$.

Tétel

Tegyük fel, hogy az (6), (7) feladatban szereplő mátrixokra a megfogalmazásban szereplő kikötéseken túlmenően az (A) és (B) Feltétel is teljesül.

Ekkor az

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \tag{8}$$

(folytonos idejű) algebrai Riccati-egyenletnek létezik egyetlen pozitív definit szimmetrikus P megoldása.

Az (6), (7) feladatnak van sima megoldása,

$$V(x) = x^T Px \tag{9}$$

a Bellman függvény, továbbá

Tétel (folytatás)

$$k(x) = -R^{-1}B^T P x \tag{10}$$

függvénnyel meghatározott, x_0-ból induló visszacsatolt vezérlés az egyértelműen meghatározott optimális vezérlés.

Az eredményül kapott

$$\dot{x}(t) = (A - BK)\,x(t) \tag{11}$$

visszacsatolt rendszer a $K := R^{-1}B^T P$ mátrixszal aszimptotikusan stabilis.

Újdonság:

Az algebrai Riccati egyenlet pozitív definit megoldásának *létezése*, *unicitása*, továbbá a hozzá tartozó K *stabilizáló tulajdonsága*.

Lemma

Tegyük fel, hogy a szimmetrikus és pozitív szemidefinit $Q = C^T C$ mátrixra teljesül a (B) Feltétel.

Ekkor az

$$A^T P + PA = -Q \tag{12}$$

úgynevezett algebrai Ljapunov egyenlet P szimmetrikus megoldása akkor és csak akkor pozitív definit, ha az A stabilis mátrix.

Ha A stabilis mátrix, akkor (12) P megoldása egyértelmű bármely szimmetrikus Q mátrix esetén.

Lemma

Legyenek az A, B, C, R mátrixok a korábbiakkal megegyező jelentésűek, miközben az $R > 0$, az (A, C) pár teljesen megfigyelhető, és tegyük fel, hogy a K, P, S mátrixok kielégítik az alábbi feltételeket:

1. *$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit mátrixok, valamint $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix;*
2. *fennáll az*

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(K^T RK + C^T C + S) \quad (13)$$

egyenlet.

Ekkor az $(A - BK)$ mátrix akkor és csak akkor stabilis mátrix, ha P pozitív definit és ez esetben P (13) egyenletnek egyértelmű megoldása.

Lemma

Tegyük fel, hogy az (A, C) pár teljesen megfigyelhető.

Ekkor az (8) algebrai Riccati-egyenlet bármely P megoldása invertálható.

Lemma

Tegyük fel, hogy az (A, C) pár teljesen megfigyelhető, P (8) algebrai Riccati-egyenlet szimmetrikus megoldása, és legyen $K = R^{-1}B^TP$.

Ekkor az $A - BK$ akkor és csak akkor stabilis mátrix, ha P pozitív definit.

Alap: Az algebrai Riccati egyenlet ekvivalens a következővel:

$$\begin{cases} K = R^{-1}B^TP, \\ (A - BK)^TP + P(A - BK) = -Q - K^TRK. \end{cases}$$

Kleinmann-féle iterációs algoritmus

0. lépés. Válasszuk meg a K_1 mátrixot úgy, hogy $A - BK_1$ stabilis mátrix legyen. (Az (A, B) pár stabilizálható $\Rightarrow$ ez lehetséges.)

i. lépés. Ha ismerünk egy K_i mátrixot, amelyre $A - BK_i$ stabilis mátrix, akkor keressük meg azt a P_i szimmetrikus mátrixot, amelyre

$$(A - BK_i)^T P_i + P_i(A - BK_i) = -Q - K_i^T RK_i, \qquad (14)$$

és definiáljuk a K_{i+1} mátrixot a

$$K_{i+1} = R^{-1}B^T P_i \qquad (15)$$

egyenlőséggel.

Ha az eljárás minden lépése végrehajtható, akkor az iteráció eredményeként a $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ és $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ mátrixsorozatot kapjuk.

Lemma

Tegyük fel, hogy teljesül az (A) és a (B) Feltétel.

Ekkor a Kleinmann iteráció jól definiált: a (14) egyenletrendszernek minden lépésben létezik egyetlen szimmetrikus megoldása, ami pozitív definit, és (15) egyenlőséggel definiált K_{i+1} olyan, hogy az $(A - BK_{i+1})$ stabilis mátrix.

Lemma

Tegyük fel, hogy teljesül az (A) és a (B) Feltétel.

Ekkor a tetszőleges olyan K_1 esetén, ami eleget tesz a 0. lépés követelményeinek, a $\{K_i\}$ és $\{P_i\}$ sorozatok konvergensek, mégpedig $K_i \to K$, $P_i \to P$, ha $i \to \infty$, ahol P pozitív definit, szimmetrikus, és eleget tesz (8) egyenletnek, az $(A - BK)$ pedig stabilis mátrix.