Vizsgakérdések – Algebra 1 – 2019/20 őszi félév (1.00 változat)

Algebrai stuktúrák (D) Algebrai struktúra általános definíciója. (D) Félcsoport, csoport, Abel-csoport, gyűrű, test, ferdetest, integritási tartomány. Példák.(D) Test additív és multiplikatív csoportja. (D) Test karakterisztikája.(B) Test karakterisztikája vagy nulla vagy prím. (D) Prímtestek. (B) Nulla karakterisztikájú test primtestje $\mathbb{Q}$, p karakterisztikájútest prímtestja $GF(p)$. Csoportaxiómák. Vele ekvivalanes axiómarendszerek. (B) Csoportban 1 db egységelem van és minden elemnek 1 db inverze.(B) Csoportban teljesül az egyszerűsítési szablály.(B) Csoportban egyértelműen megoldható egyenletek. (B) Csoportbeli szorzás tulajdonságai.

Konkrét csoportok (D) Diéder, kvaternió csoportok, $GL(n, k), SL(n, k)$, n-edfokú szimmetrikus csoport S_n.(D) Permutáció, mint leképezés, ezek szorzata, kétsoros és ciklikus írásmódja. (B) Minden permutáció egyértelműen bontható diszjunkt ciklusok szorzatára (a diszjunkt ciklusok felcserélhetők). (B) Szabályos n-szög szimmetria-csoportja D_{2n}. n-edik egységgyökök és p-hatvány egységgyökök csoportja.

Csoportok tulajdonságai (D) Csoport rendje, véges és végtelen csoport. Példák. (D) Elem rendje.(B) $a^N = 1 \leftrightarrow o(a)|N$. (B) $o(a^k) = n/(n, k)$. (B) Ha $o(a) = n$ akkor $o(a) = o(a^{-1})$. (B) Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak lkkt-e. (D) Részcsoport. (D) Részcsoport generátorrendszere. Ciklikus csoport. (B) Ciklikus csoport rendje, az őt generáló elem rendje. (D) csoporthomomorfizmus, csoportizomorfizmus, izomorf csoportok. (B) Minden n-edrenű ciklikus csoport izomorf egymással, minden végtelen ciklikus csoport izomorf $\mathbb{Z}$-vel. (B) Elem homomorf képének rendje osztója az elem rendjének, izomorfizmus megőrzi a rendet.(B) Ha $(o(a), k) = 1$, akkor $\langle a\rangle = \langle a^k\rangle$. (B) Ciklikus csoport minden részcsoportja és minden faktorcsoportja ciklikus.(B) n-edrendű ciklikus csoportban n minden d osztójára pontosan egy d-edrendű részcsoport van.

Komplexusok, mellékosztályok (D) Komplexusok, komplexusszorzat, inverz. (B) $|AB| \leq |A||B|$, $A \subseteq B \rightarrow A^{-1} \subseteq B^{-1}$, $A(BC) = (AB)C$.(B) Részcsoport jellemzése komplexusszorzattal. (B) Részcsoportokra: $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$. (D) Részcsoport mellékosztályai. (B) Két jobboldali (baloldali) mellékosztály vagy diszjunkt vagy egybeesik. Ezek uniója a csoport. (B) Lagrange-tétel.Példa: megfordítás nem igaz. (B) Mellékosztályok elemszáma egyenlő. (D) Részcsoport indexe. (D) Teljes jobboldali (baloldali) reprezentáns rendszer. (D) Részcsoport indexe. (B)A különböző bal-és jobboldali mellékosztályok száma megegyezik. Lagrange-tétel következményei: (B) elem rendje osztója a véges csoport rendjének, Euler-Fermat-tétel, kis Fermat-tétel. (B) Prímrendű csoport ciklikus és csak 2 részcsoportja van. (B) Ennek megfordítása. (B) Mellésztosztályok egyenlőségére feltétel.

Csoporthomomorfizmusok, normálosztók, izomorfimus-tételek (D) Homomorfizmus magja, képe. (D) Normálosztó fogalma. (B) Ekvivalensei. (B) Homomorfizmus magja normálosztó, képe részcsoport. Injektív, szürjektív, bijektív homomorfizmus jellemzése, maggal képpel. (D) Csoportendomorfizmus, csoportautomorfizmus, az $Aut(G)$ csoport. (B) Egy $x \in G$ elemmel való konjugálás automorfimus. (D) Belső automorfizmus. (B) Konjugáltság ekvivalencia-reláció. (D) Konjugáltosztály. (B) Osztályegyenlet. (B) Minden véges p-hatványrendű csoport centruma nemtrivi. (B) Abel csoport minden konjugáltosztálya egyelemű. (B) Két permutáció konjugáltságáról szóló tétel. (B) Normálosztó és részcsoport generátuma a szorzatuk. (B) Kétindexű részcsoport normálosztó. Példa részcsoportra, ami nem normálosztó. (D) Faktorcsoport. (B) Minden normálosztó alkalmas homomorfizmus magja.(B) Homomorfizmus-tétel. (B)$Gl(n, \mathbb{C})/Sl(n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$. (B) Noether-féle izmorfizmus-tételek I-II. (B) Létezik bijekció egy normálosztót tartalmazó részcsoportok és a faktorcsoport részcsoportjai között. Normálosztók normálosztóknak felelnek meg.

Szubnormálláncok (B) Normálosztóság nem tranzitív. (D) Szubnormálosztó, szubnormállánc, normállánc, kompozíciólánc, a lánc faktorai. (D) Izomorfia két szubnormállác között, szubnormállánc faktorai. (B) Kompozíciólánc nem feltételnül egyértelmű. (D) Egyszerű csoport. (B) Szubnormállác kompozíciólánc $\leftrightarrow$ ha faktorai egyszerűek. (B) Jordan-Hölder tétel. (T) Véges egyszerű csoportok osztályozása. (D) Karakterisztikus részcsoport. (B) Normálosztó karakterisztikus részcsoportja normálosztó.

(D) Feloldható csoport fogalma. (B) Véges csoport feloldható $\leftrightarrow$ ha van szubnormállánca, ahol minden faktor prímrendű. (T) Feit-Thompson tétel. (T) Burnside $p^a q^b$-tétel. (B) Egyszerű feloldható csoport prímrendű ciklikus. (B) Minden p-hatványredű csoport feloldható. (D) Kommutátor, kommutátorrészcsoport, kommutátorlánc. (B) Kommutátor részcsoport karakterisztikus, kommutátrolánc szemei normálosztók. Kommutátor részcsoport az a legkisebb normálosztó, amley szerinti faktor Abel. (B) G pontosan akkor feloldható, ha kommutátorlánca véges lépésben eléri 1-et. (B) Feloldható csoport részcsoportja és faktorcsoportja is feloldható. (D) Centrum, centralizátor, normalizátor. (B) Konjugáltosztály elemszáma a centralizátor indexe. (B) Egy részcsoport konjugáltjainak száma, a normalizátor indexe. $N_G(H)$ az a legnagyobb részcsoport, amiben H normálosztó. (B) p-hatványrendű csoportnak cenruma nemtrivi. (D) nilpotens csoport. (B) p-hatványredű csoport nilpotens. (B) Minden nilpotens csoport feloldható. Példa: nem minden feloldható csoport nilpotens. (B) $G/Z(G)$ nem lehet ciklikus, csak ha G Abel. (B) p^2 rednű csoport Abel.

Direkt szorzat (D) Csoportok 2-és többtényezős külső és belső direkt szorzata. Szemidirekt szorzat. (B) Szemidirekt szorzat jellemzése. (B) Külső és belső direkt szorzat izomorf. (B) "Diszjunkt" normálosztók centralizálják egymást. (B) Direkt szorzat elemének rendje. (B) Véges Abel-csoportok alaptétele.(B) Primér felbontási tétel. (B) Véges Abel-féle p-csoport maximális rendű ciklikus rszcsoportjához van direkt kiegészítő. (D)$\Omega_k(G), G^{p^k}$. (B) Egyértelműség bizonyítása.

Permutációcsoportok, csoporthatások (D) n-edfokú permutációcsoport.(D) S_n, A_n. (D) Permutáció inverziói. Páros és páratlan permutációk. (B) Szorzat paritása.(D) Permutáció reprezentáció(csoporthatás). (D) Előjel reprezentáció. (B) Képe C_2, magja A_n. (B) $|S_n : A_n| = 2$. (D) transzpozíció. (B) Minden permutáció transzpozíciók szorzata. (B) minden transzpozíció páratlan permutáció. (B) Páros hosszú ciklus páratlan, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. (B) S_n-et generálják a transzpozíciók, ha $n \geq 2$. (B) A_n-etgenerálják a 3-as ciklusok, ha $n \geq 3$. (D) Egy permutáció fixpontjai halmaza. (B) A_n egyszerű csoport, ha $n \geq 5$. (B) Cauchy-tétel. Példa: nem prím osztóra, nem feltétlen van olyan rendű elem a csoportban. (B) Cayley-tétel. (B) Tranzitív permutációcsoport (csoporthatás). (B) (Ált. Cayley) Ha $|G : H| = n$, akkor G-nek van n-edfokú tranzitív permutáció reprezentációja H jobboldali mellékosztályain, melynek magja $\cap x^{-1}Hx$. (D) Egy permutációcsoportban vagy csoprthatásnál a jegyhalmaz, a jegystabilizátor, orbit fogalma. (B) Orbit hossza= jegystabilizátor indexe. Speciális esetei akkor, ha G hat G-n (vagy G részcsoportjain) konjugálással. (D) Többjegystabilizátor. Példa: kocka szimmetria-csoportjának rendje.

Sylow-tételkör (D) p-csoport. (B) Véges csoport pontosan akkor p-csoport, ha rendje p-hatvány. (D) p-Sylow részcsoport fogalma. (B) Sylow-tételek:létezés, számuk, konjugáltság, minden p-részcsoport bennevan egy p-Sylowban. (B) p-hatványrendű elem nem normalizálhat p-Sylowot. (B) egy véges csoportban pontosan akkor van 1 db p-Sylow, ha az normálosztó. (B) Ha mindegyik Sylow normálosztó, akkor G Sylowjainak direkt szorzata. **Véges nilpotens csoportok további tulajdonságai**: (B) minden valódi részcsoport normalizátora bővebb a részcsoportnál. (B) minden maximális részcsoport normálosztó. Sylow-csoportok alkalmazása: kis rendű csoportok struktúrája. (B) pq-adrendű csoportok struktúrája.

Szabad csoportok, definiáló relációk (D) X halmaz által generált szabad csoport. (B) Szabad csoport generátorain adott minden lekeépezés egy csoportba kiterjed a szabad csoport homomorfizmusává.(Univerzális tulajdonság) (B) Minden n elem által generált csoport egy n elem által generált szabad csoport faktorcsoportjával izomorf. (D) Csoport megadása generátorokkal és definiáló relációkkal. (B) Dyck tétele. (B) Todd-Coxeter módszer egy részcsoport indexének kiszámítására.

Gyűrűk (D) Axiómák. Számolás gyűrűkben. (D) Kommutatív gyűrű.(D) Részgyűrű, ideál, egyoldali ideál. Egységelemes gyűrű. (D) Egyszerű gyűrű. (B) Mátrixalgebra egyszerű, de vannak benne egyoldali ideálok. (D) Ferdetest, test. Példa: Kvaterniótest. (B) Ferdetestnek nincs nemtrivi egyoldali ideálja.(B) Fordítva: ha egy gyűrűben nincs nemtrivi egyoldali ideál, akkor az vagy prímelemű zérógyűrű vagy ferdetest. (B) Egységelemes kommutatív gyűrű pontosan akkor egyszerű, ha test. Példa: (B) $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{C}$. Nullosztók. Integritási tartomány. Példák. (B) Ha R nullosztómentes, akkor $R[x]$ is az. (B)Wedderburn-tétel: minden véges ferdetest kommutatív. (B) Ferdetestben nincs nemtrivi nullosztó. (D) Egy halmaz által generált részgyűrű. (D) Egy halmaz által generált ideál. (D) Gyűrűhomomorfizmus, gyűrűizomorfizmus, izomorf gyűrűk. (D) Gyűrűhomomorfizmus magja, képe. (B) Gyűrűhomomorfizmus magja ideál, képe részgyűrű.(T) Homomorfizmustétel, izomorfizmus-tételek gyűrűkre. (T) Bijekció az ideált tartalmazó részgyűrűk és a faktorgyűrű részgyűrűi között, ahol ideáloknak ideálok felelnek meg. (B) Ideál szerinti faktorgyűrű. (B) Minden ideál alkalmas homomorfizmus magja. (T)(Dorroh-féle bővítés) Minden gyűrű ideálként beágyazható egységelemes gyűrűbe. (D) Integritási tartomány hányadosteste.(T) Minden integritási tartománynak van hányadosteste és ez izomorfia erejéig egyértelmű. Példa: $\mathbb{Z}$ és $k[x]$ hányadosteste.

Noether-gyűrűk, főideálgyűrűk, Euklideszi gyűrűk (D) Bal-(jobb) Noether-gyűrű. (B) R bal(jobb) Noether $\leftrightarrow$ R minden bal(jobb) ideálja végesen generált. (D) Kommutatív Noether-gyűrű. (B) R kommutatív gyűrű Noether $\leftrightarrow$ R minden ideálja végesen generált. (T)(Hilbert bázis tétele) Ha R Noether-gyűrű, akkor $R[x]$ is az. (D) Főideltartomány. (B) Minden főideáltartomány Noether. (B) $\mathbb{Z}, k[x]$ főideáltartomány, ha k test. (B) $\mathbb{Z}, k[x]$ ideáljai és faktorai. Példa:$k[x, y]$ nem főideáltartomány. (D) Euklideszi gyűrű. (B) Minden euklideszi gyűrű főideáltartomány. (D) Egyértelmű faktorizációs gyűrű.(UFD) (D) Oszthatóság, egység, asszociáltság,irreducibilis és prímelem integritási tartományban.(B) asszociáltság jellemzése oszthatósággal. (B)Oszthatóság, egység, asszociáltság, irreducibilitás jellemzése főideálokkal. (B) Integritási tartományban minden primelem irreducibilis. (B) Főideáltartományban minden irreducibilis elem prímelem. (és minden prím irred.) (B) Minden főideáltartomány UFD. (spec: minden euklideszi gyűrű UFD). (T) R UFD $\rightarrow$ $R[x]$ UFD. Köv: $k[x_1, \ldots, x_n]$ UFD. (D) Algebrai egész. (T) $\mathbb{Q}(\sqrt{t})$ algebrai egészei euklideszi gyűrű $\leftrightarrow$ $t = -1, -2, -3, -7, -11$. (D) Gauss-egészek gyűrűje. (B) Ez egy euklikdeszi gyűrű. (D) Maximális ideál. (B) Minden egységelemes gyűrűben van maximális ideál. (T) Zorn-lemma. (D) prímideál. (B) M maximális ideál egy kommutatív egységelemes R gyűrűben $\leftrightarrow$ R/M test. (B) P prímideál egy kommutatív egységelemes R gyűrűben $\leftrightarrow$ R/P nullosztómentes. (B) $\mathbb{Z}, k[x]$ maximális ideáljai és prímideáljai.(B) Minden maximális ideál prímideál, de fordítva nem igaz. (B) $k[x]/(p(x))$ test $\leftrightarrow$ $p(x)$ irreducibilis. (B) Ha $L = k[x]/(p(x))$ test, akkor $k \subseteq L$. (B) L bázisa és dimenziója. (B) L-ben $x + (p(x))$ gyöke $p(x)$-nek. (B) $L = GF(2)[x]/(x^2 + x + 1)$ 4 elemű test, bázisa, számolás benne. p-karakterisztikájú testben $(a + b)^p = a^p + b^p$.

Testbővítések (D) Testbővítés, résztest, prímtest. (B)Lehetséges prímtestek. (D) Testbővítés foka. (B) Fokokra vontakoó szorzástétel. (B) Ha $K \subseteq L$ véges testek és $|L : K| = n$, akkor $|L| = |K|^n$. (B) Véges test elemszáma mindig prímhatvány. (B) Véges test additív csoportja elemi Abel p-csoport. (B) Véges test multiplikatív csoportja ciklikus. (D) k test felett algebrai és transzcendens elemek, példák. (T) e transzcendens. (D) Egy k felett algebrai elem k feletti minimálpolinomja. (B) Egy α algebrai elem minimálpolinomja osztója minden olyan polinomnak, amlynek α gyöke. (B) A minimálpolinom egyértelműsége. (B) k felett algebrai elem minimálapolinomja $k[x]$-ben irreducibilis. (B) Egy k felett algebrai α elemet tartlamazó legszűkebb k-t tartalmazó $k(\alpha)$ test $k[x]/(p(x))$-szel izomorf, ahol $p(x)$ az elem minimálpolinomja, e test k feletti foka $deg(p(x))$. (B) Ha α, β egy $p(x) \in k[x]$ polinom két gyöke egy bővebb testben és $p(x)$ irreducibilis, akkor $k(\alpha) \simeq k(\beta)$ és $p(x)$ ezen elemek minimálpolinomjaihoz asszociált. (B) Ha α minimálpolinomja k felett n-edfokú, akkor $|K(\alpha) : K| = n$ és minden $k(\alpha)$ beli elem egyértleműen írható fel mint α legfeljebb $n-1$-edfokú k-beli együtthatós polinomja. (B) Ha α transzcendens k felett, akkor $k(\alpha) \simeq k(x)$, ahol $k(x)$ $k[x]$ racionális függvénytestje. (D) Testek K feletti izomorfizmusa. (B) α algebrai k felett $\leftrightarrow$ $|K(\alpha) : K| < \infty$. (B) k felett algebrai elemek testet alkotnak. (D) Algebrai testbővítés. (B) Minden véges fokú bővítés algebrai. (T) Vannak végtelenfokú algebrai bővítések. (D) Algebrailag zárt test. (D) Algebrai számok teste. (T) $\mathbb{A}$ $\mathbb{C}$-nek algebrailag zárt részteste. (D) Egy test algebrai lezártja. (T) Minden testnek van algebrai lezártja ez izomorfia erejéig egyértelmű. Példák. (D) Polinom felbontási testje.(B) Mindeni $k[x]$-beli polinomnak van felbontási teste és ez k-feletti izomorfia erejéig egyértelmű. (D) Normális bővítés. (T) Egy véges fokú bővítés pontosan akkor normális, ha egy polinom felbontási teste. (D) Galois-bővítés.(D) Testbővítés Galois-csoportja. (T) Galois-elmélet főtétele. (T) Kapcsolat a Galois-csoport rendje és a bővítés foka között. (D) Polinom Galois-csoportja. (T) Gyökképlet létezésének szükséges és elégsége feltétele.

Véges testek (B) Véges test elemszáma prímhatvány és minden p^n prímhatványhoz létezik ekkora véges test, és ez izomorfia erejéig egyértelmű.(B) Ez éppen $x^{p^n} - x$ polinom felbontási testje $GF(p)$ felett. (T) $GF(p^n)$ minden $k|n$-re tartalmaz egyetlen $GF(p^k)$-val izomorf résztestet. (D) Frobenius-automorfizmus. (B) $Aut(GF(p^n)) \simeq C_n$. (B)(Wedderburn) Minden véges ferdetest kommutatív.

Algebrák, modulusok (D) Ideálok összege, szorzata, hatványa, nilpotens elem, nilpotens ideál. (D) Idempotens elem, ortogonális idempotensek, primitív idempotensek. (T) Kapcsolat balideálok direkt összegŕe való felbontśsal. (D) Centrális idempotens, centrálisan primitív idempotensek. (T) Kapcsolat ideálok direkt összegére való felbontással. (D) Féligegyszerű gyűrű. (T) Wedderburn-Artin struktúratétel. (D) Modulusok (bal-és jobboldali). Részmodulus, faktormodulus, direkt összeg és szorzat modulusi, kompozíció lánc. Modulus-homomorfizmus, egyszrű (irreducibilis) modulus. Homomorfizmus-tétel, izomorfizmus-tételek, Jordan-Hölder-tétel modulusokra. Minden Abel-csoport $\mathbb{Z}$-modulus. (D) Teljesen reducibilis modulus. (B) Teljes reducibilitás ekvivalensei. (T) Véges dimenziós, féligegyszerű algebra felett minden végesen generált modulus teljesen reducibilis. (D) Csoportalgebra, (T) Maschke-tétel.

Kategóriák, funktorok (D) Kategoria, objektumok, morfizmusok, kovarians, kontravarians funktorok. Példák: csoportok, gyűrűk, modulusok kategóriája, Homfunkotorok.