VÉGES CSOPORTOK REPREZENTÁCIÓI: MONOMIALITÁSRÓL, BLOKKOKRÓL ÉS MÉLYSÉGRŐL
HABILITÁCIÓS TÉZISEK

HORVÁTH ERZSÉBET
BME TTK MATEMATIKA INTÉZET, ALGEBRA TANSZÉK
H-1111 BUDAPEST, MŰEGYETEM RKP. 3–9.
2016. SZEPT 29.

Bevezetés

A publikációimban szereplő szerteágazó témák közül hármat választottam ki a tézisfüzet számára: a monomialitást, a blokkelméletet és a mélységet. Ezek a véges csoportok reprezentációelméletéhez tartoznak. A véges csoportok reprezentációelméletével 1984 körül, a doktori dolgozatom kapcsán kezdtem el kutatásszerűen foglalkozni, melyet Corrádi Keresztély vezetésével írtam.

Ebben az időben Magyarországon még nem nagyon ismerték a szimbolikus számítási komputer algebrai szoftvereket. 1992-ben a Műegyetemen Joachim Neubüserrel (RWTH-Aachen), E. F. Robertsonnal (University of St Andrews), Andrea Carantival (Trento University), Wettl Ferenccel (BME Közlekedéskari Matematika Tsz.) valamint Recski Andrással (BME Villamoskari Matematika Tsz.) és a hozzájuk tartozó EUROMATH Laboratóriummal, Komputer Algebra Nyári iskolát szerveztünk, melynek keretében megismerkedtünk többek között a GAP programcsomaggal valamint a komputer algebra elméleti hátterével. A munkaállomásokkal felszerelt EUROMATH-laboratóriumban voltak a számítógépes gyakorlatok. Ez a gépi környezet akkoriban Magyarországon igen kivételes volt, mivel sokáig a munkaállomások embargó alatt álltak.

1993-ban DAAD ösztöndíjjal az RWTH-Aachen egyetemen GAP programokat írtam reprezetációelméleti kutatásaimhoz. Az RWTH-Aachen D Matematika Tanszéke akkor a GAP fejlesztési központja volt, Joachim Neubüser vezetésével. Ezen az egyetemen intezív kutatás folyt a moduláris reprezentációelemélet valamint annak komputeres vizsgálataiban is. Herbert Pahlings professzor is ezekben a témákban dolgozott, többször tartott előadásokat Budapesten is. A moduláris reprezentációelméleti kutatásoknak Magyarországon akkor még nem volt hagyománya. Bár az ELTE-n, Pelikán József speciálelőadásain el tudtam sajátítani ennek alapjait. Később rendszeresen szerveztünk olvasószemináriumokat a témakörben.
G. R. Robinson budapesti látogatása is nagy hatással volt e téma iránti érdeklődés felkeltésére. 1993-1996 "Using Computer Algebra" c. TEMPUS projektünk keretében, későbbi kutatási (OMFB, Tét, OTKA) projektekben további csoportelméleti és reprezetációelméleti kutatásokba kapcsolódtam be. E projektek vezetői magyar részről Babai László, Pálfy Péter Pál, Molnár Emil, Schmidt Tamás, Corrádi Keresztély, Rónyai Lajos, német partnerei Joachim Neubüser, Herbert Pahlings, Gerhard Hiss, Burkhard Külshammer és Christine Bessenrodt voltak. Jelenleg is résztveszek az "Algebra és algoritmusok" (témavezető: Rónyai Lajos) valamint a "Csoporthatások" (témvezető: Pyber László) c. OTKA projektek munkájában.

2000-ben Reprezetációelméleti Workshopot szerveztünk az Erdős Központ támogatásával a kutatási projektünk résztvetőivel együtt (Aachen, Jena, Magdeburg), valamint a reprezentációelmélet neves egyéniségeivel: itt volt G. D. James, R. Dipper, G. R. Robinson és J. Olsson is.

A tézisfüzet témái közül monomialitást már a doktori dolgozatomban is vizsgáltam. Később a szubnormális monomialitás, valamint a blokkok és a monomialitás kapcsolata került az érdeklődésem előterébe, Guan Aun How, valamint C. Bessenrodt munkáinak hatására. A Dade-sejtés számítógépes tanulmányozására Herbert Pahlings hívta fel a figyelmemet.

Nabila Mohammed Hassan társtémavezetőjeként a Dade-sejtéssel kezdtem foglalkozni. Ezzel kapcsolatban két publikáció született: az egyikben igazoltuk a Dade-sejtést a sporadikus egyszerű Higman-Sims csoportra, a másikban kapcsolatot bizonyítottunk a projektív Dade-sejtés és a csoport centrális bővítésére vontakozó közönséges sejtés között.

A további blokkelméleti cikkekben társszerzőim: Héthelyi László (BME), Thomas Breuer (Aachen), Burkhard Küshammer (Jena), John Murray (Maynooth) valamint Szabó Endre (Rényi Intézet).

Az utóbbi években az érdeklődésem a csoportok részcsoportjainak kombinatorikus valamint közönséges mélységének vizsgálata felé fordult. Ez a fogalom a von Neumann-algebrákban bevezetett mélységfogalomból eredeztethető. B. Külshammer, S. Burciu, L. Kadison és R. Boltje munkái nyomán fejlődött ki a téma. Külshammer néhány tanítványa (S. Danz, T. Fritzsche, C. Reiche) is publikált már ebben a kérdéskörben.

Héthelyi Lászlóval és doktoranduszommal, Petényi Franciskával, két mélységgel kapcsolatos cikket írtunk. Az egyik már megjelent, az $Sz(q)$ Suzuki-csoportokat, a másik (e tézisfüzetben nem szerepel) Petényi Franciska PhD dolgozatának részét képezi, a Ree $R(q)$ csoportosztályt vizsgálja.

A téziseket a megadott 10 cikk alapján készítettem. Az idézett tételek többnyire e cikkek eredményei, ellenkező esetben ezt külön jelöljük. A közös cikkek esetén az én hozzájárulásom a cikkekhez körülbelül a rám eső arányos rész. A tézisekben G mindig véges csoportiot jelöl.

Köszönetnyilvánítás: Köszönöm a BME Algebra Tanszék támogatását a habilitáció költségeinek átvállalásában, valamint Nagy Attila biztatását a habilitációs eljárás elindításában. Köszönöm Recski András, Rónyai Lajos valamint Wettl Ferenc segítő tanácsait is. A jelenlegi kutatások támogatói: az NKFI 115288 valamint az NKFI 115799 projektek.

1. Tézis - M-blokkok [1]

Elégséges feltételt adunk arra, hogy egy feloldható csoport p-blokkja M-blokk legyen. Vizsgáljuk, hogy a főblokk, illetve a maximális defektű blokkok hogyan határozzák meg egy csoport monomialitását.

1.1. **Definíció.** Legyen G véges csoport. Azt mondjuk, hogy egy $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ irreducibilis (komplex) karakter **monomiális** vagy M**-karakter**,

ha χ indukálható valamely $H \leq G$ részcsoport alkalmas lineáris karakteréből. Egy csoport M**-csoport**, ha minden irreducibilis karaktere monomiális. Azt mondjuk, hogy $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ **szubnormálisan monomiális** vagy SM**-karakter**, ha χ a G csoport egy H szubnormálosztójának lineáris karakteréből indukálható. Egy csoport SM**-csoport**, ha minden irreducibilis karaktere szubnormálisan monomiális.

K. Taketa egy ismert tétele szerint minden M-csoport feloldható. Viszont minden szuperfeloldható csoport M-csoport. Az M-csoportok osztálya valódi módon e két osztály közé esik. A monomialitás nem öröklődik részcsoportra. Ha egy M-csoport minden részcsoportja is M-csoport, akkor őt MU**-csoportnak** nevezzük.

Minden SM csoport MU, de a fordított állítás nem igaz. Az SM-csoportokkal a tézisfüzetben nem szereplő korábbi cikkben is foglalkoztunk, melyet Gua Aun How dolgozatai inspriráltak.

A moduláris reprezentációelméletet R. Brauer vezette be. Célja a reprezentációk "lokális" vizsgálata volt. Legyen (K, R, F) p**-moduláris rendszer**, azaz R teljes diszkrét értékelésgyűrű, K nulla karakterisztikájú hányadostesttel és $F = R/\mathrm{J}(R)$ p-karakterisztikájú maradékosztály testtel. Feltesszük, hogy F-ben, és K-ban benne vannak a $|G|$-edik egységgyökök. Ekkor az RG csoportgyűrű felbomlik felbonthatatlan kétoldali ideálok direkt összegére:

$$RG = \oplus B_i$$

FG ugyancsak hasonlóan felbomlik felbonthatatlan kétoldali ideálok direkt összegére:

$$FG = \oplus B_i^*$$

Ezeknek a felbontásoknak megfelel az 1 felbontása **centrálisan primitív idempotensekre** $1 = \sum e_{B_i}$ illetve $\overline{1} = \sum e_{B_i^*}$.

Azt lehet tudni, hogy a mod $\mathrm{J}(R)$ átmenet bijekció a két felbontás direkt tényezői között. Ezeket hívjuk a két **felbontás p-blokkjainak**. A megfeleltetésnél a centrálisan primitív idempotensek is a megfelelőbe képződnek bijektív módon.

Viszont a Wedderburn-Artin struktúra-tételből tudjuk, hogy $K \otimes RG \simeq KG = \oplus M_{n_j}[K]$ mátrixalgebrák direkt összege és minden direkt tényező sorvektorai egymással izomorf irreducibilis jobboldali KG-modulusok. Azaz G egy-egy irreducibilis karaktere KG egy mátrixalgebra direkt tényezőjéhez tartozik (multiplicitással). Mivel pedig RG minden blokkja K felett mátrixalgebrákra bomlik, így **minden** $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ **alkalmas blokkhoz tartozik**. Ahhoz a B blokkhoz, amelyre $K \otimes_R B$ a neki megfelelő mátrixalgebrát direkt tényezőként tartalmazza.

1.2. **Definíció.** Legyen G véges csoportnak B p-blokkja. $\mathrm{Irr}(B)$-vel jelöljük a B blokkhoz tartozó irreducibilis karakterek halmazát. Azt mondjuk, hogy a B blokk M**-blokk**, ha minden $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ monomiális karakter. Azt mondjuk, hogy a B blokk SM**-blokk**, ha $\mathrm{Irr}(B)$ minden eleme SM-karakter. Azt a p-blokkot, amely a triviális karaktert tartalmazza a csoport **főblokkjának** nevezzük és $\mathrm{B}_0(G)$-vel jelöljük.

Mivel a C^+ **osztályösszegek** a csoportalgebra centrumának bázisát alkotják, így, $e_B^* = \sum \beta_{B^*}(C)C^+$, alkalmas $\beta_{B^*}(C) \in F$ **együtthatókra**.

1.3. **Definíció.** Legyen $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. A **χ-hez tartozó centrális karakternek** nevezzük és ω_χ-vel jelöljük azt az $\omega_\chi : Z(RG) \to R$ R-algebra homomorfizmust, melyre $\omega_\chi(C^+) = \frac{\chi(g)|C|}{\chi(1)}$, ahol $g \in C$ és C a G csoport egy konjugáltosztálya, $C^+ \in RG$ pedig a hozzá tartozó osztályösszeg.

Azt lehet tudni, hogy a mod $\mathrm{J}(R)$ átmenetnél az azonos blokkokhoz tartozó irreducibilis karakterek centrális karakterei ugyanoda képződnek. Így van értelme a **blokk centrális karakteréről** beszélni. Nevezetesen: $\omega_{B^*}(C^+) := \omega_\chi(C^+)$ mod $\mathrm{J}(R)$, ahol $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ tetszőleges karakter.

Egyúttal $\omega_{B^*} : Z(FG) \to F$ **algebra homomorfizmust** indukál.

1.4. **Definíció.** Legyen G véges csoport, és C legyen G-nek egy konjugáltosztálya. Legyen $x \in C$. Tekintsük ennek $C_G(x)$ centralizátorát. Ennek p-Sylow részcsoportját a C **konjugáltosztály defektcsoportjának** nevezzük. Ez konjugáltság erejéig egyértelmű. A defektcsoport p^d rendjének d kitevőjét, a **konjugáltosztály defektjének** nevezzük. Egy konjugáltosztály **defektosztálya a** B **p-blokknak**, ha $\omega_{B^*}(C^+) \neq \overline{0}$ és $\beta_{B^*}(C) \neq \overline{0}$ egyidejűleg teljesül. Egy blokk defektosztályának defektcsoportját, a **blokk defektcsoportjának** nevezzük és $\delta(B)$-vel jelöljük. $|\delta(B)| = p^d$ esetén d-t a B **blokk defektjének** nevezzük és $\mathrm{d}(B)$-vel jelöljük.

1.5. **Definíció.** Egy $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ **karakter p-defektje** a $\frac{|G|}{\chi(1)}$-t osztó maximális p-hatvány kitevője. Jele: $\mathrm{d}(\chi)$.

Ismert, hogy $\mathrm{d}(B) = \max\{\mathrm{d}(\chi) |\ \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$.

1.6. **Jelölés.** Rögzített p esetén egy csoport **p-blokkjai halmazát** $\mathrm{Bl}(G)$-vel a D **defektcsoportú blokkjai halmazát** $\mathrm{Bl}(G|D)$-vel jelöljük. G **konjugátosztályait** $\mathrm{Cl}(G)$-vel, D **defektcsoportú konjugáltosztályait** pedig $\mathrm{Cl}(G|D)$-vel jelöljük.

1.7. **Definíció.** Egy G csoportot **p-nilpotensnek** nevezünk, ha van normál p-komplementuma, azaz $G = PK$, ahol $P \in Syl_p(G)$ és $K \lhd G$ p'-csoport.

1.8. **Definíció. Minimális nem nilpotens csoportnak**, vagy **(p,q)-csoportnak** nevezünk egy olyan csoportot, melynek minden valódi részcsoportja nilpotens.

Ezeknek a struktúrája ismert, **Schmidt-csoportoknak** is szokták őket nevezni. Legyen G egy ilyen csoport. Ekkor a következő feltételek teljesülnek G-re:

(i) G feloldható.
(ii) $|G|$ rendje két prímmel osztható csak, azaz $|G| = p^a q^b$.
(iii) $G' = P \in Syl_p(G)$.
(iv) Ha $p > 2$, akkor $\exp(P) = p$; ha $p = 2$, akkor $\exp(P) \leq 4$. Mindkét esetben $\exp(Z(P)) = p$.
(v) P Abel-csoport vagy $P' = \Phi(P) = Z(P) \leq Z(G)$.
(vi) Ha $Q \in Syl_q(G)$, akkor Q ciklikus, és ha $Q = \langle x \rangle$, akkor $x^q \in Z(G)$.
(vii) ha P Abel, akkor Q irreducibilisen hat P-n és $\exp(P) = p$. Ha P nem Abel, akkor Q irreducibilisen hat $P/Z(P)$-n és $\exp(P/Z(P) = p$. Az első esetben

P, a második esetben $P/Z(P)$ a $GF(p)$ feletti vektortérnek tekinthető, melynek dimenziója $o(p)$ mod q, amely páros a nem Abel esetben.

(vii) G-t a q-Sylow részcsoportjai generálják.

Ezek a csoportok nem p-nilpotensek. Azt is be lehet látni, hogy egy csoport pontosan akkor p-nilpotens, ha nem tartalmaz (p, q)-csoportot.

1.9. **Jelölés.** Ha a G csoport **tartalmaz** (p, q)**-csoportot**, akkor ezt $G \geq (p, q)$-val, ha nem tartalmaz, akkor ezt $G \ngeq (p, q)$-val rövidítjük.

Corrádi Keresztély egy cikkében megmutatta, hogy a $G \ngeq (p, q)$ tulajdonság faktorcsoportra öröklődik.

1.10. **Definíció.** Egy G p**-csoport moduláris**, ha részcsoportjai hálója moduláris. (Ha $p \neq 2$, akkor ez pontosan akkor teljesül, ha p^3-rendű p-exponensű extraspeciális csoport nem izomorf G egy részcsoportjának faktorával.)

Az M-blokk fogalmát C. Bessenrodt vezette be 1990-ben. Az ő eredményei inspirálták a következő tételt az [1] cikkben, melyben **elégséges feltételt** adtunk arra, hogy egy feloldható csoport bizonyos blokkjai M-blokkok legyenek:

1.11. **Tétel.** *Legyen G véges feloldható csoport, amely páratlan rendű. Legyen p a $|G|$ egy prímosztója. Legyen N a G csoport egy normálosztója, melyre*

(i) *Ha tekintjük $|G/N|$ bármely két különböző prímosztóját r-et és q-t, ahol $r \neq p$, akkor $G/N \ngeq (r, q)$;*

(ii) *$|N|$ minden $q \neq p$ prímosztójára, N q-Sylow részcsoportja moduláris.*

Ekkor G minden olyan p-blokkja, amelynek defektcsoportja moduláris, M-blokk lesz.

Feloldható p-nilpotens csoportokban egy másik **elégséges feltételt** találtunk arra, hogy egy blokk M-blokk, illetve SM-blokk legyen. Ezt az eredményt Herbert Pahlings egy dolgozata inspirálta.

1.12. **Tétel.** *Legyen G feloldható p-nilpotens csoport. Ekkor minden olyan blokk, amely tartalmaz lineáris karaktert M-blokk lesz. Ha $G/O_{p'}(G)$ Abel-csoport, akkor minden olyan blokk, amely tartalmaz monomiális karaktert, az M-blokk lesz, ha meg tartalmaz SM-karaktert, akkor SM-blokk lesz.*

Ez az eredmény nem igaz nem p-nilpotens csoportokra. Például $SL(2, 3)$ esetén $p = 2$-re $\mathrm{Irr}(\mathrm{B}_0(G)) = \mathrm{Irr}(G)$. A tétel csak elégséges feltételt ad, ezek a feltételek nem szükségesek.

Ha a **főblokk M-blokk**, az még nem biztosítja a csoport monomialitását. Például $SL(2, 3)$-ban $p = 3$ esetén $\mathrm{B}_0(G)$ M-blokk, de G nem M-csoport. Az SM esetre sem igaz az analóg állítás. Ezt mutatja a következő

1.13. **Példa.** Legyen G egy 3^3 rendű, 3 exponensű extraspeciális csoport 2-odrendű automorfizmussal vett bővítése, amely a kommutátor faktorcsoporton reducibilisen hat. $p = 2$ esetén a főblokk SM-blokk, de a csoport nem SM-csoport.

Lehet példát mutatni arra is, hogy a maximális defektű blokkok monomialitása sem vonja maga után a csoport monomialitását.

Viszont **Frobenius-csoportokra** bizonyos esetben lehet többet is tudni:

1.14. **Tétel.** *Legyen G egy Frobenius-csoport, N maggal. Legyen p az $|N|$ egy prímosztója. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathrm{B}_0(G)$ *M-blokk.*

(ii) *G monomiális csoport.*
(iii) *G szubnormálisan monomiális csoport.*
(iv) $\mathrm{B}_0(G)$ *SM-blokk.*

Ha a p **prím nem $|N|$-t osztja**, hanem a Frobenius-komplementum rendjét, akkor már előfordulhat, hogy $B_0(G)$ M-blokk, de G nem M-csoport.

Azonban, igaz, a következő

1.15. **Tétel.** *Legyen G véges feloldható csoport.*

(a) *Legyen G-ben minden részcsoport minden maximális defektű p-blokkja M-blokk. Ekkor a G csoport MU-csoport lesz.*
(b) *Legyen G minimális nem M-csoport, azaz G minden részcsoportjának minden faktora, amely $|G|$-nél kisebb rendű, M-csoport. Ekkor, ha G minden maximális defektű p-blokkja M-blokk, akkor a G csoport M-csoport lesz.*

2. Tézis - Dade-sejtés a Higman-Sims csoportra [2]

A Higman-Sims sporadikus egyszerű csoportra belátjuk az invariáns projektív Dade-sejtést.

E. Dade az 1990-es években fogalmazta meg sejtéseinek sorozatát. Belátta, hogy a legáltalánosabb ú.n. induktív Dade-sejtés pontosan akkor igaz, ha minden véges egyszerű csoportra igaz. Ezért meghirdetett egy programot, a véges egyszerű csoportok Dade-sejtés szempontjából való vizsgálatára. A sejtés jelenlegi állása nyomon követhető a J. B. Olsson és K. Uno által működtetett web-lapon:
http://www.math.ku.dk/∼olsson/links.dade.html.

Legyen (K, R, F) p-moduláris rendszer, mint korábban.

2.1. **Definíció (Brauer).** Legyen $H \leq G$ részcsoport. Legyen $s_H : Z(RG) \to Z(RH)$ az az R-homomorfizmus, amelyre $s_H(C^+) := \sum_{x \in C \cap H} x$. Ez a leképezés egy $s_H^* : Z(FG) \to Z(FH)$ F-homomorfizmust indukál. Legyen $b \in \mathrm{Bl}(H)$. Ekkor $\omega_b^* \circ s_H^* : Z(FG) \to F$ is F-homomorfizmus. Amennyiben ez F-algebra homomorfizmus is, akkor van olyan $B \in \mathrm{Bl}(G)$ blokk, melyre $\omega_B^* = w_b^* \circ s_H^*$. Ekkor azt mondjuk, hogy az **indukált blokk**, b^G **Brauer értelemben** értelmezve van és egyenlő B-vel. Jele: $b^G = B$.

- Ismert, hogy ha egy Q p-csoportra, $C_G(Q) \leq H \leq N_G(Q)$ teljesül, akkor az a $\mathrm{Br}_Q : Z(FG) \to Z(FH)$ leképezés, amelyet a $\mathrm{Br}_Q(C^+) = (C \cap H)^+$ megfeleltetés ad meg algebra homomorfizmus. Ez az ú.n. **Brauer-homomorfizmus**. Ha még az is igaz, hogy $QC_G(Q) \leq H \leq N_G(Q)$, akkor minden $b \in \mathrm{Bl}(H)$ blokkra $\omega_b^* \circ s_H^* = \omega_b^* \circ \mathrm{Br}_Q$, azaz algebra homomorfizmus, tehát b^G értelmes.
- **Brauer I főtétele** szerint, ha $N_G(D) \leq H \leq G$, akkor bijekció van $\mathrm{Bl}(H|D)$ és $\mathrm{Bl}(G|D)$ között és ezt a bijekciót egyik irányban blokk indukció, másik irányban pedig a blokk idempotensnek a Brauer-homomor-fizmusnál vett képe adja meg.
- Azt is lehet tudni, hogy egy $B \in \mathrm{Bl}(G)$ **blokk defektcsoportja** az a maximális olyan $Q \leq G$ p-csoport konjugáltság erejéig, melyre $\mathrm{Br}_Q(e_B^*) \neq 0$.
- A blokk indukció tranzitív, azaz ha $L \leq H \leq G$, $b \in \mathrm{Bl}(L)$ és b^H értelmezve van, akkor b^G és $(b^H)^G$ egyikének létezése esetén a másik is létezik és $(b^H)^G = b^G$.
- Ha egy $b \in \mathrm{Bl}(H)$ blokk D defektcsoportjára $C_G(D) \leq H$, akkor b^G mindig értelmes. Ekkor b-t **megengedett blokknak** nevezik.
- **Brauer III. főtétele** szerint, ha $H \leq G$ és $b \in \mathrm{Bl}(H)$ blokk D defektcsoportjára $C_G(D) \leq H$ teljesül, akkor $b^G = \mathrm{B}_0(G)$ pontosan akkor ha $b = \mathrm{B}_0(H)$, azaz H és G főblokkjai egymásnak felelnek meg a blokkindukciónál.

2.2. **Jelölés.** Legyen $C : P_0 < P_1 < P_2 < \cdots < P_n$ egy p**-lánc**, azaz a G csoport p-részcsoportjainak egy n **hosszú lánca**, azaz $|C| = n$. A P csoporttal kezdődő láncok halmazát $\mathcal{P}(G|P)$-vel jelöljük. Ha P normálosztó G-ben, akkor ezeken a láncokon G konjugálással hat. Jelölje $\mathcal{P}(G|P)/G$ ezen **láncok G-orbitjainak egy reprezentáns rendszereét**.

R. Knörr és G. R. Robinson megmutatták, hogy egy C p-lánc normalizátoráról mindig értelmezve van a blokk indukció Brauer-értelemben, és egy $B \in Bl(G)$

blokkot épp azok a $b \in Bl(N_G(C))$ blokkok indukálnak, amelyeket $Br_{P_n}(e_B^*)$ nem anullál, azaz az ú.n. **Brauer-megfeleltetett blokkok**.

2.3. **Sejtés** (**DADE'S ORDINARY CONJECTURE).** Legyen G véges csoport, melyre $O_p(G) = 1$. Legyen $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$ p-blokk, ahol $\mathrm{d}(B) > 0$. Legyen d nemnegatív egész szám. Ekkor

$$\sum_{C \in \mathcal{P}(G|1)/G} (-1)^{|C|} \mathrm{k}(\mathrm{N}_G(C), B, d) = 0,$$

ahol $\mathrm{k}(\mathrm{N}_G(C), B, d) = |\{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_G(C))| \ b(\chi)^G = B, \mathrm{d}(\chi) = d\}|$. Itt $b(\chi) \in \mathrm{Bl}(\mathrm{N}_G(C))$, a χ-t tartalmazó blokk.

Dade megmutatta, hogy az összes p-részcsoport láncok helyett vehetők kevesebb p-csoportot tartalmazó osztályok is, például elemi Abel p-csoportok láncai, jele $\mathcal{E}$, radikál p-csoportok láncai, jele $\mathcal{U}$ stb.

2.4. **Definíció.** Egy $P \leq G$ **radikál** p-**részcsoport**, ha $P = \mathrm{O}_p(\mathrm{N}_G(P))$.

Az invariáns Dade-sejtés megfogalmazásához G-t be kell ágyazni normálosztóként egy bővebb E csoportba. Ha $Z(G) = 1$, mint esetünkben, akkor E az $Aut(G)$-nek választható. E hat a p-láncokon és $N_G(C) \triangleleft N_E(C)$. Minden $\chi \in \mathrm{Irr}(N_G(C))$-nek van $N_E(C)$-ben egy $T(\chi)$ **inercial részcsoportja**. Legyen $G \leq H \leq E$. Legyen

$$\mathrm{k}(\mathrm{N}_G(C), B, d, H) := |\{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_G(C))| \ \mathrm{d}(\chi) = d, \mathrm{b}(\chi)^G = B, T(\chi)G = H\}|.$$

2.5. **Sejtés** (**DADE'S INVARIANT CONJECTURE).** Legyen G véges csoport, melyre $O_p(G) = 1$ és $B \in \mathrm{Bl}(G)$, ahol $\mathrm{d}(B) > 0$. Legyen d nemnegatív egyész szám. Legyen $G \triangleleft E$ és $G \leq H \leq E$.

$$\sum_{C \in \mathcal{F}/G} (-1)^{|C|} \mathrm{k}(\mathrm{N}_G(C), B, d, H) = 0.$$

Itt $\mathcal{F}$ lehet $\mathcal{P}(G|1), \mathcal{U}(G|1), \mathcal{E}(G|1)$, stb.

Ismert, hogy G-nek α faktor halmazához tartozó **projektív reprezentációi** ekvivalensek azokhoz, amelyeket fel lehet emelni a G^* fedőcsoport közönséges reprezentá-ciójává, ahol G^* a G csoport $Z^* = \langle \alpha \rangle$-gal vett centrális bővítése. Ha rögzítünk egy $\zeta \in \mathrm{Irr}(Z^*)$ hű, irreducibilis karaktert, akkor azon irreducibilis karakterei a G^*-nak, melyek G projektív karaktereinek felemeléseiből származnak, épp azok az $\mathrm{Irr}(G^*)$-beli karakterek, amelyek megszorításában ζ előfordul

$$\mathrm{k}(N_{G*}(C^*), B^*, d^*, \zeta) :=$$

$$|\{\psi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*))| \ \mathrm{d}(\psi) = d^*, \mathrm{b}(\psi)^{G^*} = B^*, (\psi|Z^*, \zeta) \neq 0, d^* > \nu_p(|Z^*|)\}|.$$

Az mondjuk, hogy B^* a ζ **felett fekszik**, jele $B^* \in \mathrm{Bl}(G^*|\zeta)$, ha ζ előfordul egy $\chi \in \mathrm{Irr}(B^*)$ karakter Z^*-ra való megszorításában. Ekkor azt is írjuk, hogy $\chi \in \mathrm{Irr}(B^*|\zeta)$, azaz **a** χ **karakter** ζ **felett fekszik**.

2.6. **Sejtés** (**DADE'S PROJECTIVE CONJECTURE).** Legyen G véges csoport, melyre $\mathrm{O}_p(G) = 1$. Legyen Z^* a G csoport Schur-multiplikátorának egy ciklikus részcsoportja. Legyen G^* a G csoport Z^*-gal vett centrális bővítése. Legyen $\zeta \in \mathrm{Irr}(Z^*)$ hű karakter. Ekkor minden olyan $B^* \in \mathrm{Bl}(G^*|\zeta)$ esetén, melyre $d(B^*) > \nu_p(|Z^*|)$,

$$\sum_{C^* \in \mathcal{F}(G^*|\mathrm{O}_p(G^*))/G^*} (-1)^{|C^*|} \mathrm{k}(N_{G*}(C^*), B^*, d^*, \zeta) = 0,$$

ahol $\mathcal{F}$ lehet $\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{U}$ valamelyike.

Legyen most

$$\mathrm{k}(N_{G*}(C^*), B^*, d^*, H^*, \zeta) :=$$
$$\{\psi \in \mathrm{N}_{G^*}(C^*)|\ \mathrm{d}(\psi) = d^*, b(\psi)^{G^*} = B^*, (\psi|Z^*, \zeta) \neq 0, T^*(\psi)G^* = H^*\},$$

ahol $T^*(\psi)$ a ψ karakter $N_{E*}(C^*)$-beli inerciacsoportja.

2.7. **Sejtés** (**DADE'S INVARIANT PROJECTIVE CONJECTURE).** Legyen G véges csoport, melyre $\mathrm{O}_p(g) = 1$. Legyen Z^* a G csoport Schur-multiplikátorának egy ciklikus részcsoportja. Legyen G^* a G csoport Z^*-gal vett centrális bővítése. Legyen $\zeta \in \mathrm{Irr}(Z^*)$ hű karakter. Legyen E^* egy csoport, amely G^*-ot normálosztóként tartalmazza és E^* triviálisan hat Z^*-on. Ekkor minden H^* részcsoportra, melyre $G^* \leq H^* \leq E^*$ és minden olyan $B^* \in \mathrm{Bl}(G^*|\zeta)$ esetén, melyre $d(B^*) > \nu_p(|Z^*|)$,

$$\sum_{C^* \in \mathcal{F}(G^*|\mathrm{O}_p(G^*))/G^*} (-1)^{|C^*|} \mathrm{k}(N_{G*}(C^*), B^*, d^*, H^*, \zeta) = 0,$$

ahol $\mathcal{F}$ lehet $\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{U}$ valamelyike.

Ismert, hogy a projektív invariáns sejtés teljesülése esetén igaz a projektív és az invariáns sejtés. Ez utóbbi két sejtés mindegyike erősebb, mint a közönséges sejtés. Mivel a gyengébb sejtések megmutatása az erősebb sejtések részbeni bizonyítása is, ezért a számításokat a közönséges sejtéssel kezdtük.

A Higman-Sims csoport rendje: $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$.

Dade 1996-ban bebizonyította sejtését ciklikus defekt csoportú blokkra. Így csak a $2, 3, 5$ prímekkel kell foglalkozni.

A számolásokat GAP programokkal végeztük, és $\mathcal{U}$-láncok konjugáltosztályainak reprezetánselemeivel számoltunk.

Ily módon bebizonyítottuk a Higman-Sims-csoportra a projektív invariáns Dade-sejtést, amely e csoport esetén ekvivalens az induktív Dade-sejtéssel, mivel a HS csoport Schur-multiplikátora és a külső automorfizmus csoportja is másodrendű. A számolásokat a HS-csoport 100 fokú, hű, permutációreprezentációjával végeztük.

2.8. **Megjegyzés.** A Dade-sejtések kapcsolatban állnak a J.L. Alperin által 1986-ban megfogalmazott ú.n. **Alperin-súlysejtéssel** is.

2.9. **Sejtés** (**ALPERIN'S WEIGHT CONJECTURE).** Legyen G véges csoport F algebrailag zárt p-karakterisztikájú test. Ekkor egyenlőek:

(i) Az egyszerű FG-modulusok izomorfia típusai száma;
(ii) $\sum_Q$ a projektív egyszerű $N_G(Q)/Q$-modulusok izomorfia típusai száma. Itt a Q a G csoport p-részcsoportjai G-konjugáltosztályai reprezentáns elemein fut.

Ennek **blokkokra vonatkozó vátozatában**: (i)-ben csak egy B blokkhoz tartozó (azaz B-vel nem anullált) modulusokat számoljuk össze, (ii)-ben pedig csak azon projektiv egyszerű modulusokat, amelyek $N_G(Q)$-modulusként benne vannak B egy Brauer-megfeleltetett blokkjában.

1989-ben R. Knörr és G. R. Robinson bebizonyították a következőt:

2.10. **Tétel (Alperin-sejtés Knörr-Robinson alakja).** *Az Alperin-sejtés egy p prímre pontosan akkor teljesül, ha minden G véges csoportra és annak minden pozitív defektű B p-blokkjára*

$$\sum_{C \in \mathcal{P}(G|1)/G} (-1)^{|C|} k(N_G(C), B) = 0,$$

Ahol $k(N_G(C), B) = |\{\phi \in \mathrm{Irr}(N_G(C))|\ b(\phi)^G = B\}|$.

Ez a tétel motiválta Dade-et sejtéseinek megfogalmazásában. Megjegyezzük, hogy bár ezek szerint HS-re igaz az Alperin-sejtés Knörr-Robinson vátozata, azaz

$$\sum_{C \in \mathcal{P}(G|1)/G} (-1)^{|C|} k(N_G(C), B) = 0,$$

ez még nem bizonyítja az eredeti Alperin-sejtést a HS-csoportra.

3. Tézis - További eredmények a Dade-sejtéssel kapcsolatban [2],[3]

Belátjuk, hogy minden olyan véges G csoportra, amelyre $\mathrm{O}_p(G) = 1$, $d = 1$ esetén a közönséges és invariáns Dade-sejtések teljesülnek. Tanulmányozzuk a közönséges és a projektív Dade-sejtés közötti kapcsolatot, prímrendű Schur-multiplikátor esetén. Belátjuk, hogy Brauer III. főtétele igaz láncnormalizátorokra. Példákat mutatunk, hogy Brauer I. főtételének analogonja valamint az Alperin-McKay sejtés analogonja nem igaz p-láncok normalizátoraira.

Az előző tézisek jelöléseit használjuk.

3.1. **Tétel.** *Legyen G véges csoport.*

(i) *Ha $C : 1 = P_0 < P_1 < \cdots < P_n$ p-lánc G-ben és $|P_n| > p$, akkor az $\mathrm{N}_G(C)$ láncnormalizátornak nincs 1-defektű blokkja, és 1-defektű karaktere sem. Ezért $\mathrm{k}(N_G(C), B, 1) = 0$ minden $B \in \mathrm{Bl}(G)$ blokkra.*

(ii) *Ha $B \in \mathrm{Bl}(G)$ és $\mathrm{d}(B) > 1$, akkor minden $C \in \mathcal{P}(G|1)$ p-láncra, $\mathrm{N}_G(C)$ minden B-t indukáló b blokkjára, $\mathrm{d}(b) > 1$ teljesül. Tehát $\mathrm{k}(N_G(C), B, 1) = 0$.*

(iii) *Ha egy $B \in \mathrm{Bl}(G)$ blokk D defektcsoportja Abel, akkor $N_G(C)$ minden olyan p-blokkja, amely B-t indukálja, D-hez konjugált defetcsoporttal rendelkezik. Speciálisan, ha $\mathrm{d}(B) = 1$, akkor az $N_G(C)$ részcsoport B-t indukáló blokkjai is 1 defektűek. Tehát B, csak nulla és egy hosszú láncok normalizátorainak blokkjaiból indukálható. Az utóbbi esetben $|P_1| = p$ is teljesül.*

(iv) *Legyen G véges csoport, melyre $\mathrm{O}_p(G) = 1$. Ekkor G-re $d = 1$ esetén igaz a közönséges és invariáns Dade-sejtés.*

Legyen G véges csoport q-adrendű Schur-multiplikátorral, ahol q prímszám. Tegyük fel, hogy $\mathrm{O}_p(G) = 1$. Legyen G^* egy nem széteső centrális bővítése G-nek egy Z^* q-adrendű ciklikus részcsoporttal. Ekkor létezik egy tartalmazást megtartó bijekció G és G^* p-láncai között, ahol egy G-beli C p-láncnak olyan G^*-beli C^* lánc felel meg, amelyre Z^* p-része benne van a lánc első szemében.

3.2. **Definíció.** Legyen $G = G^*/Z^*$, ekkor létezik egy $\mu^*_{Z^*} : FG^* \to FG$ algebra homomorfizmus, melyre $\sum a_g g \mapsto \sum a_{\overline{g}} \overline{g}$, ahol $\overline{g}$ a $g \in G^*$ képe a $G^* \to G$ természetes homomorfizmusnál. E leképezés neve **dominálási leképezés**.

Ismertek a következő eredmények:

- Ha $p = q$, akkor a dominálás bijekció $B^* \in \mathrm{Bl}(G^*)$ blokkok és $B \in \mathrm{Bl}(G)$ blokkok között, ahol a kép blokk defektcsoportja a defektcsoport képe, így $\mathrm{d}(B^*) = \mathrm{d}(B) + 1$. Ezen kívül $\mathrm{Irr}(B) \subseteq \mathrm{Irr}(B^*)$, ezért $\mathrm{Irr}(B^*) \setminus \mathrm{Irr}(B) = \cup_{j=2}^{q} \mathrm{Irr}(B^*|\zeta_j)$. Hasonló állítások igazak p-láncok normalizátorai p-blokkjaira is, azaz hasonló a kapcsolat $N_{G^*}(C^*)$ illetve $N_G(C)$ blokkjai között.
- Ha $p \neq q$ és $B^* \in Bl(G^*)$ p-blokk, akkor ez vagy nem dominál egyetlen G-hez tartozó blokkot se, vagy egyetlen B blokkot dominál és $\mathrm{Irr}(B^*) = \mathrm{Irr}(B)$. Az első esetben $\mathrm{Irr}(B^*) = \cup_{j=2}^{q} \mathrm{Irr}(B^*|\zeta_j)$. A második esetben pedig $\mathrm{Irr}(B^*|\zeta_j) = \emptyset$, $j \in \{2, \ldots, q\}$. Ekkor $\mathrm{d}(B^*) = \mathrm{d}(B)$. Hasonló állítások igazak p-láncok normalizátorai p-blokkjaira is, azaz hasonló a kapcsolat $N_{G^*}(C^*)$ illetve $N_G(C)$ blokkjai között.

3.3. **Megjegyzés.** Legyen $\mu^*_{Z^*} : FG^* \to FG$ a dominálási leképezés. Legyenek $s_H{}^* : FG \to FH$, $s_{H^*}{}^* : FG^* \to FH^*$ projekciók, ekkor $\mu_{Z^*} \circ s^*_{H^*} = s_H{}^* \circ \mu^*_{Z^*}$, azaz a projekciók és a dominálási leképezések felcserélhetőek.

3.4. **Tétel.** *Legyen $b \in \mathrm{Bl}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*))$ és $B^* \in \mathrm{Bl}(G^*)$. Legyen $\overline{b} \in \mathrm{Bl}(\mathrm{N}_G(C))$ és $B \in \mathrm{Bl}(G)$. Ekkor:*

(i) *Ha B^* dominálja B-t és b dominálja $\overline{b}$-t, akkor $B^* = b^{G^*}$ pontosan akkor, ha $\overline{b}^G = B$.*
(ii) *Ha $\overline{b}^G = B$ és $b^{G^*} = B^*$. Akkor B^* pontosan akkor dominálja B-t, ha b dominálja $\overline{b}$-t.*

Tekintük a $p = q$ esetet:

3.5. **Tétel.** *Legyenek B és B^* egymásnak megfelelő blokkok G-ben, illetve G^*-ban, C és C^* pedig egymásnak megfelelő p-láncok. Legyen $d^* = d + 1$. Legyen $\mathrm{k}(H, B, d)$ a közönséges Dade-sejtésbeli, $\mathrm{k}(H^*, B^*, d^*, \zeta)$ pedig a projektív Dade-sejtésben szereplő függvény. Ekkor*

$$\mathrm{k}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*), B^*, d^*) - \mathrm{k}(\mathrm{N}_G(C), B, d) =$$

$$\sum_{j=2}^{p} \mathrm{k}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*), B^*, d^*, \zeta_j) = (p-1)\mathrm{k}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*), B^*, d^*, \zeta_2).$$

Tekintsük most a $p \neq q$ esetet:

3.6. **Tétel.** *Legyen p a q-tól különböző prímszám. Legyenek B^* és B a dominálásnál egymásnak megfelelő blokkok, mint a korábbiakban. Legyenek C és C^* egymásnak megfelelő p-láncok G-ben és G^*-ban, $d^* = d$. Legyen $\mathrm{k}(H, B, d)$ a közönséges Dade-sejtésbeli, $\mathrm{k}(H^*, B^*, d^*, \zeta)$ pedig a projektív Dade-sejtésben szereplő függvény. Ekkor*

$$\mathrm{k}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*), B^*, d^*, \zeta_j) = 0,$$

ha $j = 2, \ldots, q$. Ha B^* nem dominálja G egyetlen blokkját sem, akkor

$$\mathrm{k}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*), B^*, d^*) = \sum_{j=2}^{q} \mathrm{k}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*), B^*, d^*, \zeta_j) = \mathrm{k}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*), B^*, d^*, \zeta_i)$$

alkalmas $i \in \{2, \ldots, q\}$ esetén.

Legyen megint $p = q$:

Ha $\mathrm{O}_p(G) > 1$, akkor általában a közönséges Dade-sejtésbeli alternáló összege nem nulla. Belátjuk, hogy ha G-re igaz a projektív Dade-sejtés, akkor G^*-ra ez az alternáló összeg mindig nulla.

3.7. **Tétel.** *Legyen G egy véges csoport, p-edrendű Schur-multiplikátorral. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathrm{O}_p(G) = 1$. Legyen G^* a G csoport egy nem széteső centrális bővítése egy p-edrendű ciklikus csoporttal. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) *G-re a p prím esetén teljesül a közönséges Dade-sejtés és*

$$\sum_{C^* \in \mathcal{P}(G^* | \mathrm{O}_p(G^*))/G^*} (-1)^{|C^*|} \mathrm{k}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*), B^*, d^*) = 0,$$

ahol k a közönséges Dade-sejtésbeli függvény.

(ii) *G-re teljesül a projektív Dade-sejtés a p prím esetén.*

Ha a fenti összefüggések mindkét oldalát összegezzük különböző defektekre, akkor kapjuk a következőt:

3.8. **Következmény.** *Legyen G véges csoport.*

(a) *Legyen a G csoport Z^* Schur-multiplikátora $p = 2$-odrendű, továbbá $\mathrm{O}_2(G) = 1$ és G^* a G csoport nem széteső centrális bővítése a Z^* csoporttal. Legyen $B^* \in \mathrm{Bl}(^*)$, melyre $\mathrm{d}(B^*) > 1$. Ekkor*

$$\sum_{d^* \geq 1} \sum_{C^* \in \mathcal{P}(G^* | \mathrm{O}_p(G^*))/G^*} (-1)^{|C^*|} \mathrm{k}(\mathrm{N}_{G^*}(C^*), B^*, d^*) = 0$$

(b) *Legyen a G csoport Z^* Schur-multiplikátora p-edrendű, ahol $p > 2$, valamint legyen $\mathrm{O}_p(G) = 1$. Legyen G^* a G csoport Z^*-gal vett, nem széteső, centrális bővítése. Legyen $B^* \in \mathrm{Bl}(G^*)$ p-blokk, melyre $d(B^*) > 1$. Ekkor, ha Dade közönséges sejtése teljesül a B^* által dominált $B \in Bl(G)$ blokkra, akkor az (a) pontbeli egyenlőség teljesül. Speciálisan, ha igaz az Alperin-súlysejtés Knörr-Robinson-féle vátozata G-re, akkor az (a)-beli egyenlőség teljesül.*

Megjegyezzük, hogy az előző tétel igaz marad akkor is, ha a korábban említett többi típusú láncokat tekintünk.

Vizsgáljuk most a $p \neq q$ esetet:

3.9. **Tétel.** *Legyen G véges csoport, q-adrendű Schur-multiplikátorral, ahol $q \neq p$ prím. Legyen G^* a G csoportnak nem széteső centrális bővítése egy q-adrendű ciklikus csoporttal. Ekkor ekvivalensea:*

(i) *A G és G^* csoportokra teljesül a közönséges Dade-sejtés a p prímre.*

(ii) *G-re teljesül a projektív Dade-sejtés a p prímra.*

A [2] cikkben beláttuk Brauer III. főtételének analogonját láncnormalizátorokra:

3.10. **Tétel.** *Legyen C p-lánc G-ben. Ekkor $b \in Bl(N_G(C))$ esetén b^G mindig értelmes és b pontosan akkor főblokkja $N_G(C)$-nek, ha b^G főblokkja G-nek.*

Brauer II. főtételének analogonja nem igaz p-láncok normalizátoraira, lásd [3]:

3.11. **Példa.** Létezik olyan G csoport és olyan C p-lánc G-ben, hogy $S \in Syl_p(G)$ és $S \leq N_G(C)$, de nincs bijekció $\mathrm{Bl}(\mathrm{N}_G(C)|S)$ és $\mathrm{Bl}(G|S)$ között.

3.12. **Definíció.** Legyen G véges csoport, legyen B $\in Bl(G)$ p-blokk. Egy $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ **karakter magasságának** hívjuk és $\mathrm{ht}(\chi)$-vel jelöljük a $\mathrm{ht}(\chi) = \mathrm{d}(B) - \mathrm{d}(\chi)$ számot. $\mathrm{k}_0(B)$-vel jelöljük a B **blokk nulla magasságú karakterei számát**.

3.13. **Sejtés (ALPERIN-MCKAY, 1975).** Ha $b \in \mathrm{Bl}(N_G(D)|D)$, akkor $\mathrm{k}_0(b) = \mathrm{k}_0(b^G)$

Az analóg állítás p-láncok normalizátorára nem feltétlan igaz lásd [3]:

3.14. **Példa.** Van olyan G véges csoport és benne olyan C p-lánc, valamint $b \in \mathrm{Bl}(\mathrm{N}_G(C))$, hogy $\mathrm{k}_0(b) \neq \mathrm{k}_0(b^G)$.(A példában b ráadásul főblokk.)

4. Tézis - Blokk indukció [4]

Tanulmányozzuk a blokk indukció különféle változatait. Összehasonlítjuk az értelmezési tartományaikat az általános esetben valamint nulla defektű blokkok és p-csoportok esetén. Feltételt adunk arra, hogy ne legyen értelmezve a blokk indukció semmilyen értelemben sem. p-lánc normalizátorok blokkjairól is vizsgáljuk az indukciót.

4.1. **Definíció.** Legyen G véges csoport, legyen $H \leq G$. Legyen $b \in \mathrm{Bl}(H)$, $B \in \mathrm{Bl}(G)$. Jelölje $s_H^* : FG \to FH$ a megfelelő projekciót.

(1) Azt mondjuk, hogy a **blokk indukció értelmes Brauer értelemben** a $b \in \mathrm{Bl}(H)$ blokkra és $b^G = B$, ha $\omega_b^* \circ s_H^* = \omega_B^*$. (Lásd 2.1 Definíció).
(2) Azt mondjuk, hogy a **blokk indukció értelmes p-reguláris ételemben**, a b blokkra és indukáltja B, **jele** $b^{reg(G)} = B$**,** ha $\omega_b^* \circ s_H^*|Z(FG_{p'}) = \omega_B^*|Z(FG_{p'})$.
(3) Azt mondjuk, hogy a b blokkra a **blokk indukció értelmes Alperin-Burry értelemben** és indukáltja B, ha b **direkt összeadandója** $B_{H\times H}$**-nak és** B **az egyetlen ilyen blokkja** G-nek. **Jele:** $b^{(G)} = B$.
(4) Azt mondjuk, hogy a b blokkra **a blokk indukció értelmes kiterjesztett ételemben** és indukáltja B, ha $\omega_b^* \circ s_H^*(e_B^*) \neq 0$, **és** B **az egyetlen ilyen blokkja** G-nek. **Jele:** $B^{ext(G)} = B$.
(5) Azt mondjuk, hogy a $b \in \mathrm{Bl}(H|D)$ blokkra **a blokk indukció értelmes Green értelemben** és indukáltja B, ha $\mathrm{C}_G(D) \leq H$, azaz a b blokk ú.n. **megengedett blokk** és $b^G = B$. **Jele:** $b^{Gr(G)} = B$.
(6) Azt mondjuk, hogy a $b \in \mathrm{Bl}(H|D)$ blokkra **a blokk indukció értelmes karakter értelemben** és indukáltja B, ha létezik $\chi \in \mathrm{Irr}(b)$, melyre $\chi^G \in \mathrm{Irr}(B)$. **Jele:** $b^{Char(G)} = B$.
(7) Azt mondjuk, hogy a $b \in \mathrm{Bl}(H|D)$ blokkra **a blokk indukció értelmes egy multiplicitású értelemben** és indukáltja $B \in \mathrm{Bl}(G)$, ha b **egy multiplicitású direkt összeadandója** a $RG_{H\times H}$-nas **és direkt összeadandója** $B_{H\times H}$-nak. **Jele:** $b^{Mult(G)} = B$.

- Bármely két blokk indukció fogalom **megegyezik az értelmezési tartományaik közös részén**.
- (5) $\to$ (7) $\to$ (1) $\to$ (2) $\to$ (4).
- (6) $\to$ (7) $\to$ (3) $\to$ (4).

4.2. **Tétel.** *Az (1)-(7) összes olyan részhalmazára, amely zárt a fent említett implikációkra adunk olyan példát, ahol kizárólag a részhalmazhoz tartozó típusú indukciók vannak értelmezve.*

Ismert, hogy:

- A Brauer, a p-reguláris és az Alperin-Burry indukció, ha értelmezve van a főblokkon, akkor **főblokkot főblokkba** visz.
- A kibővített indukció **nem feltétlen** visz főblokkot főblokkba

Szükséges feltétel a Brauer-indukció létezésére egy részcsoport főblokkjáról:

4.3. **Megjegyzés.** Legyen $H \leq G$, A $b_0(H)^G$ létezésének **szükséges feltétele**, hogy $Z(G) \leq H$ és azon G-beli konjugáltosztályok, amelyek tartalmaznak centrális elemet G valamely p-Sylow részcsoportjából, nemtriviálisan metszik H-t.

Ez következik az alábbi általánosabb tételből, amelyben **szükséges és elégséges feltételt** adunk arra, hogy a Brauer, illetve a p-reguláris indukció értelmezve legyen egy részcsoport főblokkján.

4.4. **Tétel.** *Legyen G véges csoport, $H \leq G$ részcsoport. Ekkor H főblokkján pontosan akkor értelmes a Brauer-indukció (illetve a p-reguláris indukció), ha minden $g \in G$ elemre (illetve, minden $g \in G$ p'-elemre) teljesül, hogy $|g^G| \equiv |g^H \cap H|$ mod p.*

Nulla defektű blokkokat tekintve kaptuk:

4.5. **Tétel.** *Legyen $H \leq G$ részcsoport $b \in \mathrm{Bl}(H)$ nulla defektű blokk. Ekkor* (6) *és* (7) *blokk indukció típusok* **ekvivalensek**. *A nulla defektű blokkokra a 4.2 Tételbeli részhalmazok közül azon blokk indukció típusok* **realizálódnak együtt**, *ahol vagy* (6) *és* (7) *mindegyike, vagy egyike sem szerepel.*

4.6. **Tétel.** *Legyen H valódi p'-részcsoportja G-nek. Ekkor H főblokkja* **nem indukálható** *Brauer értelemben. Ha G maga is p'-csoport, akkor* **nem definiált** *a kibővített indukció H főblokkján.*

p**-csoportokat** tekintve kaptuk:

4.7. **Tétel.** *p-csoportokra az* (5) *és* (7) *blokkindukció típusok* **ekvivalensek**. *A* (2) *és* (3) *indukció típusok mindig* **értelmezve vannak.** *A 4.2 Tételben pontosan azon részhalmazok* **realizálódnak egyidejűleg** *valamely p-csoport blokk indució típusaiként, amelyek* (2)*-őt és* (3)*-at tartalmazzaák, valamint* (5) *és* (7) *mindegyikét, vagy egyikét sem tartalmazzák.*

p-csoportokra a következő **szükséges és elégséges** feltételt láttuk be a Brauer-indukcióra:

4.8. **Tétel.** *Legyen G p-csoport, $H \leq G$. Ekkor a $b_0(H)$ főblokk pontosan akkor indukálható Brauer-értelemben, ha $Z(G) \leq H$ és ha $g \notin Z(G)$, akkor p osztója a $|g^G \cap Z(H)|$ számnak. Ha $H \lhd G$, akkor $Z(G) \leq H$ szükséges és elégséges b^G létezéséhez.*

Néhány feltétel, amely azt biztosítja, hogy **semmilyen értelemben** se legyen értelmezve a blokk indukció:

4.9. **Tétel.** *Legyen H p-részcsoportja G-nek. Tegyük fel, hogy $Z(\mathrm{N}_G(H))$ tartalmaz egy nemtriviális p'-elemet. Ekkor $b_0(H)$ nem indukálható egyik értelemben sem.*

4.10. **Tétel.** *Legyen $G = H \times K$, ahol K nemtriviális p'-csoport. Ekkor H egyetlen blokkján sem értelmezhető egyik blokk indukció sem.*

4.11. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy p-részcsoportok egy lánca $P_1 < \ldots, < P_n$ **radikál p-lánc**, ha $P_i = \mathrm{O}_p(\mathrm{N}_G(C_i))$ minden $1 \leq i \leq n$ indexre, ahol $C_i : P_i < \ldots, < P_n$, az i-edik hátulsó részlánc.

4.12. **Definíció.** Legyen $H \leq G$ és $b \in \mathrm{Bl}(H)$. Azt mondjuk, hogy b **lépésenként Green**, ha van egy $H = H_1 < H_2 < \cdots < H_n = G$ részcsoportlánc és $b_i \in \mathrm{Bl}(H_i)$ blokkok, hogy $b_1 = b$ és $b_i = b_{i-1}^{Gr(H_i)}$, $i = 2, \ldots, n$-re.

A következőket láttuk be:

- p-részcsoportok láncának normalizátora **mindig lépésenként Green**.

- Bár a Green-indukció létezése maga után vonja az Alperin-Burry indukció létezését, ez a **lépésenkénti Green indukcióra nem igaz**.
- Ismert volt, hogy Brauer-indukció és p-reguláris indukció, valamint a kiterjesztett indukció **tranzitív**. Példát mutattuk arra, hogy a Green, az Alperin-Burry, és az egy multiplicitású indukció **nem feltétlenül tranzitív**.
- Ismert volt, hogy p-részcsoport láncok normalizátoráról a Brauer-indukció **minding értelmes**. Példát adunk arra, hogy Alperin-Burry valamint Green-indukcióra **ez nem feltétlen teljesül**.
- Radikál p-láncok normalizátoráról a **Green-indukció értelmes**. Hasonló eredmény igaz **elemi** p-láncokra, és **normális** p-lácokra is.
- Megmutattuk, hogy a **Dade-sejtések** igazolásánál a Brauer-indukciót **kicserélhetjük** akármelyik másik indukció fogalomra, kivéve a karakter indukciót. A karakter indukció esetére ellenpéldát mutatunk.

5. Tézis - Defektcsoportok, konjugáltosztályok és a Robinson-leképezés [5]

Bebizonyítjuk a Brauer-Nesbitt-tétel általánosítását. Egyúttal új bizonyítást adunk az eredeti tételre is. Tanulmányozzuk a Robinson-leképezést, valamint azonos defektcsoportú p-reguláris konjugáltosztályok és blokk idempotensek kapcsolatát. Jellemezzük a defektosztályokat és azon osztályösszegeket, amelyek képe a Brauer-homomorfizmusnál nem nilpotens.

Legyen (K, R, F) p-moduláris rendszer. Tegyük fel, hogy K, F felbontási testje a G véges csoport minden részcsoportjának.

5.1. **Jelölés.** $\mathrm{Bl}(G)$, $\mathrm{Bl}(G|d)$, $\mathrm{Bl}(G|D)$ jelöli a G csoport **p-blokkjai, a d-defektű p-blokkjai, valamint a D defektcsoportú p-blokkjai** halmazát.
$\mathrm{Cl}(G^0)$, $\mathrm{Cl}(G^0|d)$, $\mathrm{Cl}(G^0|D)$ jelöli a G csoport **p-reguláris konjugáltosztályai** halmazát, valamint azon részhalmazait, amelyek d **defektűek, illetve** D **defektcsoporttal** rendelkeznek. Ezen kívül $\mathrm{Cl}(G|D)$ a D **defektcsoportú** G-konjugáltosztályok halmaza, $\mathrm{dCl}(G^0|B)$ jelöli a B **blokk defektosztályai** halmazát, $\mathrm{dCl}(G^0|D)$ pedig a D **defektcsoportú defektosztályai** halmazát. (Lásd 1.4 Definíció.)
e_B^* a B blokkhoz tartozó **centrális idempotens** $\mathrm{Z}(FG)$-ben,
$\omega_B^* : \mathrm{Z}(FG) \to F$ a B **blokkhoz tartozó centrális homomorfizmus**.
$\beta_B^*(C)$ a C^+ **együtthatója** e_B^*-ban. (Lásd 1. Tézis).

Ismert, hogy az e_B^* blokk idempotensre $e_B^* = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G^0)} \beta_{B^*}(C) C^+$.

5.2. **Definíció.** A **Robinson-leképezés** $\mathrm{R} : \mathrm{Z}(FG) \to \mathrm{Z}(FG)$, az a leképezés, amelyre $\mathrm{R}(x) = \sum_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \omega_{B^*}(x) e_{B^*}$

Ez egy projekció $\mathrm{Z}(FG)$-ről $\mathrm{Id}(\mathrm{Z}(FG))$-re, ahol $\mathrm{Id}(\mathrm{Z}(FG))$ jelöli azt az alteret $\mathrm{Z}(FG)$-ben, amelyet FG centrálisan primitív idempotensei feszítenek ki. Ekkor $\mathrm{Z}(FG) = \mathrm{Id}(\mathrm{Z}(FG)) \oplus \mathrm{J}(\mathrm{Z}(FG))$ mint vektortér direkt összeg.

5.3. **Jelölés.** Legyen $K, L \in \mathrm{Cl}(G^0)$, $P \in Syl_p(G)$ és $\Omega_{K,L}\{(y, z) \in K \times L |\ Py = Pz\}$.

Ismert, hogy

$$\mathrm{R}(L^+) = \sum_{K \in Cl(G^0)} (\frac{|\Omega_{K,L}|}{|K|})^* K^+$$

és

$$(\frac{|\Omega_{K,L}|}{|K|})^* = \sum_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \omega_B^*(L^+) \beta_B^*(K)$$

.

5.4. **Tétel** (**R. Gow, J. Murray**). *Jelölje* $\overline{K}$ *a* K *konjugáltosztálybeli elemek* **inverzei által meghatározott** *konjugáltosztályt. Ekkor*

$$\beta_B^*(K) = (\dim(B)/|G||K|)^* \omega_B^*(\overline{K}^+).$$

Ismert, hogy **általában** $|\mathrm{Bl}(G|D)| \leq |\mathrm{Cl}(G^0|D)|$.
Viszont $D \in Syl_p(G)$ esetén **egyenlőség** van:

5.5. **Tétel** (**BRAUER-NESBITT**). *Ha* $P \in Syl_p(G)$*, akkor*

$$|\mathrm{Bl}(G|P)| = |\mathrm{Cl}(G^0|P)|$$

.

Ennek **általánosítása** a következő tételünk:

5.6. **Tétel.** *Legyen* D *az* G *véges csoport egy* p*-részcsoportja.*

(i) *Ekkor* $|\mathrm{Cl}(G^0|D)| - |\mathrm{Bl}(G|D)| \leq |\mathrm{Cl}(D\mathrm{C}_G(D)^0|D)| - |\mathrm{Bl}(D\mathrm{C}_G(D)^0G|D)|$ *teljesül.*

(ii) *Speciálisan, ha* $|\mathrm{Cl}(D\mathrm{C}_G(D)^0|D)| = |\mathrm{Bl}(D\mathrm{C}_G(D)|D)|$*, akkor* $|\mathrm{Cl}(G^0|D)| = |\mathrm{Bl}(G|D)| = |\mathrm{dCl}(G^0|D)$.

(iii) *Ha* $D\mathrm{C}_G(D)$ p*-nilpotens, akkor* $|\mathrm{Cl}(D\mathrm{C}_G(D)^0|D)| = |\mathrm{Bl}(D\mathrm{C}_G(D)^0G|D)|$*, tehát* $|\mathrm{Cl}(G^0|D)| = |\mathrm{Bl}(G|D)| = |\mathrm{dCl}(G^0|D)$.

A p**-nilpotens csoportokat** jellemzi a következő eredményünk:

5.7. **Tétel.** *Ekvivalensek egy* G *véges csoportra:*

(i) G p*-nilpotens*

(ii) *A* p*-reguláris elemek által generált részalgebra* FG*-ben féligegyszerű.*

(iii) $\mathrm{R}(L^+) = L^+$ *minden* L p*-reguláris konjugáltosztályra.*

(iv) G p*-blokkjai száma megegyezik a* p*-reguláris konjugáltosztályai számával.*

5.8. **Következmény.** G *pontosan akkor* p*-nilpotens, ha minden* $D \leq G$ p*-részcsoportra* $|\mathrm{Cl}(G^0|D)| = |\mathrm{Bl}(G|D)|$*. Ekkor ez* $|\mathrm{dCl}(G^0|D)$*-vel is megegyezik.*

Beláttuk még:

- Minden maximális defektű p-reguláris konjugáltosztály **defektosztálya a főblokknak**.
- Példát adtunk arra, hogy **más maximális defektű blokkoknál** létezhet olyan maximális defektű konjugáltosztály, amely **nem defektosztálya a blokknak**.
- Minden K **defektosztályra** $\mathrm{Br}_D(K^+)$ **nem nilpotens**.
- A $\mathrm{Cl}(G^0|D)$ és a $\mathrm{Cl}(\mathrm{N}_G(D)^0|D)$ közötti $K \to K \cap \mathrm{C}_G(D)$ bijekció, **bijekciót indukál a defektosztályokon** is B és a Brauer-megfeleltetett b blokkjára nézve.
- $|\mathrm{Bl}(G|D)|$ **felülről becsülhető** azon D defektcsoportú C konjugáltosztályok számával, ahol $\mathrm{Br}_D(C^+)$ nem nilpotens.

Négyféle típusa van konjugáltosztályösszegeknek:

(1) K^+ nilpotens,
(2) K^+ nem nilpotens de $\mathrm{Br}_D(K^+)$ nilpotens,
(3) $\mathrm{Br}_D(K^+)$ nem nilpotens és K defektosztálya valamely blokknak,
(4) $\mathrm{Br}_D(K^+)$ nem nilpotens és K nem defektosztálya egyik blokknak sem.

A következő tétel **jellemzi** azon konjugáltosztályokat, amelyek a (3) **vagy a** (4) kategóriába esnek:

5.9. **Tétel.** *Legyen* $K \in Cl(G^0|D)$. *Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) $\mathrm{Br}_D(K^+)$ *nem nilpotens.*
(ii) $\beta_B^*(K^{+1}) \neq 0$ *valamely* $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$ *blokkra.*
(iii) $\omega_B^*(K^+) \neq 0$ *valamely* $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$ *blokkra.*

Nulla defektű blokkokra kaptuk:
Legyen $B \in \mathrm{Bl}(G|1)$, $C \in \mathrm{Cl}(G^0|1)$ $x \in C$ és $\mathrm{Irr}(B) = \{\chi\}$. Ekkor

(i) $\omega_B^*(C^+) \neq 0$ pontosan akkor, ha $\chi(x)^* \neq 0$
(ii) $\beta_B^*(C) \neq 0$ pontosan akkor, ha $\overline{\chi(x)}^* \neq 0$
(iii) C defektosztálya B-nek pontosan akkor, ha $(|\chi(x)|^2)^* \neq 0$.

Példát mutattunk arra, hogy:

- $\mathrm{dCl}(G^0|D)| < |\mathrm{Bl}(G|D)|$ előfordulhat.
- A (4)-beli típus elő is fordul.

Ez a példa egyben egy hibára mutat rá I. M. Isaacs: Character theory of finite groups c. könyvében (Problem (15.6)).

Mivel $\mathrm{Z}(FG) = \mathrm{Id}(\mathrm{Z}(FG)) \oplus \mathrm{J}(\mathrm{Z}(FG)))$ mint F-vektortér, ezért minden K^+ **osztályösszeg előáll** mint blokk idempotensek F-lineáris kombinációja plusz egy nilpotens elem. Nevezetesen $K^+ = \sum_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \omega_B^*(K^+)K^+ + N$, ahol N nilpotens elem.

5.10. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy e_B^* **blokk idempotens előfordul** K^+**-ban**, ha $\omega_B^*(K^+) \neq 0$.

Az **előfordulásokkal kapcsolatban** beláttuk:

5.11. **Tétel.** *Legyen* G *véges csoport,* $D \leq G$ *p-részcsoport.*

(i) *Legyen* $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$, *ekkor ekvivalensek:*
  - e_B^* *pontosan* k *darab p-reguláris,* D *defektcsoportú konjugáltosztályösszegben fordul elő*
  - e_B^**-ban pontosan* k *darab* D *defektcsoportú konjugáltosztályössszeg fordul elő*

(ii) *Legyen* $K \in \mathrm{Cl}(G^0|D)$, *ekkor ekvivalensek:*
  - K^+ *pontosan* k *darab* D *defektű blokk idempotensében fordul elő*
  - K^+*-ban pontosan* k *darab* D *defetcsoportú blokk idempotense fordul elő*

A **defektosztályok jellemzését** adtunk a Robinson-leképezés segítségével:

5.12. **Tétel.** *Legyen* $K \in \mathrm{Cl}(G^0|D)$. *Ekkor* K *pontosan akkor defektosztály, ha*

$$\mathrm{R}(\mathrm{Br}_D(K^+))\mathrm{R}(\mathrm{Br}_D(\overline{K}^+)) \neq 0.$$

Tehát K *pontosan akkor defektosztály, ha*

$$\mathrm{Br}_D(K^+)\mathrm{Br}_D(\overline{K}^+)$$

nem nilpotens.

5.13. **Következmény.** *Legyen* $K \in \mathrm{Cl}(G^0|D)$, $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$, $\overline{K}$ *legyen a* K*-beli elemek inverzeiből álló konjugáltosztály,* $\overline{B}$ *pedig a b-beli karakterek komplex konjugáltjait tartalmazó blokk. Ekkor:*

(i) K *pontosan akkor defektosztálya* B*-nek, ha* e_B^* *előfordul* K^+*-ban és* $\overline{K}^+$*-ban is.*

(ii) K *pontosan akkor defektosztálya* B*-nek, ha* K^+ *és* $\overline{K}^+$ *is előfordul* e_B^**-ban.*

(iii) K *pontosan akkor defektosztálya* B*-nek, ha* $\overline{K}$ *defektosztálya* B*-nek.*

(iv) K *pontosan akkor defektosztálya* B*-nek, ha* $\overline{K}^+$ *előfordul* e_B^**-ban és* $e_{\overline{B}}^*$*-ban is.*

(v) K *pontosan akkor defektosztálya* B*-nek, ha* e_B^* *és* $e_{\overline{B}}^*$ *is előfordul* $\overline{K}^+$*-ban.*

(vi) K *pontosan akkor defektosztálya* B*-nek, ha defektosztálya* $\overline{B}$*-nek.*

6. Tézis - Szimmetrikus algebrák centrális ideáljai és Cartan-invariánsai [6]

Egy algebrailag zárt, p-karaktisztikájú, szimmetrikus A algebra centrumának bizonyos ideáljait vizsgáljuk. Többek között a Higman-ideált és a Reynolds-ideált. Ezek szoros kapcsolatban állnak az A algebrán definiált p-hatványozás leképezéssel. Ezen ideálok bizonyos tulajdonságait általánosítjuk a csoportalgebra esetéről szimmetrikus algebrákra. A $p = 2$ esetben ezek az ideálok kapcsolatba hozhatók az A algebra Cartan-mátrixának páratlan diagonális elemeivel.

6.1. **Definíció.** Egy A_F véges dimenziós algebra F test felett **szimmetrikus algebra**, ha létezik olyan $(,) : A \times A \to F$ nem elfajuló, bilineáris függvény, amely **asszociatív**, azaz $(ab, c) = (a, bc)$, minden $a, b, c \in A$ elemre,
és **szimmetrikus**, azaz $(a, b) = (b, a)$, minden $a, b \in A$ elemre.

Például:

- minden F test feletti $M_n[F]$ mátrixalgebra szimmetrikus: $(a, b) := tr(ab)$.
- Minden G véges csoportra az FG csoportalgebra szimmetrikus algebra: $(g, h) := \delta_{g,h^{-1}}$.

6.2. **Definíció.** Legyen A_F szimmetrikus algebra F p-karakterisztikájú algebrailag zárt test felett.

- A $\mathrm{K}A$ **kommutátor-altér**, az $ab - ba$ A-beli kommutátorok által generált altér. Legyen $\mathrm{Z}A$ az A algebra centruma. Ekkor a $\mathrm{K}A$ altér egyben $\mathrm{Z}A$-részmodulusa is A-nak.
- Legyen $\mathrm{T}_0A := \mathrm{K}A$, $\mathrm{T}_nA := \{x \in A | x^{p^n} \in \mathrm{K}A\}$.
- Z_0A az A azon **blokkjai (felbonthatatlan kétoldali ideáljai) centrumainak** összege, amelyek egyszerű F-algebrák.

- Legyen $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_n$ A egy **duális bázispárja**, az az $(a_i, b_j) = \delta_{i,j}$. A **nyom leképezés** $\tau : A \to A$, melyre $x \mapsto \sum_{i=1}^n b_i x a_i$. A **Higman-ideáljának** nevezzük $\tau(A)$-t. Jele $\mathrm{H}A$. A **Reynolds-ideáljának** nevezzük, és $\mathrm{R}A$-val jelöljük, $\mathrm{Z}A \cap \mathrm{S}A$-t, ahol $\mathrm{S}A$ az A **talpa**, A-t bal- vagy jobboldali A-modulusnak tekintve.

Ekkor B. Külshammer korábbi eredményeiből ismert, hogy:

- $\mathrm{K}A = T_0A \subseteq T_1A \subseteq \cdots$ $\mathrm{Z}A$-részmodulusok növő lánca;
- $\sum_n \mathrm{T}_nA = \mathrm{J}A + \mathrm{K}A$;
- Létezik n nemnegatív egész szám, hogy $\mathrm{T}_nA = \mathrm{J}A + \mathrm{K}A$.
- A minden $\mathrm{Z}A$-részmodulusának merőlegese $\mathrm{Z}A$-modulus
- $\mathrm{Z}A = \mathrm{K}A^\perp = \mathrm{T}_0A^\perp \supseteq \mathrm{T}_1A^\perp \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{R}A \supseteq \mathrm{H}A \supseteq \mathrm{Z}_0A \supseteq 0$ $\mathrm{Z}A$-részmodulusok, azaz centrális ideálok sorozata. ($\mathrm{T}_iA^\perp$ neve **általánosított Reynolds-ideál**)
- Ha I ideál A-ban, akkor $I^\perp$ is ideál. $\mathrm{J}A^\perp = \mathrm{S}A$.
- $\cap_{n=0}^\infty \mathrm{T}_nA^\perp = \mathrm{R}A$.
- Minden n természetes számra és $z \in \mathrm{Z}A$ elemre létezik egyetlen $\zeta_n(z) \in \mathrm{Z}A$, hogy $(\zeta_n(z), x)^{p^n} = (z, x^{p^n})$ teljesül minden $x \in A$-ra. Ekkor egy $\zeta_n : \mathrm{Z}A \to \mathrm{Z}A$ leképezést kapunk.

Bebizonyítottuk:

6.3. **Tétel.** *Legyen A szimmetrikus F-algebra, ahol F p-karakterisztikájú, algebrailag zárt test. Ekkor:*

(i) $(\mathrm{T}_1A^{\perp})^2 \subseteq \mathrm{H}A$.
(ii) $(\mathrm{T}_1A^{\perp})(\mathrm{T}_2A^{\perp}) = (\mathrm{T}_1A^{\perp})^3 = \mathrm{Z}_0A$.
(iii) *Ha p páratlan, akkor* $(\mathrm{T}_1A^{\perp})^2 = \mathrm{Z}_0A$.
(iv) *Ha $p = 2$, akkor* $(\mathrm{T}_1A^{\perp})^2 = \mathrm{Z}A \cdot \zeta_1(1)^2$, *és A minden B blokkjára teljesül, hogy:* $\mathrm{Z}B\zeta_1(1)^2 = F\zeta_1(1)^2 1_B$.

Beláttuk még:

- Ha A blokk, és $m \neq 0 \neq n$, akkor $(\mathrm{T}_nA)^{\perp}(\mathrm{T}_mA)^{\perp} = F\zeta_n(1)\zeta_m(1)$,
- Általában $(\mathrm{T}_nA)^{\perp}(\mathrm{T}_mA)^{\perp} = \mathrm{Z}A\zeta_n(1)\zeta_m(1)$, ha $m \neq 0 \neq n$, azaz a szorzat egy főideál $\mathrm{Z}A$-ban.
- ha p páratlan és $m + n > 2$, akkor $(\mathrm{T}_nA)^{\perp}(\mathrm{T}_mA)^{\perp}$ dimenziója megegyezik A egyszerű blokkjai számával.

2-karakterisztikában beláttuk:

6.4. **Tétel.** *Legyen A egy szimmetrikus algebra 2-karakterisztikájú, algebrailag zárt F test felett. Legyen e egy primitiv idempotens A-ban. Ekkor ekvivalensek:*

(1) $\dim(eAe)$ *páros*
(2) $e\zeta_1(1)^2 = 0$
(3) $(e, \zeta_1(1)^2) = 0$

6.5. **Definíció.** Az A algebra **Cartan-mátrixának** nevezzük azt a $C = (c_{i,j})$ mátrixot, melyre $c_{i,j} = \dim(e_iAe_j)$, ahol $i, j = 1, \ldots, l$ és $e_1, \ldots, e_l$ A primitív idempotensei, ahol $Ae_1, \ldots, Ae_l$ a projektív felbonthatatlan baloldali A-modulusok izomorfia típusainak egy reprezentáns rendszere. A $c_{i,j}$ nemnegatív egész számokat az A algebra **Cartan-invariánsainak** nevezzük.

Ismert, hogy az A algebra Cartan-mátrixa szimmetrikus mátrix.

6.6. **Következmény.** *A fenti A algebra Cartan-mátrixára ekvivalensek:*

- *valamely i-re c_{ii} páratlan*
- $\zeta_1(1)^2 \neq 0$

Legyen $e_1, \ldots, e_l$ mint fent, legyen $e_{l+1}, \ldots, e_n$ $\mathrm{J}A + \mathrm{K}A$ egy bázisa. Ekkor $e_1, \ldots, e_n$ A-nak bázisa. Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ehhez tartozó duális bázis. Ekkor $r_1 := b_1, \ldots, r_l := b_l$ a $(\mathrm{J}A + \mathrm{K}A)^{\perp} = \mathrm{S}A \cap \mathrm{Z}A = \mathrm{R}A$ egy bázisa. Beláttuk a következőt:

6.7. **Tétel.** *A fenti jelölések mellett*

$$\zeta_1(1)^2 = \sum_{i=1}^{l} \dim(e_iAe_i) \cdot r_i$$

és $\zeta_1(1)^2 e_i = \dim(e_iAe_i) \cdot e_ir_i$, *ahol* $e_ir_i \neq 0$ $i = 1, \ldots, l$ *esetén.*

Beláttuk még:

Legyen τ a Higman-ideál definíciójában szereplő leképezés Ekkor $(\tau(e_i), e_j) = \dim(e_iAe_j) \cdot 1_F$ $i, j = 1, \ldots, l$.

Beláttuk a $T_n A^\perp$ $\mathrm{Z}A$-beli ideálok **Morita-invarianciáját**:

6.8. **Tétel.** *Legyen B egy szimmetrikus F-algebra, ahol F algebrailag zárt és $p > 0$ karakterisztikájú. Legyen A egy vele Morita-ekvivalens algebra. Ekkor létezik egy F-algebra izomorfizmus $\mathrm{Z}A$ és $\mathrm{Z}B$ között, amely minden n természetes számra $\mathrm{T}_n A^\perp$-et $\mathrm{T}_n B^\perp$-re képezi.*

7. Tézis - Csoportalgebrák Cartan-invariánsai és centrális ideáljai [7]

Bebizonyítjuk, hogy 2-karakterisztikában egy véges csoport Cartan-mátrixa pontosan akkor tartalmaz páratlan diagonális elemet, ha G tartalmaz valós, nulla 2-defektű elemet. Az eredményeket alkalmazzuk a szimmetrikus csoportokra valamint normális, illetve Abel-féle defektcsoportú blokkokra. Foglalkozunk még csoportalgebrák és blokkok centrumában lévő ideálok anullátoraival is.

Legyen (K, R, F) p-moduláris rendszer, ahol R teljes diszkrét értékelésgyűrű, nulla karakterisztikájú K hányadostesttel és p karakterisztikájú F maradékosztálytesttel. Legyen K és F algebrailag zárt.

- Jelölje G_p **a G csoport p-elemei** halmazát.
- Legyen $X \subseteq G$ esetén $X^+ := \sum_{x\in X} x \in FG$. és $X^{p^{-n}} := \{y \in G | y^{p^n} \in X\}$
- Legyen $\zeta_n : \mathrm{Z}FG \to \mathrm{Z}FG$ az a leképezés, mely minden $z \in \mathrm{Z}FG$-hez azt az egyetlen $\mathrm{Z}FG$-beli $\zeta_n(z)$ elemet rendeli, melyre $(\zeta_n(z), x)^{p^n} = (z, x^{p^n})$, minden $x \in FG$ esetén. Itt $(,)$ az FG-ben természetesen definiált szimmetrizáló bilineáris függvény.(Lásd: 6. Tézis)
- Egy $g \in G$ elem **valós**, ha G-konjugált az inverzéhez.
- Egy $g \in G$ elem **nulla p-defektű**, ha $|\mathrm{C}_G(g)|$ nem osztható p-vel.
- R_G jelöli G **nulla p-defektű, valós elemei** halmazát.

Y. Tsushima belátta, hogy

$$\mathrm{JZ}FG = \{z \in \mathrm{Z}FG |\ zG_p^+ = 0\}$$

és

$$(G_p^+)^2 = \sum_{B\in \mathrm{Bl}(G|0)} 1_B.$$

Bebizonyítottuk a következőt:

7.1. **Tétel.** *Legyenek l, m, n nemnegatív egész számok. Ekkor:*

(i) $\zeta_n(C^+) = (C^{p^{-n}})^+$ *minden* $C \in \mathrm{Cl}(G)$ *konjugáltosztályra.*
(ii) $\zeta_n(1)1_B = 1_B$, *minden* $B \in \mathrm{Bl}(G|0)$ *blokkra.*
(iii) $\zeta_1(1)\zeta_1(1) = R_G^+$, *ha* $p = 2$.
(iv) $\zeta_m(1)\zeta_n(1) = \sum_{B\in\mathrm{Bl}(G|0)} 1_B$, *ha* $p > 2$ *vagy* m, n *egyike nem* 1.
(v) $\zeta_l(1)\zeta_m(1)\zeta_n(1) = \sum_{B\in\mathrm{Bl}(G|0)} 1_B$.

7.2. **Következmény.** *Legyen FG mint fent. Ekkor:*

(i) *Ha p páratlan, akkor* $(\mathrm{T}_1FG^\perp)^2 = \mathrm{Z}_0FG$.
(ii) *Ha* $p = 2$, *akkor* $(\mathrm{T}_1FG^\perp)^2 = \mathrm{Z}FG \cdot R_G^+$.
(iii) *Ha* $p = 2$, *akkor minden* $B \in \mathrm{Bl}(FG)$ *blokkra* $\mathrm{Z}B \cdot R_G^+ = F \cdot R_G^+1_B$. *Speciálisan,* $\dim(\mathrm{T}_1FG^\perp)^2$ *azon FG-beli B blokkok száma, melyekre* $R_G^+ \cdot 1_B \neq 0$.

Az előzőekből és a 6. Tézisbeli eredményekből kapjuk:

7.3. **Tétel.** *Legyen* $p = 2$, *legyen* $e \in FG$ *primitív idempotens és* $B \in \mathrm{Bl}(FG)$ *blokk. Ekkor:*

(i) $\dim(eFGe)$ *pontosan akkor páratlan, ha* $R_G^+e \neq 0$.
(ii) *A B blokk Cartan-mátrixa pontosan akkor tartalmaz páratlan diagonális elemet, ha* $R_G^+1_B \neq 0$

(iii)) *FG Cartan-mátrixa pontosan akkor tartalmaz páratlan diagonális elemet, ha G tartalmaz nulla defektű valós elemet.*

A 6. Tézisben megkonstruált $e_i \in FG$, $i = 1, \ldots, l$ primitív idempotensekre és r_i $i = 1, \ldots, l$ RFG-beli bázisra kaptuk:

7.4. **Tétel.** *Ha $p = 2$, akkor $R_G^+ = \sum_{i=1}^{l} (\dim e_i FG e_i) \cdot r_i$*

7.5. **Megjegyzés.** Legyenek A és B perfekt izomorf 2-blokkok egy G és egy H véges csoportban. Ekkor A Cartan-mátrixa pontosan akkor tartalmaz páratlan diagonális elemet, ha B Cartan-mátrixa tartalmaz.

Az S_n szimmetrikus csoportok komplex irreducibilis reprezentációi cimkézhetőek az n partícióival. Egy Young-diagram **p-magja** (p-core), az a diagram amelyet a diagram pereméről egymás után eltávolított **p-hosszú kampók** (rim hook) után kapunk oly módon, hogy további p-hosszú peremen lévő kampó nincs már. A p-mag **egyértelmű**. S_n két irreducibilis komplex karaktere pontosan akkor van ugyanabban a p-blokkban, ha hozzájuk tartozó partíciók p-magjai egyenlőek. A blokk **súlya** w, a hozzá tartozó σ partíció súlya, ami azt jelenti, hogy w darab p hosszú peremkampót kell eltávolítani σ-ból, amíg el en jutunk a σ p-magjához.

Szimmetrikus csoportok 2-blokkjaira kaptuk:

7.6. **Tétel.** *Az S_n szimmetrikus csoport B 2-blokkjának Cartan-mátrixa pontosan akkor tartalmaz páratlan diagonális elemet, ha a B blokk w súlya páros.*

Egy m pozitív egész szám **háromszögszám**, ha $m = k(k+1)$ alakú, valamely k természetes számra.

7.7. **Következmény.** *$G = S_n$ és $p = 2$ esetén az $R_G^+ \cdot$ ZFG dimenziója egyenlő azon $0 \le m \le n$ háromszögszámokkal, melyekre $n - m$ osztható 4-gyel.*

További eredmények **normális defektcsoportra** és **elemi Abel 2-Sylowra**:

7.8. **Tétel.** *Tegyük fel, hogy B egy G véges csoport 2-blokkja, melynek D defektcsoportja nemtriviális normálosztó. Ekkor a B blokk Cartan-mátrixának minden diagonális eleme páros.*

7.9. **Tétel.** *Legyen G véges csoport elemi Abel 2-Sylow részcsoporttal. Ekkor minden páratlan diagonális Cartan-invariáns (2 karakterisztikában) nulla-defektű blokkhoz tarozik, és egyenlő 1-gyel.*

Vizsgáltuk még, hogy $z \in$ ZFG-re és minden n-re ekvivalensek-e?

(1) $z^{p^n} = 0$;

(2) $z(C^{p^{-n}})^+ = 0$ minden $C \in \mathrm{Cl}(G)$-re;

(3) $z([1]^{p^{-n}})^+ = 0$

Példákat konstruáltunk arra, hogy (3)-ból nem feltétlen következik (2), hogy (3)-ból nem feltétlenül következik (1), hogy (2)-ből nem feltétlenül következik (1), $p = 2$ esetén. $p = 3$-ra olyan példát adtunk, ahol ugyan (1) és (2) ekvivalensek, de (3)-ból nem következik (2). De mutattunk olyan pédát is, ahol (1) és (2) nem ekvivalensek páratlan p esetén.

8. TÉZIS - GALOIS-HATÁSOK BLOKKOKON ÉS KONJUGÁLTOSZTÁLYOKON [8]

Galois-hatásokat vizsgálunk blokkokon és konjugáltosztályokon. Kiterjesztünk bizonyos eredményeket, amelyek igazak a komplex konjugálás esetén. Ellenpéldákat adunk, ahol a kiterjesztés nem lehetséges. Reynolds egy sejtésére negatív választ adunk. p-edrendű Galois-automorfizmusokra bevezetjük a σ-mag fogalmát. Jellemezzük azon véges csoportokat, ahol a σ-mag p'-rendű.

Legyen G véges csoport, legyen (K, R, F) p-moduláris rendszer, amelyben K, F is felbontási testje G minden részcsoportjának. Legyen $* : R \to F$ az a **leképezés, amely minden R-beli elemet mod** $\mathrm{J}(R)$ tekint. Legyen $n = \exp(G)$, $\mathbb{Q}_n := \mathbb{Q}(\theta)$, ahol θ komplex primitív n-edik egységgyök.

Legyen $\sigma : \theta \to \theta^i$ a $Gal(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ **Galois-csoport egy eleme**. **Rögzítsük $i = i(\sigma)$-t**. Legyen $i' := i(\sigma^{-1})$. Ekkor $(i, |G|) = 1 = (|G|, i')$.

- Azt mondjuk, hogy egy $g \in G$ **elem σ-invariáns**, ha $g^i = g$.
- C^σ a **C-beli elemek i-edik hatványai** által alkotott konjugáltosztály, $(C^\sigma)^+$ pedig ennek osztályösszege.
- σ **algebra automorfizmust** indukál $\mathbb{Z}(RG)$-n és $\mathbb{Z}(FG)$-n.
- σ **permutálja a blokk idempotenseket** is: $(e_B)^\sigma := e_{B^\sigma}$.
- $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ esetén $\chi^\sigma(g) := \chi(g^{i'})$, hogy a Brauer-permutációs lemma igaz legyen.
- $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ pontosan akkor, ha $\chi^\sigma \in \mathrm{Irr}(B^\sigma)$.
- B **σ-invariáns** pontosan akkor, ha $(e_B^*)^\sigma = e_B^*$.
- $\omega_{B^\sigma}^*(C^+) = \omega_B^*((C^{\sigma^{-1}})^+)$ és $\beta_{B^\sigma}^*(C^+) = \beta_B^*((C^{\sigma^{-1}})^+)$.
- Ha $i = -1$, akkor σ komplex konjugálással hat a karaktereken, $\overline{B}$ a konjugált blokk, $\overline{C}$ a C osztály elemei inverzeinek konjugáltosztálya.
- $\mathrm{Bl}(G), \mathrm{Bl}(G|D), r\mathrm{Bl}(G|D), \sigma i\mathrm{Bl}(G|D)$ jelöli G **p-blokkjait, D-defektcsoportú blokkjait, D defektcsoportú, valós blokkjait és D defektcsoportú σ-invariáns blokkjait**.
- $\mathrm{Cl}(G^0|D), \mathrm{dCl}(G^0|D), r\mathrm{Cl}(G^0|D), \sigma i\mathrm{Cl}(G^0|D)$ jelölik:**a D defektcsoportú, p-reguláris konjugáltosztályokat, ezen belül a defektosztályokat, a valós konjugátosztályokat, a σ-invariáns osztályokat**

Beláttuk, hogy:

σ felcserélhető:

- a karakterindukcióval,
- a Brauer-féle blokk indukcióval,
- konjugáltosztályok Brauer-megfeleltetésével,
- blokkok Brauer-megfeleltetésével,
- a Robinson-leképezéssel.

8.1. **Következmény.** *Legyen σ mint fent. Ekkor:*

- *A Brauer-megfeleltett blokk pontosan akkor σ-invariáns, ha az eredeti blokk ilyen.*
- *a Brauer-megfeleltett konjugáltosztály pontosan akkor σ-invariáns, ha az eredeti konjugáltosztály ilyen.*
- *Egy defektosztánly σ-képe a képblokk defektosztálya.*

Az 5. Tézisbeli állítások analogonja például:

8.2. **Tétel.** *A fenti jelölésekkel:*

(i) $|r\mathrm{Bl}(G|D)| \leq |\mathrm{dCl}(G^0|D)|$, *azaz a* D *defektcsoportú valós* 2*-blokkok száma legfeljebb annyi, mint a* 2*-reguláris,* D *defektcsoportú defektosztályok száma. Analóg állítás nem igaz az általános esetben.*

(ii) *Legyen* σ p*-hatványrendű. Ekkor a* G *csoport* D *defektcsoportú* σ*-invariáns* p*-blokkjai száma legfeljebb annyi, mint azon* p*-reguláris,* σ*-invariáns,* D *defektcsoportú,* C *konjugáltosztályok száma, melyekre* $\mathrm{Br}_D(C^+)$ *nem nilpotens.*

1971-ben W. J. Reynolds vetette fel:

8.3. **Probléma (REYNOLDS).** Az FG csoportalgebra Jacobson-radikálja invariáns-e bizonyos Galois-automorfizmusokra.

A kérdésre **negatív** választ adtunk. Ellenpélda:

8.4. **Példa.** Legyen $G = A_5$, $p = 2$ $i(\sigma) = 27$, $F = GF(2)$. Ekkor $\mathrm{J}(FG)$ 35-dimenziós és $\mathrm{J}(FG) \cap \mathrm{J}(FG)^\sigma$ 24-dimenziós. Ebben a példában $\mathrm{J}(FG)^\sigma$ **nem ideál és tartalmaz nemnilpotens elemeket is**.

- Van **feloldható** példa is.
- Van arra is példa, hogy σ **egységet nem egységbe** visz.
- $i(\sigma) = -1$ **esetén** viszont $\mathrm{J}(R)$ σ**-invariáns**, σ ideált ideálba, egységet egységbe és nilpotens elemet nilpotens elembe visz.

Bevezettük a σ-mag és a valós mag fogalmát:

8.5. **Definíció.** Legyen G véges csoport, σ p**-edrendű** Galois-automorfizmus. A G csoport σ**-magjának** nevezzük és $\mathrm{R}_\sigma(G)$-vel jelöljük azon p**-reguláris elemek generátumát**, amelyek **konjugáltosztálya** σ**-invariáns**. A G csoport **valós magjának** nevezzük és $\mathrm{R}(G)$-vel jelöljük G 2**-reguláris , valós elemei** által generált részcsoportját.

Beláttuk:

8.6. **Tétel.** *Az előző definíció feltételei mellett:*

- $G/\mathrm{R}_\sigma(G)$ *nem tartalmaz* p*-reguláris elemeket, amelyeknek konjugáltosztálya* σ*-invariáns lenne.*
- *Minden* p*-reguláris elem* $G/\mathrm{O}_p(G)$*-ben, amelynek konjugáltosztálya* σ*-invariáns felemelhető egy* G*-beli* p*-reguláris elemmé, amelynek konjugáltosztálya* σ*-invariáns.*
- *Ha* $R_\sigma(G) = 1$*, akkor* $P \in Syl_p(G)$ *normálosztó.*
- *Ha* $P \in Syl_p(G)$ *normálosztó, akkor minden olyan* p*-reguláris elem, amelynek osztálya* σ*-invariáns,* σ*-invariáns elem.*
- $R(G) = 1$ *pontosan akkor, ha* G 2*-zárt.*

Jellemeztük a triviális σ**-magú** véges csoportokat:

8.7. **Tétel.** *Legyen* G *véges csoport,* σ p*-edrendű Galois-automorfizmus,* $i = i(\sigma)$*. Ekvivalensek:*

(i) $R_\sigma(G) = 1$.

(ii) *G feloldható, $G = PK$, ahol $P \in Syl_p(G)$ normálosztó, K komplementum P-hez és $(|K|, i-1) = 1$.*

Jellemeztük azon véges csoportokat, melyek σ-**magja** p'**-csoport:**

8.8. **Tétel.** *Ekvivalensek:*

(i) *$G = \mathrm{O}_{p',p,p'}(G)$ és ha $\overline{G} = G/\mathrm{O}_{p'}(G)$ és $\overline{P} \in Syl_p(\overline{G})$, melyre $\overline{G} = \overline{PK}$, ahol $\overline{K}$ komplementum $\overline{P}$-hez $\overline{G}$-ben, akkor $(i-1, |\overline{K}|) = 1$.*

(ii) *a $R_\sigma(G)$ p'-csoport.*

8.9. **Tétel.** *Ekvivalensek:*

(i) *G feloldható és $G = \mathrm{O}_{2',2,2'}(G)$.*

(ii) *a $R(G)$ páratlan rendű csoport.*

Egy véges G csoport minden irreducibilis F-reprezentációjához ekvivalencia erejéig egyételműen hozzárendelhető egy $\phi : G^0 \to \mathrm{C}$ osztályfüggvény, amelyet **irreducibilis Brauer-karakternek** nevezünk. Ezek halmazát $\mathrm{IBr}(G)$-vel jelöljük. Ezeket szintén **blokkokhoz** lehet rendelni, így kapjuk az $\mathrm{IBr}(B)$ halmazokat. Ezen kívül az FG csoportalgebra minden **felbonthatalan projektív komponensének radikál szerinti faktora egyszerű** FG**-modulus**. A hozzá tartozó felbonthatatlan projektív modulust **fel lehet emelni** RG **egy felbonthatatlan projektív modulusává**, melynek karakterét **projektív felbonthatatlan karakternek** nevezzük. Az egyszerű FG-modulusok és a projektív felbonthatatlan FG-modulusok valamint RG-modulusok izomorfia típusai kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben vannak, így minden **projektív felbonthatatlan karakter indexelhető egy irreducibilis Brauer-karakterrel**. Ha $\phi \in \mathrm{IBr}(G)$, akkor Φ_ϕ jelöli a hozzá tartozó projektív felbonthatatlan karaktert.

Megjegyezzük, hogy σ **nem feltétlenül hagyja** $\mathrm{IBr}(G)$**-t invariánsan**. Bebizonyítottuk **Gow és Willems egy tételének analogonját**:

8.10. **Tétel.** *Legyen G véges csoport, legyen σ p-edrendű Galois-automorfizmus, amely $\mathrm{IBr}(B)$-t invariánsan hagyja egy $B \in \mathrm{Bl}(G)$ blokkra. Ekkor ekvivalensek:*

(i) *$B = B^\sigma$.*

(ii) *Létezik egy σ-invariás irreducibilis Brauer-karakter $\phi \in \mathrm{IBr}(B)$, amely nulla magasságú és $\Phi_\phi(1)_p = |G|_p$.*

(iii) *Létezik $\mathrm{Irr}(B)$-ben egy σ-invariáns irreducibilis karakter.*

A 7. Tézis egyik eredményének **analogonjaként** beláttuk: a következő:

8.11. **Tétel.** *Legyen G véges csoport, legyen σ p-edrendű Galois-automorfizmus. Ekvivalensek:*

(i) *Legyen R a Robinson-leképezés, ekkor $\mathrm{R}(L^+) = L^+$ minden L σ-invariáns, p-reguláris konjugáltosztályára G-nek.*

(ii) *A G csoport σ-invariáns, p-reguláris konjugáltosztályai száma megegyezik a σ-invariáns p-blokkok számával.*

(iii) *$|\sigma i\mathrm{Bl}(G|D)| = |\sigma i\mathrm{Cl}(G^0|D)|$ minden $D \leq G$ p-részcsoportra.*

9. Tézis - Blokkok valós karakterei [9]

Tanulmányozzuk a Brauer-k(B)-sejtés, az Olsson-sejtés és az Eaton-sejtés valós változatait. Belátjuk a valós Eaton-sejtést ciklikus defektcsoportú 2-blokkkokra valamint triviális valós magú csoportok főblokkjára $p = 2$ esetén. Jellemezzük egy B blokk G-osztályait, valós és racionális G-osztályait is.

Legyen továbbra is G véges csoport, (K, R, F) p-moduláris rendszer, ahol K, F felbontási testjei G minden részcsoportjának. Azt is feltesszük, hogy K részteste a komplex számtestnek. Legyen B a G csoport egy p-blokkja. Jelölje $\mathrm{k}(B)$ a B **blokkhoz tartozó irreducibilis karakterek** $|\mathrm{Irr}(B)|$ elemszámát. Egy χ **karakter magassága**, az őt tartalmzó p-blokk p-defektjének és a karakter defektjének különbsége, azaz $ht(\chi) = d(B) - d(\chi)$. Jelölje $\mathrm{k}_0(B)$ a B **blokk nulla magasságú** irreducibilis karaktereinek számát, $\mathrm{k}_i(B)$ **pedig az** i **magasságú irreducibilis karakterek számát**. Jelölje D' a D **defektcsoport** kommutátor részcsoportját, $D^{(n)}$ pedig az n**-edik kommutátor részcsoportját**.

R. Brauer 1956-ban fogalmazta meg:

9.1. **Sejtés** (k**(B)-sejtés).** Ha $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$ D defektcsoportú blokk, akkor

$$\mathrm{k}(B) \leq |D|$$

.

J. B. Olsson 1975-ös cikkében szerepelt először:

9.2. **Sejtés (Olsson-sejtés).**

$$|\mathrm{k}_0(B)| \leq |D/D'|$$

.

Ennek általánosítása a 2003-as C. W. Eatontól számazó:

9.3. **Sejtés (Eaton-sejtés).**

$$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{k}_i(B) \leq D/D^{(n+1)}$$

.

Ezen sejtések továbbra is nyitottak, sok speciális esetben igaznak bizonyultak.

- Azt mondjuk, hogy egy C **konjugáltosztály valós**, ha megegyezik az elemei inverzeinek konjugáltosztályával. $\mathrm{Cl}_r(G)$ fogja jelölni a G csoport **valós konjugáltosztályai halmazát**. Legyen $H \leq G$ részcsoport. Egy $x \in H$ **elem** G**-valós**, ha x és x^{-1} konjugált G-ben.
- Egy $B \in \mathrm{Bl}(G)$ **blokk valós**, ha tartalmazza egy irreducibilis karakterének konjugáltját. (Ekkor ez teljesül minden B-beli irreducibilis karakterre is.)
- Egy **karakter valós**, ha megegyezik a konjugáltjával. Ismert, hogy minden valós 2-blokkban van valós irreducibilis és Brauer-karakter is. $\mathrm{Irr}_{rv}(G)$-vel és $\mathrm{Irr}_{rv}(B)$-vel fogjuk **jelölni** a G csoport, illetve a B blokk valós, irreducibilis karakterei halmazát, $\mathrm{k}_{rv}(G)$ illetve $\mathrm{k}_{rv}(B)$ pedig ezen halmazok elemszámát.
- $k_{i,rv}(B)$ fogja jelölni a B blokkban lévő, i **magasságú, valós irreducibilis karakterek számát**.

- a Brauer-féle permutációs lemma szerint k_{rv} **megegyezik a** G **csoport valós konjugáltosztályai számával**.

$p = 2$ esetén megfogalmaztuk e sejtések valós változatait: Legyen G véges csoport, B valós 2-blokkja G-nek D defektcsoporttal.

9.4. **Sejtés.** (**Valós Brauer-sejtés gyenge változata**) Azt sejtjük, hogy $\mathrm{k}_{rv}(B)$ legfeljebb annyi, mint a D részcsoport G-valós elemei száma.

9.5. **Sejtés.** (**Valós Brauer-sejtés erős változata**) Azt sejtjük, hogy $\mathrm{k}_{rv}(B)$ legfeljebb annyi, mint a D részcsoport $N_G(D)$-valós elemei száma.

9.6. **Sejtés.** (**Az Olsson-sejtés valós változata**) Azt sejtjük, hogy $\mathrm{k}_{0,rv}(B)$ legfeljebb annyi, mint a D/D' csoport $N_G(D)/D'$-valós elemei száma.

9.7. **Sejtés.** (**Az Eaton-sejtés valós változata**) Azt sejtjük, hogy $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{k}_{i,rv}(B)$ legfeljebb annyi, mint a $D^{(n)}/D^{(n+1)}$ csoport $N_G(D)/D^{(n+1)}$-valós elemei száma.

Néhany megjegyzés:

- Az 9.5 Sejtésben **nem lehet** $N_G(D)$-t D-re kicserélni.
- A 9.7 Sejtésből **következiki** a többi.
- Ha $p > 2$, akkor az analóg állítások **nem feltétlenül** teljesülnek.

Csoportosztályok, **ahol igazak** a sejtések:

9.8. **Tétel.** *A 9.7 Sejtés erősebb változata igaz* **nilpotens** *csoportokra. Ha G 2-***csoport vagy Abel-féle***, akkor a 9.6 Sejtésben* **egyenlőség** *áll.*

9.9. **Tétel.** *A 9.5 és 9.6 Sejtés igaz* **szimmetrikus csoportokrai**.

9.10. **Tétel.** *A 9.7 Sejtés igaz* **centrális defekt csoportú blokkokra**.

Beláttuk a sejtéseket **ciklikus defektcsoportú** 2-blokkokra:

9.11. **Tétel.** *Legyen G véges csoport, $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$ egy ciklikus defekt csoportú 2-blokk. Ekkor igaz a 9.5 Sejtés (és így a többi sejtés is).*

Korábban foglalkoztunk már egy G csoport $R(G)$ **valós magjával**, amely a valós, páratlan rendű elemek által generált részcsoportja G-nek. Ha ez **páratlan rendű**, akkor, a következőt tudjuk belátni:

9.12. **Tétel.** *Ha $|R(G)|$ páratlan, akkor a 9.7 Sejtés igaz G főblokkjára $p = 2$ esetén. Speciálisan a következő esetekben tudjuk a 9.7 Sejtés igaz voltát a fő blokkra $p = 2$ esetén:*

(i) *Ha G' 2-nilpotens.*
(ii) *Ha $G = \mathrm{O}_{2',2,2'}(G)$. (Ez ekvivalens $|R(G)|$ páratlanságával.)*
(iii) *Ha G feloldható és 2-Sylow részcsoportja Abel-féle.*
iv) *Ha G 2-Sylow részcsoportja normálosztó.*

GAP-programok segítségével ellenőriztük a 9.7 Sejtést a small groups library-beli csoportok főblokkjaira $p = 2$ esetén. Ugyancsak ellenőriztük a 26 sporadikus egyszerű csoport főblokkjaira a 9.5 Sejtést $p = 2$ esetén.

9.13. **Definíció.** Legyen $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$ egy G csoport D defekt csoportú p-blokkja tetszőleges p prím esetén. Azt mondjuk, hogy $x, y \in D$ **ugyanabban a** B**-osztályban van**, ha minden $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ karakterre $\chi(x) = \chi(y)$.

Beláttuk a következőt a defektcsoport B-osztályairól:

9.14. **Tétel.** *Legyen G véges csoport, $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$ p-blokkal. Ekkor a D defektcsoport B-osztályai éppen a D csoport G-osztályai.*

9.15. **Definíció.** Legyen G véges csoport, $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$ blokkal. Azt mondjuk, hogy egy $x \in D$ **elem B-valós**, ha $\chi(x)$ valós minden $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$-re. Hasonlóan, $x \in D$ **B-racionális**, ha minden $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$-re $\chi(x)$ racionális.

9.16. **Következmény.** *Legyen $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$ és legyen $x \in D$. Ekkor:*

(i) *x pontosan akkor B-valós, ha G-valós.*
(ii) *x pontosan akkor B-racionális, ha G-racionális.*
(iii) *Legyen F egy $\mathbb{Q}$-t tartalmazó test. Ekkor $\chi(x) \in F$ minden $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$-re pontosan akkor, ha $\chi(x) \in F$ minden $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$-re.*

$\mathrm{Irr}(B)$ és D kapcsolatáról beláttuk:

9.17. **Tétel.** *Legyen $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$. Ekkor a $\chi|D$ megszorítások $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ esetén generálják azt a vektorteret, amelyet az összes komplex G-osztályfüggvények D-re való megszorításai generálnak.*

9.18. **Következmény.** *Legyen $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$. Ekkor a D defektcsoport G-konjugált osztályai száma alsó becslés $\mathrm{k}(B)$-re.*

A következő **eltűnési tételt** láttuk be:

9.19. **Tétel.** *Legyen $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$. Ekkor minden $x \in D$-re van olyan $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$, melyre $\chi(x) \neq 0$.*

10. Tézis - A Suzuki-csoportok részcsoportjainak mélysége [10]

Meghatározzuk az egyszerű $Sz(q)$ Suzuki-csoportok bizonyos részcsoportjainak, többek között a maximális részcsoportjainak, kombinatorikus mélységét. Ezek alapján meghatározzuk a közönséges mélységeket is.

Algebra tartalmazások közönséges mélységét először von-Neumann algebrákban vizsgálták. Később Hopf-algebrákban és csoportalgebrákban is bevezették ezt a fogalmat. A $\mathbb{C}H \subseteq \mathbb{C}G$ tartalmazás mélységén értjük a H részcsoport közönséges mélységét. Először csak a 2 mélységgel foglalkoztak, majd tetszőleges n mélységgel is. Jelenleg is intenzíven kutatott terület. Meg kell említeni ebben a témában S. Burciu, L. Kadison, B. Külshammer és R. Boltje nevét.

R. Boltje, S. Danz és B. Külshammer 2011-ben megjelent cikkében definiálták először egy csoport részcsoprotjának kombinatorikus mélységét. T. Fritzsche vizsgálta a $PSL(2,q)$-csoportokat, C. Reiche pedig a szimmetrikus csoportok Young-részcso-portjait. Héthelyi Lászlóval és Petényi Franciskával a Suzuki-csoportokon kívül foglalkoztunk még a Ree $R(q)$-csoportokkal is, ez a cikk preprint formájában az ArXiv-on elérhető, de ez nem része ennek a Tézisnek.

Az eredeti definíciója a kombinatorikus mélységnek bi-halmazokat, a közönséges mélységé pedig tenzorszorzatokat használ. Mivel a számolásokban inkább bizonyos tételek eredményeit használjuk, ezeket a tételeket fogjuk definíciónak tekinteni.

Legyen G véges csoport, $H \leq G$.

10.1. **Jelölés.** Legyen $H^x := x^{-1}Hx$, $H^{(x_1,\ldots,x_n)} := H \cap H^{x_1} \cap \cdots \cap H^{x_n}$, ha $x_1,\ldots,x_n \in G$. Legyen $\mathcal{U}_0(H) := H$, $\mathcal{U}_1(H) := \{H \cap H^x | x \in G\}$, és általában legyen $\mathcal{U}_n(H) := \{H^{(x_1,\ldots,x_n)} | x_1,\ldots,x_n \in G\}$.

10.2. **Definíció.** Legyen H részcsoportja a G véges csoportnak. H-nak a G-beli **kombinatorikus mélysége**, $d_c(H,G)$, az a legkisebb pozitív egész szám, melyet a következő felső becslésekből lehet meghatározni:

(1) Legyen $i \geq 1$. Ekkor $d_c(H,G) \leq 2i$ pontosan akkor, ha minden $x_1,\ldots,x_i \in G$ elemekhez, léteznek olyan $y_1,\ldots,y_{i-1} \in G$ elemek, hogy $H^{(x_1,\ldots,x_i)} = H^{(y_1,\ldots,y_{i-1})}$. (Más szóval, $d_c(H,G) \leq 2i$ pontosan akkor, ha $\mathcal{U}_i(H) = \mathcal{U}_{i-1}(H)$.

(2) Legyen $i > 1$. Ekkor $d_c(H,G) \leq 2i-1$ pontosan akkor ha G minden $x_1,\ldots,x_i$ elemére, léteznek olyan $y_1,\ldots,y_{i-1} \in G$ elemek, amelyekre $H^{(x_1,\ldots,x_i)} = H^{(y_1,\ldots,y_{i-1})}$ és $x_1hx_1^{-1} = y_1hy_1^{-1}$ minden $h \in H^{(x_1,\ldots,x_i)}$ esetén.

(3) $d_c(H,G) = 1$ pontosan akkor, ha minden $x \in G$ elemhez létezik olyan $y \in H$, melyre $xhx^{-1} = yhy^{-1}$, minden $h \in H$ esetén. (Másszóval: $G = HC_G(H)$.)

- Könnyen látható, hogy $d_c(H,G) \leq 2$ pontosan akkor, ha $H \lhd G$.

A közönséges mélység bevezetéséhez először néhány fogalmat definiálunk:

10.3. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy két irreducibilis karakter $\alpha,\beta \in \mathrm{Irr}(H)$ **relációban van**, $\alpha \sim \beta$, ha mindketten alkotói $\chi|_H$-nak, ahol $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Két $\mathrm{Irr}(H)$-beli karakter **távolsága** $d(\alpha,\beta) = m$, ha m a legkisebb egész szám, hogy létezik irreducibilis H-karakterek egy lánca α és β között, melyre $\alpha = \psi_0 \sim \psi_1 \sim \cdots \sim \psi_m = \beta$. Ha ilyen lánc nincs, akkor $d(\alpha,\beta) = \infty$, ha $\alpha = \beta$ akkor a távolság nulla.

10.4. **Jelölés.** Ha X a $\chi|_H$ megszorítás irreducibilis alkotói halmaza, akkor

$$m(\chi) := \max_{\alpha \in \mathrm{Irr}(H)} \min_{\psi \in X} d(\alpha, \psi).$$

10.5. **Definíció.** Legyen H részcsoportja a G véges csoportnak. H **közönséges mélysége G-ben**, $d(H,G)$, az a legkisebb pozitív egész szám, amelyet az alábbi felső korlátokból lehet meghatározni:

(i) Legyen $m \geq 1$. Ekkor $d(H,G) \leq 2m+1$ pontosan akkor, ha H két irreducibilis karakterének távolsága legfeljebb m.
(ii) Legyen $m \geq 2$. Ekkor $d(H,G) \leq 2m$ pontosan akkor, ha $m(\chi) \leq m-1$ minden $\chi \in Irr(G)$-re.
(iii) $d(H,G) \leq 2$ pontosan akkor, ha H normális G-ben, $d(H,G) = 1$ pontosan akkor, ha $G = H\mathrm{C}_G(x)$ minden $x \in H$-ra.

Most néhány szó a **Suzuki-csoportokról**.

Mostantól q mindig 2 páratlan hatványa, $q = 2^{2m+1}$, ahol $m > 0$. A Suzuki-csoportokat többféle módon lehet definiálni. Ezek csavart Lie-típusú egyszerű csoportok: $Sz(q) = {}^2B_2(q)$.

A Suzuki-csoportok Zassenhaus-csoportok is, azaz kétszeresen tranzitív permutációcsoportok, reguláris normálosztó nélkül, ahol minden nem egységelemnek legfeljebb 2 fixpontja van és vannak olyan elemek, amelyeknek 2 fixpontjuk van. A Suzuki-csoportok $GL(4,q)$ részcsoportjaként is definiálhatók. Legyen π a $K = GF(q)$ testnek az az automorfizmusa, melyre $x\pi^2 = x^2$ minden $x \in K$-ra.

Ekkor $Sz(q) := \langle S(a,b), M(\lambda), T | a, b \in GF(q), \lambda \in GF(q)^\times \rangle$, ahol

$$S(a,b) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & a\pi & 1 & 0 \\ a^2(a\pi) + ab + b\pi & a(a\pi) + b & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda^{1+2^m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{2^m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2^m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1-2^m} \end{pmatrix}$$

és

$$T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A q^2+1 darab pont $\{p_\infty, p(x,y) | x, y \in K\}$, ahol $p(x,y) = [xy + (x\pi)x^2 + y\pi, y, x, 1]$, egy $\mathcal{O}$ oválist alkot a $P(3,q)$ projektív térben. Azaz semelyik 3 pontja $\mathcal{O}$-nak sincs egy egyenesen. $Sz(q)$ azon projektiv kollineációk csoportja a $P(3,q)$ térben, amelyek invariánsan hagyják az ovális q^2+1 pontját. Ez a hatás hű. $Sz(q)$ Zassenhaus-csoport ezeken a pontokon, rendje $(q^2+1)q^2(q-1)$.

Azon elemek, amelyek csak a p_∞ pontot hagyják fixen alkotják az F 2-Sylow nemtriviális elemeit. A $\{p(0,0), p_\infty\}$ halmaz pontonkénti stabilizátora egy H ciklikus részcsoport, melynek rendje $q-1$. Ez normalizálja F-et.

A p_∞ pont stabilizátora $FH = N_G(F)$, amely Frobenius-csoport, az $N_G(H)$ részcsoport $2(q-1)$-edrendű diéder.

A $q^2+1, q^2, q-1$ számok páronként relatív prímek.

Minden p páratlan prímre a Sylow p-rszcsoportok ciklikusak. $Sz(q)$ CN-csoport, azaz, minden nemtriviális elemnek nilpotens a centralizátora.

Az $F \in Syl_2(G)$ ú.n. Suzuki 2-csoport, azaz nem Abel 2-csoport, amelyben több mint 1 involúció található, feloldható automorfizmuscsoporttal, amely F involúcióit tranzitívan permutálja. Az F részcsoport nilpotencia osztálya 2, rendje q^2, exponese 4, $Z(F)$ q-adrendű. Az F-beli involúciók az egységelemmel együtt alkotják $Z(F)$-et. A H részcsoport élesen 1-tranzitívan hat F involúcióin. Az F részcsoport minden nemtriviális elemének centralizátorát tartalmazza.

Suzuki-csoportok részcsoportjairól szól a következő:

10.6. **Tétel** (Suzuki)**.** *Legyen $G = Sz(q)$, ahol $q = 2^{2m+1}$, valamely pozitív egész m-re. Ekkor G részcsoportjai a következők:*

1. *$N_G(F) = FH$ Hall-csoport, amely Frobenius-csoport $q^2(q-1)$ renddel,*
2. *$B_0 = N_G(H)$ diéder-csoport, melynek rendje $2(q-1)$,*
3. *A_1, A_2 ciklikus Hall-részcsoportok, melyek rendjei: $q+2r+1, q-2r+1$, ahol $r = 2^m$ és $|A_1||A_2| = q^2+1$,*
4. *$B_1 = N_G(A_1), B_2 = N_G(A_2)$ Frobenius-részcsoportok $4|A_1|, 4|A_2|$ rendekkel,*
5. *$Sz(s)$ alakú részcsoportok, ahol s 2 egy páratlan hatványa, $s \geq 8$, $q = s^n$, ahol n pozitív egész. Minden páratlan S 2-hatvány esetén, ahol $s^n = q$ valamely pozitív egész n-re létezik $Sz(s)$-val izomorf részcsoport.*
6. *A fenti csoportok részcsoportjai és ezek konjugáltjai.*

10.7. **Tétel.** *Legyen $q = 2^{2m+1}$, $m > 0$, $r = 2^m$ és $G = Sz(q)$.*

a) *Legyen $i \in \{1,2\}$ és legyen $u_i \in A_i$, $u_i \neq 1$. Ekkor $C_G(u_i) = A_i$. Ha $B_i = N_G(A_i)$ akkor $B_i = \langle A_i, t_i \rangle$, ahol t_i 4-edrendű elem, és $u^{t_i} = u^q$, minden $u \in A_i$-re. $N_G(A_i)$ Frobenius-csoport A_i maggal.*

b) *Legyenek F, H, A_1, A_2 mint a 10.6 Tételben. Ekkor F, H, A_1, A_2 konjugáltjai G egy partícióját alkotják. F, H, A_1, A_2, a konjugáltjaik, és karakterisztikus részcsoportjainak konjugáltjai TI-halmazok G-ben.*

A tézis fő eredménye a következő:

10.8. **Tétel.** *A Suzuki-csoportok következő részcsoportjainak kombinatorikus mélységét határoztuk meg:*

a) *Tekintsük az $Sz(q)$ Suzuki-csoport maximális részcsoportjainak reprezentánsait konjugáltság erejéig. A 10.6 Tétel szerint ezek a következők: $N_G(F)$, $B_0 = N_G(H)$, $B_1 = N_G(A_1)$, $B_2 = N_G(A_2)$ és $Sz(s)$, ahol s maximális olyan pozitív egész, melyre $s^t = q$ valamely $t > 1$ pozitív egészre. E részcsoportok kombinatorikus mélységei: $d_c(N_G(F), G) = 5$, $d_c(B_0, G) = 4$, $d_c(B_1, G) = 4$, $d_c(B_2, G) = 4$, és $d_c(Sz(s), G) = 4$.*

b) *A következő részcsoportok kombinatrorikus mélysége 3:*
   - *F vagy F karakterisztikus részcsoportjai,*
   - *H részcsoportjai,*
   - *A_1 részcsoportjai,*
   - *A_2 részcsoportjai,*
   - *2-odrendű részcsoportok,*
   - *4-edrendű ciklikus részcsoportok,*
   - *$S_1 \in Syl_2(Sz(s))$ valamely $Sz(s)$ Suzuki-részcsoportra.*

c) *A következő 2- részcsoportok és konjugáltjai a következő kombinatorikus mélységekkel rendelkeznek:*
   - K_4 *Klein-részcsoportokra* $d_c(K_4, G) = 4$
   - $L \leq Z(F)$ $|L| = 2^{f-1}$*, ahol* $|Z(F)| = 2^f$*:* $d_c(L, G) = 2f - 2$.

d) $d_c(Sz(s), G) = 4$ *minden s-re, ahol* $s^t = q$ *valamely* $t > 1$ *pozitív egészre. (V. ö. a).)*

Ezek alapján kapjuk:

10.9. **Következmény.** *$G = Sz(q)$ minden a 10.8 Tételben szerlő részcsoport közönséges mélysége* 3*, kivéve* $d(N_G(F), G)$*-et, amely* 5.

Ennek bizonyításához használtuk:

10.10. **Tétel.** *(Burciu, Kadison, Külshammer) Legyen* $H \leq G$ *és tegyük fel, hogy* $N = Core_G(H)$ *előáll* H m *darab konjugáltjának metszeteként. Ekkor* $d(H, G) \leq 2m$*. Ha még* $N \leq Z(G)$ *is igaz, akkor* $d(H, G) \leq 2m - 1$.

Hivatkozások

[1] E. Horváth, M-blocks of solvable groups, *Mathematica Pannonica* **8 1** (1997) 37–47.

[2] N. M. Hassan, E. Horváth, Dade's conjecture for the simple Higman-Sims group Groups'97 St. Andrews-Bath., pp.329-345, London Math. Soc. Lecture Note Series 260, Cambridge University Press 1999.

[3] N. M. Hassan, E. Horváth, Some remarks on Dade's conjecture, *Mathematica Pannonica* **9 2** (1998) 181–194.

[4] T. Breuer, E. Horváth, On block induction, *J. Algebra* **242** (2001) 213–224..

[5] T. Breuer, L. Héthelyi, E. Horváth, Defect groups, conjugacy classes and the Robinson map, *J. Algebra* **279** (2004) 204–213.

[6] L. Héthelyi, E. Horváth, B. Külshammer, J. Murray, Central ideals and Cartan invariants of symmetric algebras, *J. Algebra* **293** (2005) 243–260.

[7] T. Breuer, L. Héthelyi, E. Horváth, B. Külshammer, J. Murray, Cartan invariants and central ideals of group algebras, *J. Algebra* **296** (2006) 177–195.

[8] L. Héthelyi, E. Horváth, Galois actions on blocks and classes of finite groups, *J. Algebra* **320** (2008) 660679.

[9] L. Héthelyi, E. Horváth, E. Szabó, Real characters in blocks, *Osaka Journal of Mathematics* **49 3** (2012) 613-623.

[10] L. Héthelyi, E. Horváth, F. Petényi, The depth of subgroups of Sz(q), *Communications in Algebra* **43** (2015) 4553–4569.