

A jegyzetben a lineáris algebra klasszikus fejezetein kívül (komplex számok, polinomok, mátrixok, determinánsok) tárgyaljuk a véges dimenziós lineáris és euklideszi terek, valamint ezek lineáris transzformációinak alapvető tulajdonságait. Arra törekedtünk, hogy a fogalmakat kellő alánosságban tárgyaljuk, az állítások többségét bizonyítsuk, de ezen kívül sok példát, illetve alkalmazási lehetőséget mutassunk be.

A jegyzetet ajánljuk a BME lineáris algebra iránt érdeklődő alapszintű és posztgraduális szinten résztvevő hallgatóinak egyaránt.



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Horváth Erzsébet

LINEÁRIS ALGEBRA

045021



Műegyetemi Kiadó

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Horváth Erzsébet

LINEÁRIS ALGEBRA



Műegyetemi Kiadó, 2002.

Lektor:
Dr. G. Horváth Ákos
a matematikai tudományok kandidátusa
egyetemi docens

Szerző:
Dr. Horváth Erzsébet
egyetemi adjunktus

Szerkesztő:
Salfer Gábor
tanársegéd

L^ateXbe írta és az ábrákat rajzolta:
Géczy Flóra



A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Hajdu István
Terjedelem: 28,03 (A/5) ív
Nyomta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó
Munkaszám: 207/02

Tartalomjegyzék

1. Számfogalmak	7
2. A komplex számok további tulajdonságai	17
3. A polinomok további tulajdonságai	23
4. Mátrixok	33
5. Determinánsok	41
6. 2×2 típusú hipermátrix determinánsa és inverze	55
7. Vektorterek	59
8. Mátrix rangja	67
9. Lineáris egyenletrendszerek	73
10. Sajátérték, sajátvektor	83
11. Mátrixfüggvények	91
12. Vektortérkonstrukciók, lineáris operátorok	105
13. Koordinátázás	115
14. Lineáris transzformációk további tulajdonságai	135
15. Tenzorok	141
16. Bilineáris függvények valós és komplex terekben	149
17. Euklideszi terek	157
18. Lineáris transzformációk euklideszi terekben	165
19. Unitér, ortogonális és normális transzformációk további tulajdonságai	179

Előszó

Ez a jegyzet a BME Gépészmérnöki Karán több éven át tartott előadásaim alapján készült, amelyeket a "Matematikus-mérnök" szakos "Algebra", majd az ezt helyettesítő "Emelt szintű matematika" c. tárgy keretében tartottam. A TTTK "Mérnök-fizikus" szakos hallgatói számára is segítséget nyújthat a jegyzet, az ott tartott "Lineáris Algebra" előadások anyagának elsajátításához.

A jegyzetben röviden tárgyaljuk a lineáris algebra klasszikus fejezeteit (komplex számok, polinomok, mátrixok, determinánsok), később megismerkedünk a lineáris terek, euklideszi terek, lineáris operátorok alapvető tulajdonságaival. Egyszerűség kedvéért az esetek többségében csak véges dimenziós terekkel foglalkozunk.

Ismertnek tételezzük fel a halmaz fogalmát, a halmazműveleteket és a logikai állításokkal kapcsolatos alapvető ismereteket, melyek [FM-I] első két fejezetében találhatók, így ezekre nem térünk ki részletesebben.

A lineáris algebra általában szokatlanabb a középiskolai anyaghoz képest, mint az analízis. Sok új fogalmat vezetünk be, amely egyrészt egyszerűbbé teszi a dolgok megfogalmazását, másrészt az egyes fejezetek megértése csak az előző fejezetekben bevezetett fogalmak elsajátítása után lehetséges. A fogalmak jobb megértése érdekében időnként néhány példát mutatunk illetve gyakorló feladatokat tűzünk ki.

Köszönetemet szeretném kifejezni G. Horváth Ákosnak a könyv lektorálásáért és módosító javaslataiért, Géczy Flórának a jegyzet $\text{\LaTeX}$ -be való átírásáért, Salfer Gábornak pedig a kötet szerkesztéséért.

Budapest, 1995. nov. 10.

A szerző

1. Számfogalmak

A középiskolai tanulmányok során már valamilyen módon bevezetésre kerültek a természetes számok az egész számok és a racionális számok. Ezekre a továbbiakban a következő jelöléseket használjuk:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ természetes számok

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ egész számok

$\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbf{Z} \text{ és } q \neq 0\}$ racionális számok

A kapcsos zárójelek között a megfelelő halmazokat adtuk meg elemeik felsorolásával. Az utolsó esetben a halmaz elemeire vonatkozó feltételeket a függőleges vonal mögött soroltuk fel.

E jegyzetben matematikai formulák írásakor még a következő jelöléseket használjuk:

Halmazelméleti jelek $\in$ (elem), $\subseteq$ (részhalmaz), $\setminus$ (különbség halmaz képzés), $\cap$ (metszet), $\notin$ (nem elem), $\not\subseteq$ (nem része)

Például: $a \in A, A \subseteq B, B \setminus C, A \cap B$

Logikai jelek: $\wedge$ (és), $\vee$ (vagy), $\neg$ (tagadás), $\Rightarrow$ (implikáció), $\Leftrightarrow$ (ekvivalencia)

Például $A \Rightarrow B, \neg A, A \vee B$

Kvantorok: $\forall$ (minden), $\exists$ (létezik), $\exists!$ (létezik egyetlen)

Produktum: $\prod_{i=1}^n a_i$ jelöli az $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ szorzatot

Szumma: $\sum_{i=1}^n a_i$ jelöli az $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ összeget

A továbbiakban bevezetünk néhány (esetleg már ismert) fogalmat, amelyekre

szükségünk lesz a következő tananyag tárgyalásakor.

1.1 Definíció Legyenek A és B halmazok. Egy $f : A \rightarrow B$ leképezés *függvény*, ha $\forall a \in A$ -hoz $\exists! b \in B$, amelyre $f(a) = b$. Az f leképezés *injektív*, ha $a_1 \neq a_2$ A -beli elemekre $f(a_1) \neq f(a_2)$. f *szürjektív*, ha $\forall b \in B$ -hez $\exists a \in A$, amelyre $f(a) = b$. f *kölcsönösen egyértelmű*, vagy *bijektív*, ha f injektív és szürjektív.

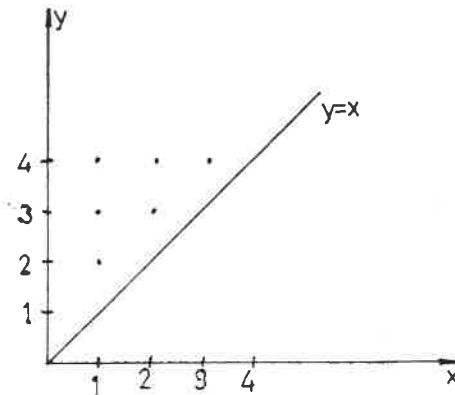
1.2 Definíció: Legyenek $A_1, \dots, A_n$ halmazok. $A_1 \times \dots \times A_n$ -nel jelöljük és az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok *Descartes (vagy direkt) szorzatának* nevezzük a következő halmazt

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$$

1.3 Megjegyzés: Például a sík pontjai a számegyenesnek mint pontthalmaznak inmagával vett *direkt szorzata*.

1.4 Definíció: Legyen A egy halmaz. Tekintsük $A \times A$ -nak egy ρ részhalmazát. Ekkor azt mondjuk, hogy ρ *reláció* A -n. Ha $(a_1, a_2) \in \rho$, akkor azt mondjuk, hogy a_1 és a_2 ρ *relációban vannak egymással*. Ezt a tulajdonságot $a_1 \rho a_2$ -vel is szokták jelölni.

1.5 Példa: Tekintsük $\mathbb{N}$ -en $a <$ (kisebb) relációt. Ez a pozitív síknegyed és az y tengely azon egész koordinátájú pontjaiból áll, amelyeknek x koordinátája kisebb, mint az y koordinátája.



1. ábra

A relációk közül a két legfontosabb az *ekvivalencia reláció* és a *rendezési reláció*.

1.6 Definíció: Azt mondjuk, hogy egy ρ reláció az A halmazon *ekvivalencia-reláció*, ha

- (i) $\forall a \in A$ esetén $(a, a) \in \rho$ (ρ reflexív)
- (ii) $\forall a, b \in A$ esetén $((a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho)$ (ρ szimmetrikus)
- (iii) $\forall a, b, c \in A$ esetén $((a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho)$ (ρ tranzitív)

1.7 Példa: Az egyenlőség minden S halmazon ekvivalenciareláció ($\rho = \{(a, a) | a \in A\}$)

1.8 Feladat: Legyen $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a következő reláció: rögzítsünk egy $n > 1$ természetes számot. $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | a - b \text{ osztható } n\text{-nel}\}$. Mutassuk meg, hogy ρ ekvivalenciareláció $\mathbb{N}$ -en. (Ezt a relációt a számelméletben kongruenciának hívják).

1.9 Feladat: Legyen ρ egy reláció $\mathbb{N}$ -en. ρ reflexivitásának és szimmetrikusságának mi a geometriai tartalma?

1.10 Megjegyzés: Legyen ρ ekvivalenciareláció A -n. Ekkor az egymással ρ relációban lévő elemek A -nak diszjunkt halmazokra ún. *ekvivalenciaosztályokra* való bontását adják. Megfordítva, A -nak minden diszjunkt halmazok uniójára (osztályokra) való bontása egy ρ ekvivalencia relációt ad, ha ρ -t mint az egy osztályba tartozó elemekből alkotott párok halmazát definiáljuk.

1.11 Definíció: Azt mondjuk, hogy egy ρ reláció egy A halmazon *rendezési reláció*, ha

- (i) $\forall a \in A$ esetén $(a, a) \notin \rho$ (ρ irreflexív)
- (ii) $\forall a, b, c$ esetén $((a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho) \Rightarrow (a, c) \in \rho$ (ρ tranzitív)
- (iii) $\forall a, b \in A$ esetén, ha $a \neq b$, akkor $(a, b) \in \rho$ és $(b, a) \in \rho$ közül pontosan az egyik teljesül (ρ trichotóm)

Ha csak (i) és (ii) teljesül, akkor *parciális rendezésről* beszélünk.

1.12 Példa: $<$ rendezés $\mathbb{N}$ -en, a *valódi* oszthatóság parciális rendezés $\mathbb{N}$ -en.

Ha a természetes számok halmazát pontosabban szeretnénk leírni, akkor bizonyos **axiómákra** van szükség, amelyek megfogalmazzák e halmaz lényeges tulajdonságait. **É**re mutatunk most példát.

A természetes számok Peano-féle axiómái

Legyen $\mathbb{N}$ egy halmaz, amelyre

- (i) $0 \in \mathbb{N}$
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ -hez $\exists! n' \in \mathbb{N}$, amelyet n rákövetkezőjének nevezünk és 0 nem rákövetkezője egyetlen $\mathbb{N}$ -beli elemnek sem.
- (iii) Ha $H \subseteq \mathbb{N}$ és $0 \in H$, valamint H minden elemével együtt annak rákövetkezőjét is tartalmazza, akkor $H = \mathbb{N}$.
(Ez utóbbit a matematikai indukció elvének is szokták hívni)

Most a valós számokat fogjuk axiómákkal bevezetni. Az axiómák között vannak **algebrai**, **rendezési** axiómák illetve egy **folytonossági axióma**. A valós számok halmazát $\mathbb{R}$ -rel jelöljük.

Valós számok axiómái

Legyen adott egy $\mathbb{R}$ halmaz és két $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -ről $\mathbb{R}$ be képező függvény (két ún. két változós művelet) amelyeket összeadásnak $(+)$ és szorzásnak $(\cdot)$ hívunk.

(Tehát $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esetén $a + b$ és $a \cdot b$ értelmes és $\mathbb{R}$ -beli. Ezt röviden úgy szokták kifejezni, hogy $\mathbb{R}$ *zárt* $a \cdot$, és $+$ *műveletekre*, vagy hogy $\cdot$ és $+$ *nem vezet ki* $\mathbb{R}$ -ből).

Tegyük fel, hogy e két műveletre az alábbi tulajdonságok teljesülnek (ab -vel $a \cdot b$ -t rövidítjük)

Algebrai axiómák

- (i) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $(a + b) + c = a + (b + c)$ ($+$ asszociatív)
- (ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$ ($+$ kommutatív)
- (iii) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ amelyre $0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ esetén
($\exists$ additív neutrális elem, azaz nullelem)
- (iv) $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $\exists! y \in \mathbb{R}$, amelyre $y + a = 0 = a + y$ ($\exists$ additív inverz, azaz ellentett; ezt az y -t $-a$ -val jelöljük).
- (v) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $(ab)c = a(bc)$ ($\cdot$ asszociatív)
- (vi) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $ab = ba$ ($\cdot$ kommutatív)
- (vii) $\exists 1 \in \mathbb{R}$, amelyre $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ esetén
($\exists$ multiplikatív neutrális elem, azaz egységelem)
- (viii) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $\exists! y \in \mathbb{R}$, amelyre $ay = 1 = ya$ (minden $\neq 0$ elemnek létezik multiplikatív inverze, azaz reciproka; ezt az y -t a^{-1} -el vagy $\frac{1}{a}$ -val jelöljük)
- (ix) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a(b + c) = ab + ac$
 $(b + c) \cdot a = ba + ca$ (disztributivitás)

Rendezési axiómák

(x) R -en értelmezve van egy $<$ -bel jelölt reláció, amely rendezési reláció (irreflexív, tranzitív, trichotóm)

(xi) $\forall a, b, c \in R$ esetén $(a < b \Rightarrow a + c < b + c)$
($<$ az összeadásra nézve monoton)

(xii) $\forall a, b, c$ esetén $((a < b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac < bc \text{ és } ca < cb)$

(kiii) (Dedekind-féle folytonossági axióma)

R minden nem üres korlátos részhalmazának van legkisebb felső korlátja.
(lásd 1.13 Megjegyzés)

1.13 Megjegyzés: Mivel $1 \in R$ $1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots \in R$ Ezek mind különbözők és egyik sem 0, (x) és (xi) miatt. Tehát a $\{0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots\}$ halmazra teljesülnek a Peano axiómák így $N \subseteq R$. Minden $r \in R$ -re értelmezhető az abszolút érték

$$|r| = \begin{cases} r, & \text{ha } r \geq 0 \\ -r, & \text{ha } r < 0 \end{cases}$$

Definícióval.

Egy $H \subseteq R$ halmazt *korlátosnak* nevezünk, ha létezik olyan $n \in N$, hogy minden $h \in H$ esetén $|h| < n$. H -nak *n* *felső korlátja*, ha $\forall h \in H$ esetén $h < n$.

1.14 Megjegyzés: Ha R helyett Q -t írunk a fenti axiómákba, akkor (i)–(xii) teljesül csak. Tehát a valós és a racionális számokat a Dedekind-féle folytonossági axióma különbözteti meg. Például, ha vesszük racionális számoknak egy $\sqrt{2}$ -höz növekvően tartó sorozatát, ennek Q -ban nem lesz legkisebb felső korlátja.

Viszont R -en és Q -n kívül sok más halmaz is teljesíti az (i)–(ix) axiómákat, ezeket *axiómákat testaxiómáknak* nevezzük.

1.15 Definíció: Legyen adott egy F halmaz és legyen F -en értelmezve két 2 -változós művelet $+$ és $\cdot$.

Tehát $+: F \times F \rightarrow F$ és $\cdot: F \times F \rightarrow F$ függvények)

Írjuk fel, hogy F -re (i)–(ix) teljesül a fenti axiómák közül, R helyett mindenütt F -et véve.

Ekkor F -et *kommutatív testnek* nevezzük. Ha a (vi) axióma kivételével teljesülnek a testaxiómák, akkor F -et *ferdetestnek* nevezzük.

1.16 Példa:

R, Q kommutatív testek

Z nem test, mert a (viii) axióma nem teljesül.

N nem test, mert a (iv) és (viii) axiómák nem teljesülnek.

1.17 Megjegyzés: Minden p prímszámra létezik p elemű test. Ezt $GF(p)$ -vel jelöljük. Az elnevezés a Galois Field rövidítése.

$GF(p) = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ műveletek: az összeadást és a szorzást úgy végezzük el, mint az egész számokon és az eredménynek a p -vel való osztás maradékát vesszük.

Például $GF(5)$ -ben $2 + 3 = 0$ $2 \cdot 3 = 1$

Felírhatjuk $GF(5)$ összeadás és szorzótábláját is:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

A szorzótáblából leolvasható a multiplikatív inverz is. Például $3^{-1} \hat{=} 2$, $4^{-1} = 4$.
 Z tulajdonságait általánosítva kapjuk a *kommutatív gyűrű* fogalmát.

1.18 Definíció: Legyen adott egy A halmaz és A -n két kétváltozós művelet $+: A \times A \rightarrow A$ és $\cdot: A \times A \rightarrow A$. Tegyük fel, hogy A -ra az algebrai axiómákból (i)–(vii) és (ix) teljesül, R helyett mindenütt A -t téve. Ekkor A -t *kommutatív gyűrűnek* nevezzük. Ha csak (i)–(v), (vii), (ix) teljesül, akkor A *gyűrű*.

1.19 Példa: Minden test gyűrű (például $R, Q, GF(p)$), de nem minden gyűrű test (például Z). N nem gyűrű, mert (iv) nem teljesül rá. Z, Q és R halmazokra a $Z \subseteq Q \subseteq R$ tartalmazási reláció áll fenn.

Most egy újabb gyűrű elemeit konstruáljuk meg.

1.20 Definíció: Legyen F test, $a_0, a_1, \dots, a_n$ F -nek elemei, x pedig egy változó. Ekkor a $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ formális kifejezést F -beli *együtthatós* (vagy F feletti) *egyváltozós* polinomnak nevezzük.
Ha $a_n \neq 0$, akkor n -et $p(x)$ *fokának* hívjuk és *deg* $p(x)$ -szel jelöljük, a_n -et pedig $p(x)$

főegyütthatójának nevezzük.

Két polinomot egyenlőnek tekintünk, ha azonos fokúak és együtthatóik páronként megegyeznek.

1.21 Jelölés: $F[x]$ -szel jelöljük az összes F -beli együtthatós polinomok halmazát.

1.22 Megjegyzés: $F[x]$ -en értelmezhető az összeadás, az azonos fokú x -hatványok együtthatóinak összeadásával.

$F[x]$ -en értelmezhető a szorzás is úgy, hogy összeszorozunk minden tagot minden taggal, és utána fok szerint rendezzük őket. Az azonos fokú tagok együtthatóit összeadva ismét a fenti alakú polinomot kapunk. Be lehet látni, hogy ezekre a műveletekre $F[x]$ kommutatív gyűrű.

1.23 Példa: $x^3 + 3x + 1, 6 \in \mathbb{R}[x]$,

$$(x^2 + 1)(x^3 + 2x) = x^5 + x^3 + 2x^3 + 2x = x^5 + 3x^3 + 2x$$

1.24 Definíció: Legyen $p(x) \in F[x]$, $x_0 \in F$. $p(x)$ -nek x_0 -beli helyettesítési értékének nevezzük azt az F -beli elemet, amelyet úgy kapunk, hogy $p(x)$ -ben mindenütt x -et x_0 -ra cseréljük ki és elvégezzük vele a kijelölt műveleteket. Ezt $p(x_0)$ -lal jelöljük. Ha $p(x_0) = 0$, akkor x_0 -at $p(x)$ gyökének nevezzük.

Felmerül a kérdés, hogy F -ben mely polinomoknak van gyökük.

1.25. Példa:

- $p(x) = x^2 - 2$ polinomnak $\mathbb{Q}$ -ban nincs gyöke.
- $p(x) = x^2 + 1$ polinomnak nincsen $\mathbb{R}$ -ben gyöke.
- $p(x) = x^2 + 1$ polinomnak $\text{GF}(5)$ -ben van gyöke, az 1.17-beli táblázatból leolvasható, hogy 2 és 3 lesz gyöke.

1.26 Definíció: Egy F testről azt mondjuk, hogy *algebrailag zárt*, ha minden F -beli együtthatós legalább elsőfokú polinomnak van F -ben gyöke.

1.27 Megjegyzés: Láttuk, hogy sem $\mathbb{Q}$ sem $\mathbb{R}$ nem algebrailag zárt. Az 1.17-beli táblázatból látható, hogy $\text{GF}(5)$ sem algebrailag zárt. Például $p(x) = x^2 + 2$ -nek nincs $\text{GF}(5)$ -ben gyöke.

Igaz viszont a következő tétel, amit bizonyítás nélkül: közlünk

1.28 Tétel: Minden F testhez létezik olyan őt tartalmazó legszűkebb test, amely

algebrailag zárt. Ez lényegében egyértelmű. Ezt a testet F algebrai lezártjának hívjuk és $\overline{F}$ -sal jelöljük.

Meg szeretnénk konstruálni $\mathbb{R}$ algebrai lezártját, $\overline{\mathbb{R}}$ -t. Az biztos, hogy kell lenni benne egy olyan elemnek, amely gyöke az $x^2 + 1$ polinomnak. Jelöljünk egy ilyen elemet i -vel.

Mivel az algebrai lezárt összeadásra és szorzásra zárt, tartalmaznia kell minden olyan elemet, amely $a + bi$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ -beliek.

1.29 Definíció: Legyen i az $\mathbb{R}$ algebrai lezártjának egy olyan eleme, amelyre $i^2 = -1$.

Legyen $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Ezt a halmazt a *komplex számok* halmazának nevezzük.

1.30 Tétel: A komplex számok testet alkotnak, amely tartalmazza a valós számokat és benne az $x^2 + 1$ polinomnak van gyöke. $\mathbb{C}$ minden eleme egyértelműen írható $a + bi$ alakban, amelyet az illető *komplex szám algebrai alakjának* nevezünk. $\mathbb{C}$ algebrailag zárt, sőt $\mathbb{C}$ éppen $\mathbb{R}$ algebrai lezártja.

Bizonyítás: Ha $a + bi = c + di \Rightarrow a - c = (d - b)i$.

Itt az egyenlőség bal oldala $\mathbb{R}$ -beli, tehát jobb oldala is $\mathbb{R}$ -beli. Ez csak úgy lehetséges, ha $d - b = 0$. Tehát $b = d$ és $a = c$. Így $\mathbb{C}$ minden elemének algebrai alakja egyértelmű. $\mathbb{C}$ -ben van egységelem, az $1 \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ zárt az összeadásra: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$\mathbb{C}$ zárt a szorzásra: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Ha $a + bi \neq 0$, akkor $(a + bi)$ -nek van inverze $\mathbb{C}$ -ben:

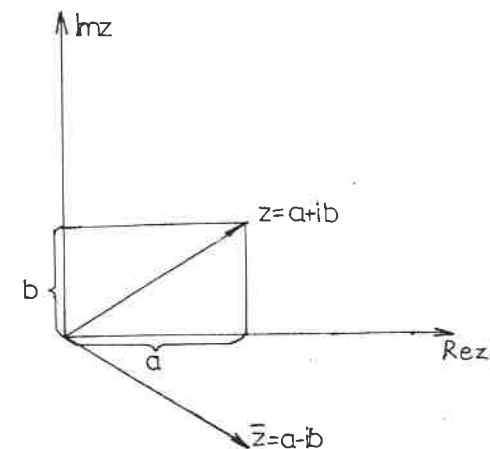
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{(a - bi)}{(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \in \mathbb{C}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy a testaxiómák teljesülnek $\mathbb{C}$ -re. Ha $r \in \mathbb{R}$, akkor $r = r + 0i \in \mathbb{C}$, tehát $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ -ben $x^2 + 1$ -nek van gyöke, például i . $\mathbb{C}$ algebrai zártságát nem bizonyítjuk. Ezt a tényt szokás az *algebra alaptételének* nevezni. Ezt felhasználva, mivel $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, és $\mathbb{C} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ a $\mathbb{C}$ definíciója szerint $\mathbb{C}$ algebrai zárt-sága azt adja, hogy $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$.

2. A komplex számok további tulajdonságai

2.1 Definíció: Legyen $z = a + bi$ egy komplex szám algebrai alakja, ekkor a -t a z *valós részének* nevezzük és $\operatorname{Re} z$ -vel jelöljük b -t a *képzetes részének* nevezzük és $\operatorname{Im} z$ -vel jelöljük.

Mivel minden komplex számhoz pontosan egy algebrai alak tartozik és bármely valós számpár alkalmas komplex szám valós és képzetes részét adja meg, így kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van $\mathbb{C}$ elemei és $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pontjai között. Ezt szokás a komplex számok *geometriai interpretációjának* nevezni. A $z = a + bi \mapsto (a, b)$ megfeleltetést úgy szokás megadni, hogy a z komplex számot "lerajzoljuk" az ún. *komplex számsíkon*:



2. ábra

A vízszintes tengely neve *valós tengely* ($\operatorname{Re}(z)$), ide mérjük fel a komplex szám valós részét, a függőleges tengely neve *képzetes tengely* ($\operatorname{Im}(z)$), ide mérjük fel a komplex szám képzetes részét. Így a z komplex számnak megfelel az (a, b) pontba mutató helyvektor.

2.2 Megjegyzés: A komplex számok összeadása, kivonása, $\mathbf{R}$ -beli skalárral való szorzása éppen a megfelelő vektorok összeadásának, kivonásának, $\mathbf{R}$ -beli skalárral való szorzásának felel meg.

2.3 Definíció: Egy $z = a + bi$ komplex szám *konjugáltjának* nevezzük és $\bar{z}$ -sal jelöljük az $a - bi$ komplex számot. Azt a hozzárendelést, amely z -hez a $\bar{z}$ számot rendeli *konjugálásnak* nevezzük.

2.4 Megjegyzés: A konjugálás geometriai tartalma a valós tengelyre való tükrözés. Ebből következik, hogy $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ és $\overline{\bar{z}} = z$.

2.5 Definíció Egy z komplex szám *arcusának* nevezzük és $\text{arc}(z)$ -vel jelöljük azt a φ szöget, amellyel a valós tengely pozitív felét elforgatva a z helyvektorának irányába mutató félegyenest kapunk. A 0 komplex számnak nincs arcusa. A többi komplex szám arcusa $2k\pi$ $k \in \mathbf{Z}$ összeadandótól eltekintve egyértelmű.

2.6 Definíció: Egy z komplex szám *abszolút értékének* nevezzük és $|z|$ -vel jelöljük a z -hez tartozó helyvektor hosszát.

2.7 Megjegyzés: Ha $z = a + ib$, akkor $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$. Ha $r = |z|$ és $\varphi = \text{arc}(z)$, akkor $a = r \cos \varphi$ $b = r \sin \varphi$, tehát $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

2.8 Definíció: Legyen r a z komplex szám abszolút értéke φ pedig az arcusa. Ekkor $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ alakban való megadását a z *trigonometrikus alakjának* nevezzük. Bevezetve az $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ jelölést kapjuk, hogy $z = re^{i\varphi}$, ezt a z komplex szám *exponenciális alakjának* nevezzük.

2.9 Megjegyzés: Ha $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ akkor $|z| = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r$, tehát a trigonometrikus alakból leolvasható a komplex szám abszolút értéke, szöge pedig $2k\pi$ $k \in \mathbf{Z}$ összeadandótól eltekintve.

Meg szeretnénk vizsgálni, hogy mi történik a komplex szám abszolút értékével és arcusával a komplex számok szorzásakor, osztásakor.

2.10 Tétel: Legyenek z_1 és z_2 komplex számok. Ekkor

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{arc}(z_1 z_2) = \text{arc}(z_1) + \text{arc}(z_2)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{arc} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{arc}(z_1) - \text{arc}(z_2)$$

Speciálisan, ha $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$. (Ez utóbbit Moivre-formulának is nevezik).

Bizonyítás Legyen $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Ekkor $z_1 z_2 = r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

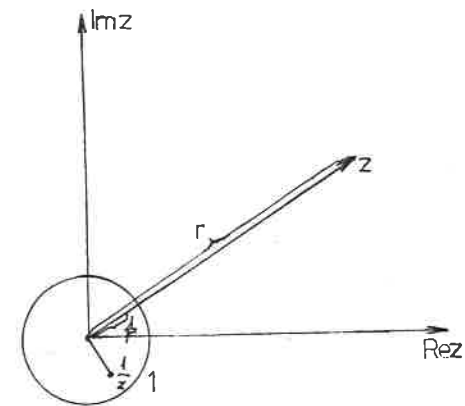
Tehát $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ és $\text{arc}(z_1 z_2) = \text{arc}(z_1) + \text{arc}(z_2)$.

Indukcióval kapjuk, hogy $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ esetén $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$.

Ugyanakkor, mivel $\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1$, a szorzat abszolút értékére vonatkozó formula szerint

$|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2|$, tehát $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. Az arcusra vonatkozó előző formula szerint $\text{arc}(z_1) = \text{arc} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + \text{arc}(z_2)$, tehát $\text{arc}(z_1) - \text{arc}(z_2) = \text{arc} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)$.

2.11 Megjegyzés: Egy $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ komplex számmal való szorzás a komplex számsíkon forgatás nyújtás transzformációt eredményez. Az elforgatás $\text{arc}(z_0)$ -lal; a nyújtás $|z_0|$ -el történik. $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$, így $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ esetén $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$ tehát $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{r}$ és $\text{arc} \left(\frac{1}{z} \right) = -\text{arc}(z)$. Így a reciprok képzés a komplex számsík pontjait a $|z| = 1$ egységkörre "tükrözi", majd a valós tengelyre tükrözi.



3. ábra

Most meg fogjuk vizsgálni, hogy adott $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ számnak hány

n -edik gyöke van, azaz hány w komplex számra teljesül, hogy $w^n = z$. Ha $w = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, akkor $w^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$. Ezért a $w^n = z$ egyenlőségből $\rho^n = r$ és $n\vartheta = \varphi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ adódik. Ebből $\rho = \sqrt[n]{r} > 0$ egyértelmű és $\vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $k \in \mathbb{Z}$. Ezek közül azonban csak $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ad különböző w értéket utána ismétlődik, mert

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) &= \\ = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2(k+n)\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2(k+n)\pi}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

Tehát bebizonyítottuk a következőt:

2.12 Tétel: Egy $z \neq 0$ komplex számnak pontosan n darab n -edik gyöke van a komplex számok körében.

Ha $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad \text{ahol } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

2.13 Definíció Az 1 komplex szám n -edik gyökeit n -edik egységgyököknek nevezzük.

2.14 Megjegyzés: Az előzőek szerint $\sqrt[n]{1}$ értékei $\cos(\frac{2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{2k\pi}{n})$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Ezek a $|z| = 1$ körön egy szabályos n -szög csúcsaiban helyezkednek el a komplex számsíkon. Ha $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ akkor $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n})$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, így z összes n -edik gyöke a $k = 0$ -hoz tartozó n -edik gyökből az n -edik egységgyökökkel való szorzással kapható.

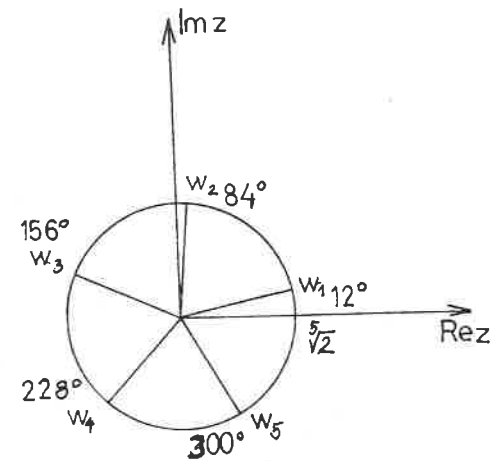
2.15 Példa: Számítsuk ki $\sqrt[5]{1 + i\sqrt{3}}$ értékeit. Először átírjuk a gyök alatti kifejezést trigonometrikus alakra.

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

így

$$\sqrt[5]{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt[5]{2} \left(\cos \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} \right) \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Ábrázolva a gyököket a $|z| = \sqrt[5]{2}$ körön kapjuk:



4. ábra

2.16 Feladat:

- Írjuk fel i -nek trigonometrikus és exponenciális alakját! Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{i} = -i$.
- Bizonyítsuk be, hogy i negyedik egységgyök és ábrázoljuk i hatványait a komplex számsíkon. Mi lesz a többi negyedik egységgyök?
- Számítsuk ki i^{1995} értékét!
- Bizonyítsuk be, hogy $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ minden z_1, z_2 komplex számra.

3. A polinomok további tulajdonságai

Már említettük, hogy az algebra alaptétele szerint a komplex számtest algebrailag zárt, így minden komplex együtthatós legalább elsőfokú polinomnak van a komplex számok körében gyöke. Ennek a tételnek a következménye a következő eredmény, amely komplex, illetve valós együtthatós polinomok felbontásáról szól amelyet szintén nem bizonyítunk. Ezt is szokás az algebra alaptételeként emlegetni.

3.1 Tétel (Algebra alaptétele):

a) Legyen $n \geq 1$ természetes szám, ekkor minden $C[z]$ -beli n -edfokú $p(z)$ polinomnak C -ben pontosan n darab gyöke van. Ha ezek $z_1, z_2, \dots, z_n$ és $p(z)$ főegyütthatója a_n , akkor $p(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$. (Ezt nevezik $p(z)$ komplex gyöktényezős alakjának). A komplex gyöktényezős alak a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

b) Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Ekkor minden $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen írható $p(x) = a_n \prod_{i=1}^s (x - x_i) \prod_{j=1}^r (x^2 + \alpha_j x + \beta_j)$ alakban, ahol a_n $p(x)$ főegyütthatója, $x_1, \dots, x_s$ $p(x)$ valós gyökei, az $x^2 + \alpha_j x + \beta_j \in \mathbb{R}[x]$ polinomoknak nincsenek valós gyökeik, gyökeik konjugált komplex számok. (Ekkor $n = s + 2r$)

3.2 Megjegyzés A fenti tételben előfordulhat, hogy $z_1, z_2, \dots, z_n$, illetve $x_1, \dots, x_s$ gyökök valamint az $x^2 + \alpha_j x + \beta_j$ tényezők között vannak azonosok. Ezt úgy is szokták mondani, hogy ezek a *gyökök többszörös multiplicitásúak*. Ilyen esetekben az azonos tényezőket össze lehet vonni, például $p(z) = a_n \prod_{i=1}^t (z - z_i)^{m_i}$, ahol $n = \sum_{i=1}^t m_i$. Ha F tetszőleges test, akkor $F[x]$ -ben a fenti tétel analogonja azt mondja ki, hogy minden $F[x]$ -beli legalább elsőfokú polinom a tényezők sorrendjétől és skalárszorozótól eltekintve egyértelműen írható $F[x]$ -ben további tényezőkre nem bontható polinomok szorzatára. Ha F algebrailag zárt, akkor ez $F[x]$ -beli nem konstans polinomok elsőfokú polinomok szorzatára bonthatók, hasonlóan mint a 3.1 Tétel a) pontjában.

3.3 Megjegyzés: A középiskolai tanulmányainkból jól ismert a *számelmélet alaptétele*, amely szerint minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ természetes szám a tényezők

sorrendjétől eltekintve egyértelműen írható prímszorzatok szorzataként. Ismerjük a természetes számok körében az *oszthatóság* fogalmát is: $a, n \in \mathbb{N}$ esetén a osztója n -nek, ha létezik olyan $b \in \mathbb{N}$, amelyre $ab = n$. Ezt a tényt $a|n$ -nel jelöljük. Ismerjük a *legnagyobb közös osztó* (l.n.k.o.) és a *legkisebb közös többszörös* (l.k.k.t.) fogalmát is. Ha $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $n = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$, $m = \prod_{i=1}^s p_i^{\beta_i}$ n és m prímtényezős felbontása (itt felsoroltuk az összes prímet, amely vagy n -ben vagy m -ben előfordul, esetleg 0 kitevővel), akkor l.n.k.o. $(n, m) = \prod_{i=1}^s p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ és l.k.k.t. $(n, m) = \prod_{i=1}^s p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$. Könnyen látható, hogy $d = \text{l.n.k.o.}(n, m)$ pontosan akkor, ha d közös osztója n -nek és m -nek és minden közös osztójuknak többszöröse, $k = \text{l.k.k.t.}(n, m)$ pontosan akkor ha k többszöröse n -nek és m -nek és minden közös többszörösüknek osztója.

Az oszthatóság polinomok körében is értelmezhető.

3.4 Definíció: Legyen F test $p(x), q(x) \in F[x]$ polinomok. Azt mondjuk, hogy $p(x)$ osztója $q(x)$ -nek az $F[x]$ -beli polinomok körében, ha létezik olyan $l(x) \in F[x]$ polinom, amelyre $p(x) \cdot l(x) = q(x)$. Ezt a tényt $p(x)|q(x)$ -szel jelöljük.

Polinomok körében is lehet értelmezni a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös fogalmát.

3.5 Definíció: Legyen F test $p(x), q(x) \in F[x]$ polinomok l.n.k.o. $(p(x), q(x))$ -szel jelöljük, $p(x)$ és $q(x)$ legnagyobb közös osztójának nevezzük azt a $d(x)$ polinomot, amely $p(x)$ -nek és $q(x)$ -nek közös osztója és minden közös osztójának többszöröse. l.k.k.t. $(p(x), q(x))$ -szel jelöljük, $p(x)$ és $q(x)$ legkisebb közös többszörösének nevezzük azt a $k(x)$ polinomot, amely $p(x)$ -nek és $q(x)$ -nek közös többszöröse és minden közös többszörösüknek osztója. (Mivel F -beli nem 0 elemmel való szorzás szintén ilyen tulajdonságú polinomokat ad, az l.n.k.o és a l.k.k.t csak konstans szorzótól eltekintve érdekel minket. l.n.k.o. $(p_1(x), \dots, p_n(x)) = \text{l.n.k.o.}(p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)), p_n(x)$) rekurzióval több polinom legnagyobb közös osztóját is definiálhatjuk.

3.6 Tétel: Legyenek $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomok, melyeknek gyöktényezős alakjai $p(z) = a_n \prod_{i=1}^s (z - z_i)^{\alpha_i}$, $q(z) = b_n \prod_{i=1}^s (z - z_i)^{\beta_i}$, (ahol α_i, β_i esetleg 0 is lehet). Ekkor

$$\text{l.n.k.o.}(p(z), q(z)) = \prod_{i=1}^s (z - z_i)^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$$

$$\text{l.k.k.t.}(p(z), q(z)) = \prod_{i=1}^s (z - z_i)^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

Bizonyítás: Csak az l.n.k.o esetét bizonyítjuk, a másik eset hasonló.

Könnyen látható, hogy $d(z) = \prod_{i=1}^s (z - z_i)^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ közös osztója $p(z)$ -nek és $q(z)$ -nek. Ha $d_1(z)$ közös osztója e két polinomnak, akkor $p(z) = d_1(z)h_1(z)$ és $q(z) = d_1(z)k_1(z)$ valamely $h_1(z), k_1(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomokra. Bontsuk fel $d_1(z)$ -t, $h_1(z)$ -t, $k_1(z)$ -t gyöktényezős alakra. Így $p(z)$ és $q(z)$ egy-egy gyöktényezős felbontásához jutunk. Mivel ez a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű, $d_1(z)|d(z)$.

Ha két természetes szám, vagy két egyváltozós polinom legnagyobb közös osztóját a fenti módon szeretnénk meghatározni, akkor szükségünk van a számoknak a prímtényezős felbontására, illetve a polinomok gyöktényezős faktorizációjára, amelyek meghatározására nincs gyors algoritmus. Az l.n.k.o viszont faktorizáció nélkül is meghatározható az ún. *euklideszi algoritmus* segítségével, amely könnyen programozható, gyors algoritmus. Az algoritmus megadásához szükségünk van a *maradékos osztás tételére*.

3.7 Tétel (Maradékos osztás tétele):

a.) Minden $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $n > m$ természetes számhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott h és r természetes számok, amelyekre $n = hm + r$ és r vagy 0 vagy $r < m$.

b.) Legyenek $p(x), q(x) \in F[x]$ polinomok. Legyen $\deg p(x) \geq \deg q(x)$ és $q(x) \neq 0$. Ekkor skalárszorozótól eltekintve egyértelműen léteznek olyan $h(x), r(x) \in F[x]$ polinomok, amelyekre $p(x) = h(x)q(x) + r(x)$ és $r(x) = 0$ vagy $\deg r(x) < \deg q(x)$.

Bizonyítás:

a) Ha $m|n$, akkor $n = mh$ valamely $h \in \mathbb{N}$ -re és $r = 0$. Egyébként vegyünk egy olyan $h \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $mh < n < m(h + 1)$. Ekkor $r = n - mh < m$ és $n = mh + r$. Legyen $n = mh_1 + r_1 = mh_2 + r_2$ két fenti tulajdonságú felírása n -nek. Ha $r_1 \neq r_2$ (például $r_2 > r_1$), akkor $m(h_1 - h_2) = r_2 - r_1 > 0$. De $r_2 - r_1 < r_2 < m$ ellentmond ennek. Tehát $r_1 = r_2$ és így $h_1 = h_2$, azaz az előállítás egyértelmű.

b) Ha $q(x)|p(x)$, akkor $p(x) = h(x)q(x)$ valamely $h(x) \in F[x]$ -re. Egyébként $h(x)$ és a következő ún. polinomosztási algoritmussal konstruáljuk meg. Legyen $p(x)$ és $q(x)$ legmagasabb fokú tagjainak hányadosa $c_k x^k$. Legyen $p_1(x) = p(x) - c_k x^k q(x)$. Ekkor $\deg p_1(x) < \deg p(x)$. Ha $\deg p_1(x) < \deg q(x)$, akkor $r(x) = p_1(x)$ $h(x) = c_k x^k$ -ra $p(x) = h(x)q(x) + r(x)$ a fenti előállítás. Ha $\deg p_1(x) \geq \deg q(x)$

maradékot nem kapunk. l.n.k.o (n, m) éppen az utolsó nem 0 maradék, r_{i+2} .

$$\begin{aligned} n &= mh_1 + r_1 & r_1 &\neq 0 \\ m &= r_1 h_2 + r_2 & r_2 &\neq 0 \\ &\vdots \\ r_i &= r_{i+1} h_{i+2} + r_{i+2} & r_{i+2} &\neq 0 \\ r_{i+1} &= r_{i+2} h_{i+3} \end{aligned}$$

b) Legyenek $p(x), q(x) \in F[x]$ polinomok, $\deg p(x) \geq \deg q(x)$, $q(x) \neq 0$. Ekkor l.n.k.o. $(p(x), q(x))$ a következő algoritmussal kapható. Ha $q(x)|p(x)$, akkor l.n.k.o $(p(x), q(x)) = q(x)$, egyébként maradékos osztásokat végzünk el a következő módon mindaddig, amíg 0 maradékot nem kapunk. l.n.k.o $(p(x), q(x))$ éppen az utolsó nem 0 maradék, $r_{i+2}(x)$.

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x)h_1(x) + r_1(x) & r_1(x) &\neq 0 \\ q(x) &= r_1(x)h_2(x) + r_2(x) & r_2(x) &\neq 0 \\ &\vdots \\ r_i(x) &= r_{i+1}(x)h_{i+2}(x) + r_{i+2}(x) & r_{i+2}(x) &\neq 0 \\ r_{i+1}(x) &= r_{i+2}(x)h_{i+3}(x) \end{aligned}$$

Bizonyítás: Csak a b) esetben bizonyítunk. Az a) eset hasonlóan bizonyítható.

A maradékos osztás tulajdonságai szerint $\deg q(x) > \deg r_1(x) > \deg r_2(x), \dots$. Tehát minden lépésben a maradék fokszáma csökken, így előbb-utóbb 0 maradékot kapunk, tehát az algoritmus véges lépésben befejeződik. Be kell látnunk, hogy $r_{i+2}(x)|p(x)$ -nek és $q(x)$ -nek közös osztója és minden közös osztójának többszöröse. Ha az utolsó egyenletből haladunk visszafelé, azt kapjuk, hogy $r_{i+2}(x)|r_{i+1}(x)$, $r_{i+2}(x)|r_i(x), \dots$, azaz $r_{i+2}(x)|q(x)$ és $r_{i+2}(x)|p(x)$ is teljesül.

Ha $d_1(x)|q(x)$ és $d_1(x)|p(x)$ egy közös osztója $p(x)$ -nek és $q(x)$ -nek akkor az egyenleteken fentről lefelé haladva kapjuk, hogy $d_1(x)|r_1(x)$, $d_1(x)|r_2(x), \dots, d_1(x)|r_{i+2}(x)$, tehát $r_{i+2}(x)$ teljesíti a legnagyobb közös osztóra tett feltételeket.

Az euklideszi algoritmus lehetőséget ad polinomok közös gyökeinek meghatározására, hiszen két polinom közös gyökei a legnagyobb közös osztónak is gyökei.

3.10 Feladat: Határozzuk meg a $p(x)$ és $q(x)$ polinomok közös gyökeit, ha $p(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $q(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$

akkor tovább ismételjük az eljárást a $p_1(x), q(x)$ párra. $p(x)$ fokára való indukciónal $p_1(x) = h_1(x)q(x) + r_1(x)$, ahol $\deg r_1(x) < \deg q(x)$, így $p(x) = (c_k x^k + h_1(x))q(x) + r_1(x)$ $p(x)$ kívánt előállítás. Ha $p(x) = h_1(x)q(x) + r_1(x) = h_2(x)q(x) + r_2(x)$ $p(x)$ két különböző fenti típusú előállítása, akkor $(h_1(x) - h_2(x))q(x) = r_2(x) - r_1(x)$ és $\deg(r_2(x) - r_1(x)) < \deg q(x)$, ami csak akkor lehetséges, ha $h_1(x) = h_2(x)$ és ezért $r_1(x) = r_2(x)$. Tehát az előállítás egyértelmű.

3.8 Példa: $p(x) = x^4 + 2x^2 + x + 1$ és $q(x) = x^2 + 1$ esetén megkonstruáljuk $h(x)$ -et és $r(x)$ -et.

$$(x^4 + 2x^3 + x + 1) : (x^2 + 1) = \frac{x^2 + 2x - 1}{h(x)}$$

$$\begin{array}{r} x^4 \quad \quad + x^2 \\ 2x^3 - x^2 + x + 1 \\ \hline 2x^3 \quad + 2x \\ \hline -x^2 - x + 1 \\ -x^2 \quad - 1 \\ \hline -x + 2 \\ \hline \quad \quad \quad r(x) \end{array}$$

A polinomosztási algoritmus mechanikus elvégzésének lépései a következők a fenti példában:

$p(x)$ és $q(x)$ legmagasabbfokú tagjainak hányadosa x^2 , ezt leírjuk az egyenlőség után, majd szorozzuk vele $q(x)$ -et, amelynek eredményét $p(x)$ alá írjuk, és kivonjuk belőle. Az eredmény $(p_1(x))$ a vonal alá kerül, amelyre újból az előző lépések szorzatát alkalmazzuk, azaz elosztjuk $p_1(x)$ legmagasabb fokú tagját $q(x)$ legmagasabb fokú tagjával; az eredményt, $2x$ -et hozzáadjuk az egyenlőség utáni kifejezéshez és szorozzuk vele $q(x)$ -et, amelynek eredményét $p(x)$ alá írjuk, majd kivonjuk belőle. Ezt addig folytatjuk, amíg a vonal alatti maradék foka nem lesz kisebb $q(x)$ fokánál. Ekkor $h(x)$ éppen az egyenlőség jobboldalán kapott kifejezés, $r(x)$ pedig az utolsó maradék.

Most leírjuk a legnagyobb közös osztó meghatározására szolgáló gyors algoritmust.

3.9 Tétel (Euklideszi algoritmus):

a) Legyenek $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ természetes számok, amelyekre $n \geq m$. Ekkor l.n.k.o. (n, m) a következő algoritmussal kapható. Ha $m|n$, akkor l.n.k.o $(n, m) = n$, egyébként maradékos osztásokat végzünk el a következő módon mindaddig, amíg 0

Most gyors algoritmust keresünk egy x_0 szám polinomba való behelyettesítésére. Az egyszerűség kedvéért $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \in \mathbb{C}[z]$ polinomokat tekintünk, de tetszőleges test feletti polinomokra is alkalmazható az eljárás.

Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex szám. Ennek behelyettesítését az $((a_n \alpha + a_{n-1})\alpha + a_{n-2})\alpha \dots + a_0$ ún. Horner-módszerrel végezhetjük el hatékonyan. Ennek formalizálására szolgál az. ún. Horner-séma:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_0
α	a_n	$\alpha a_n + a_{n-1}$			

a felső sorban a polinom együtthatói szerepelnek, az alsó sor elemei pedig $\alpha_n, \alpha a_n + a_{n-1}, \alpha(\alpha a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}$ stb, tehát a következő tag az előzőkből α -val való szorzással és a soron következő együttható hozzáadásával kapható. Ily módon az alsó sor elemei megfelelnek a fenti képlet egyes zárójeleinek, s végül, a_0 alatt $p(\alpha)$ értéke áll.

A maradékos osztás tétele szerint, ha az $(x - \alpha)$ gyöktényezővel végzünk maradékos osztást, akkor $p(x) = (x - \alpha)h(x) + r(x)$, ahol $r(x) = 0$, vagy $\deg(r) < \deg(x - \alpha)$, azaz $r(x) = c \neq 0$ konstans. Így $p(\alpha)$ értékét polinomosztással is megkaphatjuk, $p(\alpha)$ éppen az $(x - \alpha)$ gyöktényezővel való polinomosztás maradéka. Tehát bebizonyítottuk a következőt.

3.11 Tétel: Legyen F test $\alpha \in F$ $p(x) \in F[x]$ polinom. Ekkor α $p(x)$ -nek pontosan akkor gyöke, ha $(x - \alpha)$ osztója $p(x)$ -nek. $p(x)$ -nek az α helyen vett helyettesítési értéke éppen $p(x)$ $(x - \alpha)$ -val való polinomosztásának maradéka.

3.12 Megjegyzés: Indukcióval belátható, hogy a Horner-séma második sorának együtthatói éppen az $(x - \alpha)$ -val vett polinomosztás hányadosának együtthatói. Ily módon, ha egy gyököt megtaláltunk, szorzattá bonthatjuk a polinomunkat és a hányadospolinom további gyökeit próbálhatjuk megkeresni. Szerencsés esetben így eljuthatunk a polinom gyöktényezőző alakjához.

3.13 Példa: $p(x) = x^3 + 1, \alpha = -1$

A Horner-séma szerint

	1	0	0	1
-1	1	-1	1	0

tehát $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. A valós számtest felett ez a polinom tovább nem bontható.

A komplex számok testében $x^2 - x + 1 = 0$ gyökei

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \text{ tehát } x^3 + 1 = (x + 1) \left(x - \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

A fenti példában a komplex gyök konjugáltja is gyöke volt a polinomnak. Ez nem véletlen, ahogy ezt a következő tétel is mutatja.

3.14 Tétel: Valós együtthatós polinom egy z_0 komplex (nem valós) gyökének $\bar{z}_0$ konjugáltja is gyök és azonos multiplicitásúak. Speciálisan, páratlan fokú valós együtthatós polinomnak mindig van valós gyöke.

Bizonyítás: A polinom fokszámára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén a polinomnak csak valós gyöke lehet, így az állítás igaz. Tegyük fel, hogy n -nél kisebb fokú polinomokra már beláttuk az állítást és $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ n -edfokú valós együtthatós polinom amelynek $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gyöke.

Tehát $0 = p(z_0) = a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0$. Konjugáljuk meg az egyenlőség mindkét oldalát. a jobboldalon az összeget tagonként a szorzatokat tényezőként konjugálhatjuk 2.4 és 2.16 (iv) szerint. Mivel a valós együtthatók konjugálásánál nem változnak, kapjuk $0 = \bar{0} = \bar{a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0} = a_n \bar{z_0}^n + \dots + a_1 \bar{z_0} + a_0 = p(\bar{z_0})$. Tehát $\bar{z_0}$ is gyöke $p(z)$ -nek. Így $p(z) = (z - z_0)(z - \bar{z_0})q(z) = (z^2 - (z_0 + \bar{z_0})z + z_0 \bar{z_0})q(z) = (z^2 - (2\operatorname{Re} z_0)z + |z_0|^2)q(z)$.

A konjugált komplex számokhoz tartozó gyöktényezők szorzata tehát valós együtthatós polinom, amellyel elosztva $p(z)$ -t szintén valós együtthatós $q(z)$ polinomot kapunk. $q(z)$ -re az indukció szerint az állítás igaz, így $p(z)$ -re is beláttuk az állítást.

A középiskolából jól ismert másodfokú polinomok gyökök és együtthatók közötti összefüggése, azaz $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ esetén $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Most ezt általánosítjuk:

3.15 Tétel (Viéta-formulák): Legyen $p(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ legalább elsőfokú polinom. Ekkor

$$\frac{a_0}{a_n} (-1)^n = z_1 z_2 \dots z_n$$

$$\frac{a_1}{a_n} (-1)^{n-1} = (z_1 \dots z_{n-1} + \dots + z_2 \dots z_n)$$

gyöke

$$\frac{a_{n-2}}{a_n}(-1)^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}(-1) = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

Bizonyítás: A $p(z)$ gyöktényezős alakjánál elvégezzük a beszorzást és összehasonlítjuk a jobboldal együtthatóival.

3.16 Példa: A $z^n - 1$ polinom gyökei éppen az n -edik egységgyökök. Jelölje ezeket $\varepsilon_k = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{2k\pi}{n})$ $k = 1, \dots, n$.

Igy $z^n - 1 = \prod_{i=1}^n (z - \varepsilon_i)$.

A Viéta formulákat erre a polinomra alkalmazva kapjuk, hogy $0 = \frac{a_{n-1}}{a_n}(-1) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, azaz az n -edik egységgyökök összege 0, és $(-1)^{n+1} = \frac{a_0}{a_n}(-1)^n = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, azaz az n -edik egységgyökök szorzata $(-1)^{n+1}$.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy mennyire lehet előírni egy polinom helyettesítési értékeit, illetve hány olyan polinom van, amely adott helyeken megadott értékeket vesz fel. Természetesen olyan polinom nem létezhet, amely egy adott helyen több értéket is felvehet, és ha nem korlátozzuk, a polinom fokszámát, akkor általában sok megoldás lehetséges. Az eredmény tetszőleges testre igaz, de mi csak a komplex esetre mondjuk ki a tételt.

3.17 Tétel (Interpoláció) Adottak $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ $i = 1, \dots, n$ komplex számpárok, melyekre $x_i \neq x_j$ ha $i \neq j$. Ekkor létezik egyetlen olyan legfeljebb $n - 1$ edfokú $p(z) \in \mathbb{C}$ polinom, amelyre $p(x_i) = y_i$ $i = 1, \dots, n$.

Bizonyítás: Először az egyértelmőséget látjuk be. Ha $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ a feltételeknek eleget tevő két polinom, akkor $p(z) - q(z)$ egy olyan legfeljebb $n - 1$ edfokú polinom, amelynek $x_1, \dots, x_n$ gyöke. Az algebra alaptétele szerint ez csak akkor lehetséges, ha $p(z) - q(z) \equiv 0$, tehát $p(z) = q(z)$.

Most konstruálunk egy ilyen $p(z)$ polinomot Lagrange módszerével.

Definiáljuk az

$$l_i(z) = \frac{(z - x_1) \dots (z - x_{i-1})(z - x_{i+1}) \dots (z - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$i = 1, \dots, n$ ún. Lagrange-féle alappolinomokat.

Ezekre $l_i(x_i) = 1$ $l_i(x_j) = 0$ ha $i \neq j$.

Tehát a $p(z) = \sum_{i=1}^n y_i l_i(z)$ polinom teljesíti a kívánt feltételeket.

3.18 Feladat: Írjuk fel azt a legalacsonyabbfokú $p(x)$ polinomot, amely a megadott x_k helyeken a megfelelő y_k értékeket veszi fel. Adjuk meg $p(x)$ gyöktényezős alakját

x_k	-1	0	1	2
y_k	-16	-5	0	5

Időnként hasznos tudnunk, hogy egy egész együtthatós polinomnak van-e egész vagy racionális gyöke. Ez leolvasható a polinom együtthatóiból.

3.19 Tétel: Egy $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[z]$ egész együtthatós polinomnak az $\frac{a}{b}$ racionális szám, melyre a és b relatív prímek, akkor lehet csak gyöke, ha $a|a_0$ és $b|a_n$. Speciálisan 1 főegyütthatós polinom egész gyökei a polinom konstans tagjának osztói.

Bizonyítás: $0 = p(\frac{a}{b}) = a_n (\frac{a}{b})^n + \dots + (\frac{a}{b}) a_1 + a_0$.

Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát b^n -nel. Ekkor $0 = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \dots + a_1 a b^{n-1} + a_0 b^n$. A jobboldal második tagjától kezdődően minden tag osztható b -vel. Így $b|a_n$. A jobboldal utolsó tagját kivéve minden tag osztható a -val. Így $a|a_0 b^n$. De $(a, b) = 1$, így $a|a_0$.

Jól használható módszert ad a következő eredmény annak megállapítására, hogy van-e a polinomnak többszörös gyöke. Ez is igaz tetszőleges test feletti polinomokra. Mi csak a valós esetben mondjuk ki a tételt.

3.20 Tétel: Egy $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak α pontosan akkor többszörös gyöke, ha $p(\alpha) = 0$ és $p'(\alpha) = 0$. ($p'(x)$ a $p(x)$ polinom deriváltját jelöli)

Bizonyítás: Legyen α $p(x)$ többszörös gyöke. ekkor $p(x) = (x - \alpha)^k q(x)$ valamely $k > 1$ természetes számra és $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomra.

Ekkor $p'(x) = k(x - \alpha)^{k-1} q(x) + (x - \alpha)^k q'(x) = (x - \alpha)^{k-1} [kq(x) + (x - \alpha)q'(x)]$ tehát $p(\alpha) = 0$ és $p'(\alpha) = 0$.

Tegyük most fel, hogy a $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomra $p(\alpha) = 0$ és $p'(\alpha) = 0$. Ekkor 3.11 szerint $p(x) = (x - \alpha)q(x)$ valamely $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomra. $p'(x) = q(x) + (x - \alpha)q'(x)$. Így $0 = p'(\alpha)$ -ből $q(\alpha) = 0$ következik, vagyis $p(x)$ -nek α többszörös gyöke.

3.21 Definíció: Az $R\{X\} = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x), q(x) \in R[x] \text{ } q(x) \neq 0 \right\}$ halmazt valós együtthatós, egyváltozós, racionális függvényeknek vagy racionális függvénytestnek nevezzük.

Az integrálszámítás során hasznos lesz számunkra a következő tétel, amelyet bizonyítás nélkül közlünk.

3.22 Tétel (Parciális törtekre bontás): Legyenek $p(x), q(x) \in R[x]$ polinomok, amelyekre $\deg p(x) < \deg q(x)$ valamint $q(x) = \prod_{i=1}^r (x - x_i)^{l_i} \prod_{i=1}^s (x^2 + a_i x + b_i)^{k_i}$ $q(x)$ felbontása R feletti felbonthatatlan polinomokra. Ekkor

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{A_i}{(x - \alpha_i)} + \frac{B_i}{(x - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{l_i}{(x - \alpha_i)^{l_i}} \right) + \sum_{i=1}^s \left(\frac{u_i^{(1)} x + v_i^{(1)}}{(x^2 + a_i x + b_i)} + \frac{u_i^{(2)} x + v_i^{(2)}}{(x^2 + a_i x + b_i)^2} + \dots + \frac{u_i^{(k_i)} x + v_i^{(k_i)}}{(x^2 + a_i x + b_i)^{k_i}} \right)$$

A bizonyítás indukcióval történhet $q(x)$ fokszámára vonatkozóan, megtalálható például [SZT] 168-179 oldalain. Itt megtalálható a tétel komplex számtest feletti analogonja is.

3.23 Példa: Bontsuk résztörttekre az

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} \text{ racionális törtfüggvényt.}$$

A fenti tétel szerint a felbontás

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1} \text{ alakú,}$$

ahol a, b, c, d alkalmas valós számok. Közös nevezőre hozunk a jobb oldalon majd a számlálóban szereplő polinomok együtthatóit összehasonlítva a, b, c, d -re egy lineáris egyenletrendszert kapunk, amelyet megoldva megkapjuk a kívánt előállítás.

4. Mátrixok

4.1 Definíció: $n \times m$ -es mátrix-nak nevezzünk egy olyan táblázatot, amelynek n sora és m oszlopa van és a táblázat elemei valamilyen számkör elemei, például valós, komplex, egész stb. számok. Ennek megfelelően $M_{n \times m}[R]$, $M_{n \times m}[C]$ jelöli az $n \times m$ -es valós és komplex elemű mátrixok halmazát. $M_n[R]$, $M_n[C]$ jelöli az $n \times n$ -es valós és komplex elemű mátrixok halmazát. Két mátrixot egyenlőnek tekintünk, ha azonos méretűek és elemeik páronként azonosak. A mátrixokat általában nyomtatott nagy betűkkel és kétszer aláhúzva jelöljük. Például $\underline{A}, \underline{B}, \dots$. Ha $\underline{A}$ i -edik sorának j -edik eleme a_{ij} , akkor $\underline{A}$ helyett (a_{ij}) -t is írhatunk. Mátrixokon különféle műveleteket lehet definiálni: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, skalárszoros, transzponálás, konjugálás.

Definíció: Legyenek $\underline{A}, \underline{B} \in M_{n \times m}[C]$ mátrixok, melyekre $\underline{A} = (a_{ij})$ $\underline{B} = (b_{ij})$.

$\underline{A} + \underline{B}$ -vel jelöljük, $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixok összegének nevezzük azt a $\underline{C} = (c_{ij}) \in M_{n \times m}[C]$ mátrixot, amelyre $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

$\underline{A} - \underline{B}$ -vel jelöljük, $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixok különbségének nevezzük azt a $\underline{D} = (d_{ij}) \in M_{n \times m}[C]$ mátrixot, amelyre $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Legyen $\lambda \in C$. $\lambda \underline{A}$ -val jelöljük és $\underline{A}$ λ -szorosának nevezzük azt az $\underline{F} = (f_{ij})$ mátrixot, amelyre $f_{ij} = \lambda a_{ij}$ $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

4.3 Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzatát csak abban az esetben definiáljuk, ha az első mátrix oszlopainak száma a második mátrix sorainak számával egyezik meg.

4.4 Definíció: Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$, $\underline{B} = (b_{ij}) \in M_{m \times k}[\mathbb{C}]$. Ekkor $\underline{AB}$ -vel jelöljük és az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixok szorzatának nevezzük azt a $\underline{C} = (c_{ij}) \in M_{n \times k}[\mathbb{C}]$ mátrixot, amelyre $c_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il}b_{lj}$.

4.5 Példa:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a szorzást könnyebb kiszámítani, ha ábrát készítünk:

			1	0	1
			0	0	0
			0	1	-1
1	2	3	1	3	-2
4	5	6	4	6	-2

Az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixokat jobb felső és bal alsó csúcsaiknál egymás mellé helyezzük. Így a bal oldalon fent egy négyzet keletkezik a jobb oldalon lent pedig a szorzat mátrix méretének megfelelő hely keletkezik, amelynek elemei kitöltésekor az illető sorban és oszlopban lévő vektorokat kell elemeenként összeszorozni és ezeket összeadni.

4.6 Definíció: Az $\underline{A} \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$ mátrix transzponáltjának nevezzük és $\underline{A}^T$ -tal jelöljük azt a $\underline{B} = (b_{ij}) \in M_{m \times n}[\mathbb{C}]$ mátrixot, amelyre $b_{ji} = a_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

(Tehát tulajdonképpen geometriailag a mátrixot tükrözzük a főátlójára, így a sorai és oszlopai kicserélődnek).

4.7 Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A transzponálás tulajdonságairól szól a következő tétel.

4.8 Tétel:

a.) Legyen $\underline{A}, \underline{B} \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$, ekkor $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$

b.) Legyen $\underline{A} \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$, $\underline{B} \in M_{m \times k}[\mathbb{C}]$, ekkor $(\underline{AB})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T$.

(Itt $\underline{B}^T \underline{A}^T$ szorzat a feltétel miatt biztosan értelmes).

Bizonyítás: Az a) állítás nyilvánvaló.

B) Jelölje $\underline{A}_j$ $\underline{A}$ i -edik sorának j -edik elemét.

Ekkor

$$\begin{aligned} i(\underline{AB})_j^T &= j(\underline{AB})_i = \sum_{l=1}^m a_{jl}b_{li} = \sum_{l=1}^m i(\underline{A}^T)_j i(\underline{B}^T)_l = \\ &= \sum_{l=1}^m i(\underline{B}^T)_l i(\underline{A}^T)_j = i(\underline{B}^T \underline{A}^T)_j. \end{aligned}$$

Mivel $(\underline{AB})^T$ és $\underline{B}^T \underline{A}^T$ azonos méretű mátrixok és elemeik páronként azonosak, $(\underline{AB})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T$.

4.9 Definíció: Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$. $\overline{\underline{A}}$ -tal jelöljük és az $\underline{A}$ mátrix konjugáltjának nevezzük azt a $\underline{B} = (b_{ij}) \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$ mátrixot, amelyre $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$ $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

4.10 Példa:

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

A konjugálás tulajdonságairól szól a következő tétel.

4.11 Tétel:

a.) Legyen $\underline{A}, \underline{B} \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$, ekkor $\overline{(\underline{A} + \underline{B})} = \overline{\underline{A}} + \overline{\underline{B}}$

b.) Legyen $\underline{A} \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$, $\underline{B} \in M_{m \times k}[\mathbb{C}]$, ekkor $\overline{(\underline{A} \cdot \underline{B})} = \overline{\underline{A}} \cdot \overline{\underline{B}}$

Bizonyítás: azonnal következik a komplex számok megfelelő tulajdonságaiból és a mátrixok összeadására és konjugálására vonatkozó szabályból.

4.12 Megjegyzés: $M_n[\mathbb{C}]$ -ben, illetve $M_n[\mathbb{R}]$ -ben a fenti összes művelet értelmes. A műveletekre a következő tulajdonságok teljesülnek: az összeadás kommutatív és asszociatív, létezik additív neutrális elem, a csupa 0-ból álló mátrix, létezik additív inverz elem, nevezetesen $\underline{A}$ -hoz $(-1)\underline{A}$. A szorzás asszociatív, de nem kommutatív. Például:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ de}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ez azt is mutatja, hogy két nem azonosan 0 mátrix szorzata lehet 0. Az ilyen tulajdonságú elemeket valódi *nullosztóknak* szokás hívni.

Van multiplikatív neutrális elem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezt *egységmátrixnak* szokás hívni és I -vel jelöljük.

Teljesül a disztributivitás is.

Tehát $M_n[C]$ és $M_n[R]$ nem kommutatív, nullosztókat tartalmazó gyűrűk.

Multiplikatív inverze nem minden mátrixnak van. Látni fogjuk majd, hogy pontosan azon mátrixoknak van inverzük, amelyek nem nullosztók.

Bár a szorzás nem kommutatív, bizonyos mátrixok mindig felcserélhetők. Például $I \underline{A} = \underline{A} I$ és $\underline{A} \underline{A}^k = \underline{A}^k \underline{A}$ minden $\underline{A} \in M_n[C]$ mátrixra teljesül.

Mielőtt a mátrixokról további tulajdonságokat bizonyítanánk, a mátrixok néhány alkalmazási területére mutatunk példát.

1.) Lineáris egyenletrendszerek

adot m egyenlet n ismeretlennel a következő módon

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Itt a_{ij} $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$ és $b_1, \dots, b_m$ adottak és keressük azon $x_1, \dots, x_n$ szám n -eseket, amelyek ezt teljesítik. Ezt az egyenletrendszert tömörebben meg lehet fogalmazni, ha bevezetjük az $\underline{A} = (a_{ij})$ *együlthatómátrixot* és az

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

4 oszlopból álló mátrixokat (ú.n. **vektorek**).

Ekkor az egyenletrendszer röviden az $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel fejezhető ki.

2) Gazdasági modellek

Legyenek $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_{m \times n}[R]$ $\underline{B} = (b_{ij}) \in M_{n \times l}[R]$ mátrixok. Tegyük fel, hogy van n darab félkésztermékünk, m anyagunk és l késztermékünk.

Jelölje a_{ij} a j -edik félkésztermékben az i -edik anyag mennyiségét. Jelölje b_{ij} a j -edik termékben az i -edik félkésztermék mennyiségét.

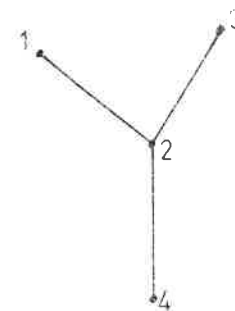
Jelölje c_{ij} a j -edik termékben az i -edik anyag mennyiségét. Legyen $C = (c_{ij}) \in M_{m \times l}[R]$.

Ekkor $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, azaz $\underline{A} \underline{B} = \underline{C}$.

3. Gráfok

Gráfnak neveznek egy olyan halmazt, amely pontokból (ú.n. *szögpontokból*) áll és bizonyos pontok össze vannak kötve szakaszokkal (ú.n. *élekkel*)

Például:



5. ábra

Minden gráfhoz hozzá lehet rendelni egy ú.n. *adjeccia mátrixot* $\underline{A}$ -t. n szögpontú gráf esetén $\underline{A} \in M_n[R]$ és $\underline{A} = (a_{ij})$, ahol

$$\begin{cases} 0 & \text{ha az } i\text{-edik és } j\text{-edik pont között nincs él} \\ 1 & \text{ha az } i\text{-edik és } j\text{-edik pont között van él} \end{cases}$$

A fenti példában

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Könnyű belátni, hogy $\underline{A}^k$ i -edik sorának j -edik eleme épp azt adja, hogy i -ből j -be hányféleképpen lehet eljutni k lépésben (azaz k ponton keresztül), ha csak az összekötött pontok között lehet haladni.

4.13 Definíció: Az 1 oszlopból álló mátrixot *oszlopvektornak* az 1 sorból álló mátrixot *sorvektornak* nevezzük. C^n illetve R^n jelöli az n hosszúságú, komplex

illetve valós elemű oszlopvektorok halmazát. A sorvektorokat 1-szer aláhúzott kis nyomtatott betűkkel, a sorvektorokat, mint ezek transzponáltjait jelöljük.

4.14 Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3,$$

ennek transzponáltja $(1, i+1, -1)$ sorvektor.

4.15 Megjegyzés: A sor- és oszlopvektorokon is értelmes a mátrioxsszeadás, kivonás, skalárokkal való szorzás, transzponálás, konjugálás. A szorzás nem értelmes, de ha

$$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{akkor } \underline{a}^T \underline{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \in \mathbb{R}.$$

Ezt nevezik az $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzatának, szokásos jelölése $(\underline{a}, \underline{b})$.

$\underline{a} \underline{b}^T$ is értelmes ez

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & a_n b_n \end{pmatrix} \in M_n[\mathbb{R}],$$

ezt nevezzük $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok *diadikus szorzatának*.

Most a mátrixok szorzásának néhány tulajdonságát mutatjuk be. Az állítások könnyen ellenőrizhetők, ezért nem bizonyítjuk őket.

1) Ha $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$ és $\underline{b} \in \mathbb{C}^m$ olyan, hogy $\underline{b}$ -nek minden komponense 0 kivéve az i -ediket, akkor $\underline{A}\underline{b}$ éppen $\underline{A}$ -nak az i -edik oszlopvektora. Ha $\underline{B} \in M_{m \times k}[\mathbb{C}]$, akkor $\underline{b}^T \underline{B}$ éppen $\underline{B}$ -nek az i -edik sorvektora.

2) Ha $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$ és

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

valamint $\underline{A}$ oszlopvektorai $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$, akkor $\underline{A}\underline{b} = \sum_{i=1}^m b_i \underline{a}_i$

3) Ha $\underline{a}^T = [a_1, \dots, a_n]$ $\underline{B} \in M_{n \times l}[\mathbb{C}]$ és $\underline{B}$ sorvektorai $\underline{b}_1^T, \underline{b}_2^T, \dots, \underline{b}_n^T$, akkor $\underline{a}^T \underline{B} = \sum_{i=1}^n a_i \underline{b}_i^T$

4.) Ha $\underline{A} \in M_{n \times m}[\mathbb{C}]$, $\underline{B} \in M_{m \times l}[\mathbb{C}]$ és $\underline{B}$ oszlopvektorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_l$, akkor $\underline{A}\underline{B}$ oszlopvektorai $\underline{A}\underline{b}_1, \underline{A}\underline{b}_2, \dots, \underline{A}\underline{b}_l$

Ha $\underline{A}$ sorvektorai $\underline{a}_1^T, \dots, \underline{a}_n^T$, akkor $\underline{A}\underline{B}$ sorvektorai $\underline{a}_1^T \underline{B}, \underline{a}_2^T \underline{B}, \dots, \underline{a}_n^T \underline{B}$.

4.16 Megjegyzés: Bár a fenti definíciókat és tételeket komplex elemű mátrixokra mondtuk ki többségük érvényben marad tetszőleges test vagy gyűrű feletti mátrixokra is.

5. Determinánsok

5.1 Definíció: Egy $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ kölcsönösen egyértelmű leképezést az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy permutációjának nevezzük.

5.2 Megjegyzés: Ha π az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja, akkor $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ az $1, 2, \dots, n$ számok egy sorrendje. Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak összesen $n!$ darab permutációja van. Ezek halmazát S_n -nel jelöljük.

5.2 Definíció: Legyen $\pi \in S_n$. Azon (i, j) számpárokat, ahol $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$ és $\pi(i) > \pi(j)$ a π permutáció inverzióinak nevezzük, ezek számát $I(\pi)$ -vel jelöljük.

5.3 Definíció: Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[C]$ mátrix. $\det(\underline{A})$ -val (vagy $|\underline{A}|$ -val) jelöljük és az $\underline{A}$ mátrix determinánsának nevezzük a következő számot:

$$\det(\underline{A}) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

szemléletesen ez azt jelenti, hogy minden $\pi \in S_n$ permutációnak megfelelően kivesszünk az $\underline{A}$ mátrix minden sorából és oszlopából pontosan 1 elemet, nevezetesen az i -edik sorból a $\pi(i)$ -ediket, ezeket összeszorozzuk, az így kapott ún. kifejtési tagokat megszorozzuk $(-1)^{I(\pi)}$ -nel majd összeadjuk őket.

5.4 Példa

$$\begin{aligned} n = 1 \quad \det(a_{11}) &= a_{11} \\ &\quad (0) \\ n = 2 \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &\quad (0) \quad (1) \\ n = 3 \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad (0) \quad (2) \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad (2) \quad (1) \quad (1) \quad (3) \end{aligned}$$

Az egyes kifejtési tagok alá írtuk az illető permutációk inverziójának számát.

A fenti definíción kívül szokás még a determinánst indukcióval, rekurzív módon definiálni.

5.5 Definíció (Determináns másik lehetséges definíciója)

Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[C]$.

Ha $n = 1$ $\det(\underline{A}) = a_{11}$

Ha $n = 2$ $\det(\underline{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Tegyük fel, hogy minden $\underline{X} \in M_{n-1}[C]$ -re már definiáltuk $\det(\underline{X})$ -et, ekkor

$\underline{A} \in M_n[C]$ -re $\det(\underline{A}) = a_{11}\det(\underline{A}_{11}) - a_{12}\det(\underline{A}_{12}) + \dots + (-1)^{n-1}a_{1n}\det(\underline{A}_{1n})$

ahol $\underline{A}_{ij}$ $\underline{A}$ i -edik sorának és j -edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix.

5.6 Megjegyzés: A fenti két definíció ekvivalens. a másodikkól az első indukcióval bizonyítható, ezt az olvasóra bízuk. Az első definícióból a másodikat be fogjuk látni később, az ú.n. "kifejtési tétel" bebizonyításával. A továbbiakban mindig az első definícióból indulunk ki.

5.7 Példa Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ekkor a 2. definíció alapján

$$\det(\underline{A}) = 3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -21$$

Mielőtt belátnánk a determinánsok főbb tulajdonságait, megemlíjtük a determináns néhány alkalmazási területét.

1. Lineáris egyenletrendszerek (Cramer-szabály)

Legyen $\underline{Ax} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer, ahol $\underline{A} \in M_n[C]$,

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ha $\underline{A}$ determinánsa nem 0, akkor az egyenletrendszer megoldását a következőképpen kaphatjuk meg: jelölje c_i annak a mátrixnak a determinánsát, amelyet úgy kapunk, hogy $\underline{A}$ i -edik oszlopát kicseréljük $\underline{b}$ -re. Ekkor $x_i = \frac{c_i}{\det(\underline{A})}$ $i = 1, \dots, n$.

2. A determináns geometriai tartalma

A determinánst úgy is felfoghatjuk, mint egy "n-dimenziós paralelepipedon előjeles térfogatát". Ez a szemlélet sokat segíthet abban, hogy determinánsokra vonatkozó állítások helyességét megsejtsük. $n = 2$ és $n = 3$ esetekben ezt be is lehet bizonyítani.

5.7 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy a sík (a_1, a_2) , (b_1, b_2) pontjaiba mutató helyvektorok, mint oldalak által meghatározott paralelogramma előjeles területe

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. Többses integrálok (Jacobi-determináns)

Ha egy többses integrál integrációs változóit megváltoztatjuk, akkor a integrandust is módosítani kell a térfogatelem változásának mértékével, amelyet az ú.n. Jacobi determináns ad meg.

4. Inverz mátrix számítása

Látjuk majd, hogy egy $\underline{A} \in M_n[C]$ mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\underline{A}$ determinánsa nem 0.

Ekkor $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{A})} [(-1)^{i+j} \det(\underline{A}_{ij})]$, ahol $\underline{A}_{ij}$ ugyanazt jelenti, mint az 5.5 Definícióban.

5.8 Definíció: Legyen $\underline{A} \in M_n[C]$ mátrix. Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ reguláris, ha $\det(\underline{A}) \neq 0$, egyébként $\underline{A}$ -t szingulárisnak nevezzük.

5.9 Tétel (Determinánsok alaptulajdonságai):

Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[C]$. Ekkor

- (i) Ha $\underline{A}$ -nak van egy csupa 0-ból álló sora, akkor $\det(\underline{A}) = 0$
- (ii) Ha $\underline{A}$ egy sorának minden elemét egy $\lambda \in \mathbb{C}$ számmal szorozzuk meg, akkor a determinánsának értéke λ -szorosára változik.
- (iii) Ha $\underline{A}$ két sorát felcseréljük, akkor a determinánsa (-1) -szeresére változik.
- (iv) Ha $\underline{A}$ két sora megegyezik, akkor a determinánsa 0.
- (v) Ha $\underline{A}$ -nak egy sora egy másik sorának skalárszorosa akkor $\det(\underline{A}) = 0$.
- (vi) $\underline{A}$ determinánsa nem változik, ha egy sorának skalárszorosát egy másik sorához adjuk.
- (vii) Ha $\underline{A}$ -nak egyik sora, $\underline{s}_j^T = \sum_{i \neq j} \lambda_i \underline{s}_i^T$, ahol $\lambda_i \in \mathbb{C}$, (azaz kifejezhető a többi sor ú.n. lineáris kombinációjaként), akkor $\det(\underline{A}) = 0$.
- (viii) $\det(\underline{A}) = \det(\underline{A}^T)$.
- (ix) Az (i)-(vii) állítások oszlopokra is igazak.

Bizonyítás

- (i) Tegyük fel, hogy $\underline{A}$ -nak i -edik sora csupa 0-ból áll. Ekkor $\det(\underline{A}) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{i-1\pi(i-1)} 0 a_{i+1\pi(i+1)} \cdots a_{n\pi(n)} = 0$
- (ii) Legyen $\underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ egy olyan mátrix, amelyet $\underline{A}$ -ból úgy kapunk, hogy $\underline{A}$ i -edik sorának minden elemét egy $\lambda \in \mathbb{C}$ számmal megszorozzuk. Ekkor
- $$\begin{aligned} \det(\underline{B}) &= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \cdots a_{i-1\pi(i-1)} \lambda a_{i\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} = \\ &= \lambda \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} = \lambda \det(\underline{A}). \end{aligned}$$
- (iii) Legyen $\underline{B} = (b_{ij}) \in M_n[\mathbb{C}]$ egy olyan mátrix, amelyet úgy kapunk $\underline{A}$ -ból, hogy annak i -edik és j -edik sorát felcseréljük.
- Legyen $\pi^* \in S_n$ egy olyan permutáció, amelyre

$$\begin{aligned}\pi^*(i) &= \pi(j) \\ \pi^*(j) &= \pi(i) \quad \text{és} \\ \pi^*(k) &= \pi(k), \quad \text{ha } k \neq i \text{ és } k \neq j.\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} b_{i\pi(i)} &= a_{j\pi(i)} = a_{j\pi^*(j)} \\ b_{j\pi(j)} &= a_{i\pi(j)} = a_{i\pi^*(i)} \\ b_{k\pi(k)} &= a_{k\pi(k)} = a_{k\pi^*(k)}, \quad \text{ha } k \neq i \text{ és } k \neq j. \end{aligned}$$

Ezért

$$b_{1\pi(1)} \dots b_{n\pi(n)} = a_{1\pi^*(1)} \dots a_{n\pi^*(n)}$$

Mivel a $\pi \rightarrow \pi^*$ leképezés S_n -nek önmagába való kölcsönösen egyértelmű megfeleltetése, $\det(\underline{B})$ és $\det(\underline{A})$ kifejtési tagjai között a

$$b_{1\pi(n)} \dots b_{n\pi(n)} \mapsto a_{1\pi^*(1)} \dots a_{n\pi^*(n)}$$

megfeleltetés szintén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Azt állítjuk, hogy az egymásnak megfelelő kifejtési tagok előjele (-1) -szerese egymásnak.

Ehhez ki kell számolnunk $I(\pi)$ -ből $I(\pi^*)$ -ot.

Legyen $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(i), \dots, \pi(j), \dots, \pi(n))$ a π permutációinak megfelelő sorrend. Ebből $(\pi^*(1), \pi^*(2), \dots, \pi^*(i), \dots, \pi^*(j), \dots, \pi^*(n))$ $2(j-i)-1$ cserével kapható: $\pi(i)$ -t jobbra léptetjük $(j-i)$ -vel, majd $\pi(j)$ -t balra léptetjük $(j-i-1)$ -gyel. Összesen $2(j-i)-1$ cserét hajtottunk végre. A szomszédos elemek cseréjekor az inverziók száma 1-gyel változik, tehát $2(j-i)-1$ cserénél páratlan számmal változik meg, tehát $(-1)^{I(\pi^*)} \cdot (-1) = (-1)^{I(\pi)}$

Igy

$$\begin{aligned} \det(\underline{B}) &= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} b_{1\pi(1)} \dots b_{n\pi(n)} = \\ &= \sum_{\pi^* \in S_n} (-1)^{I(\pi^*)} (-1)^{a_{1\pi^*(1)}} \dots a_{n\pi^*(n)} = (-1) \det(\underline{A}) \end{aligned}$$

- (iv) Tegyük fel, hogy $\underline{A}$ -nak az i -edik és a j -edik sora megegyezik. Cseréljük fel őket. (iii) szerint ekkor $\det(\underline{A})$ (-1) -szeresére változik. Másrészt, mivel $\underline{A}$ nem változott, $\det(\underline{A})$ sem változik. Így $\det(\underline{A}) = (-1)\det(\underline{A})$, azaz $2\det(A) = 0$, és $\det(\underline{A}) = 0$.
- (v) Legyen $\underline{A}$ i -edik sora a j -edik sorának λ -szorososa. Legyen $\underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ az a mátrix, amely az i -edik sor kivételével megegyezik $\underline{A}$ -val, az i -edik sora pedig a j -edik sorával egyezik meg. Ekkor (ii) és (iv) szerint $\det(\underline{A}) = \lambda \det(\underline{B}) = \lambda \cdot 0 = 0$.
- (vi) Adjuk hozzá az $\underline{A}$ mátrix j -edik sorához az i -edik sor λ -szorosát. Jelöljük az így kapott mátrixot $\underline{B}$ -vel. Ekkor

$$\det(\underline{\underline{B}}) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots (a_{j\pi(j)} + \lambda a_{i\pi(j)}) \dots a_{n\pi(n)}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{j\pi(j)} \dots a_{n\pi(n)} + \\ + \lambda \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{i\pi(j)} \dots a_{n\pi(n)} = \det(\underline{A}),$$

Mivel a második szumma egy olyan mátrix determinánsa, amelyben az i -edik és j -edik sor megegyezik, ez (iv) szerint 0.

(vii) Mivel $\underline{A}$ j -edik sora $\underline{s}_j^T = \sum_{i \neq j} \lambda_i \underline{s}_i^T$ a többi sorainak lineáris kombinációja, ezért $\underline{A}$ j -edik sorát kinullázhatjuk, ha a j -edik sorához rendre hozzáadjuk az i -edik sorának $(-\lambda_i)$ -szeresét minden $i \neq j$ -re.

(vi) szerint ekkor a determináns nem változik. Másrészt (i) szerint ennek az új mátrixnak a determinánsa 0. Tehát $\det(\underline{A}) = 0$.

(viii) Legyen $\underline{B} = \underline{A}^T$. Minden $\pi \in S_n$ -re definiáljuk $\pi^* \in S_n$ -t a következőképpen. $\pi^*(\pi(i)) = i$. Tehát π^* tulajdonképpen π -nek, mint leképezésnek az inverze. Ekkor a $\pi \mapsto \pi^*$ megfeleltetés S_n -nek önmagára való kölcsönösen egyértelmű megfeleltetése és

$$b_{i\pi(i)} = a_{\pi(i)i} = a_{\pi(i)\pi^*(\pi(i))} \quad i = 1, \dots, n$$

Tehát

$$b_{1\pi(1)} \dots b_{n\pi(n)} = a_{1\pi^*(1)} \dots a_{n\pi^*(n)} \\ I(\pi) = |\{(i, j) | i < j \text{ és } \pi(i) > \pi(j)\}| = \\ |\{(i, j) | (i - j)(\pi(i) - \pi(j)) < 0\}| = \\ = |\{(\pi(i), \pi(j)) | (\pi^*(\pi(i)) - \pi^*(\pi(j)))(\pi(i) - \pi(j)) < 0\}| = I(\pi^*)$$

Igy

$$\det(\underline{B}) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} b_{1\pi(1)} \dots b_{n\pi(n)} = \\ = \sum_{\pi^* \in S_n} (-1)^{I(\pi^*)} a_{1\pi^*(1)} \dots a_{n\pi^*(n)} = \det(\underline{A}).$$

(ix) $\underline{A}^T$ sorai éppen $\underline{A}$ oszlopai, $\underline{A}^T$ soraira a fenti állítások érvényesek. Ezen kívül (viii) szerint $\det(\underline{A}) = \det(\underline{A}^T)$, tehát a fenti állítások $\underline{A}$ oszlopaire is érvényesek.

A következőkben célunk a kifejtési tétel bizonyítása lesz, amelyhez szükségünk lesz néhány segédtétele.

5.10 Segédtelem: Ha $\underline{A}, \underline{B} \in M_n[C]$ mátrixok az i -edik soruktól eltekintve megegyeznek, akkor

$$\det(\underline{A}) + \det(\underline{B}) = \det(\underline{C}), \quad \text{ahol a } \underline{C} \in M_n[C]$$

mátrixnak i -edik sora az $\underline{A}$ mátrix i -edik sorának és a $\underline{B}$ mátrix i -edik sorának összege, $\underline{C}$ többi sora pedig $\underline{A}$ illetve $\underline{B}$ többi soraival egyezik meg.

Bizonyítás: Legyen $\underline{A} = (a_{ij})$ és $\underline{B} = (b_{ij})$. Ekkor

$$\det(\underline{A}) + \det(\underline{B}) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} + \\ + \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \dots b_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} = \\ = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \dots a_{i-1\pi(i-1)} (a_{i\pi(i)} + b_{i\pi(i)}) \dots a_{n\pi(n)} = \det(\underline{C})$$

5.11 Definíció: Egy $\underline{A} \in M_n[C]$ mátrix (i, j) -hez tartozó *aldeterminánsa* $\underline{A}$ i -edik sorának és j -edik oszlopának elhagyásával kapott $\underline{A}_{i,j}$ mátrix $\det(\underline{A}_{i,j})$ determinánsa. Az $\underline{A}$ mátrix (i, j) -hez tartozó *előjeles alldeterminánsának* nevezzük a $(-1)^{i+j} \det(\underline{A}_{i,j})$ számot.

5.12 Példa:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

esetén a $(2, 1)$ -hez tartozó alldetermináns

$$\det(\underline{A}_{2,1}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6$$

ugyanekhez tartozó előjeles alldetermináns

$$(-1)^{2+1} \det(\underline{A}_{2,1}) = 6,$$

5.13 Megjegyzés: Az előjeles alldeterminánsnál kapott $(-1)^{i+j}$ szorzó értéke ± 1 . Ennek értékét legegyszerűbben az ún. "sakktáblaszabály" alkalmazásával kaphatjuk meg.

Például $n = 3$ esetén:

+	-	+
-	+	-
+	-	+

$A +$ illetve $-$ azt jelöli, hogy az illető helyhez tartozó aldeterminánst $+1$ -gyel vagy -1 -gyel kell-e megszorozni.

A következő segédteétel a kifejtési tétel egy speciális esetével foglalkozik.

5.14 Segédteétel: Ha egy $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[C]$ mátrix i -edik sorában a j -edik elemén kívül minden elem 0, akkor

$$\det(\underline{A}) = a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\underline{A}_{ij})$$

Bizonyítás: Hajtsunk végre $(i-1)$ sorcserét és $(j-1)$ oszlopcserét úgy, hogy az így kapott $\underline{B} = (b_{ij})$ mátrix első sorában az első elemén kívül minden elem 0. A determináns definíciója szerint ekkor $\det(\underline{B}) = b_{11} \det(\underline{B}_{11})$, mivel csak azok a kifejtési tagok nem 0-k, amelyekben szerepel $\underline{B}$ első sorának első eleme és ezen kifejtési tagok előjele megegyezik a $\det(\underline{B}_{11})$ -beli tényezőiknek ottani előjélével, hiszen az 1. sor első elemével való megszorításuk nem növeli a kifejtési taghoz tartozó permutáció inverzióinak számát.

A sor- és oszlopcserék miatt $\det(\underline{B}) = (-1)^{(i-1)}(-1)^{(j-1)} \det(\underline{A}) = (-1)^{i+j} \det(\underline{A})$.

Ezen kívül $b_{11} = a_{ij}$ és $\underline{B}_{11} = \underline{A}_{ij}$, így

$$(-1)^{i+j} \det(\underline{A}) = a_{ij} \det(\underline{A}_{ij}),$$

amelyből

$$\det(\underline{A}) = a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\underline{A}_{ij}).$$

Mostmár be tudjuk bizonyítani a kifejtési tételt.

5.15. Tétel (Kifejtési tétel): Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[C]$. Ekkor

$$\det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\underline{A}_{ij})$$

Azaz $\det(\underline{A})$ -t megkaphatjuk, ha $\underline{A}$ egy rögzített sorának elemeit rendre megszorozzuk a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsokkal is összeadjuk őket. (Ha van a sor az i -edik sor, akkor azt mondjuk, hogy a determinánst az i -edik sora szerint fejtettük ki)

Bizonyítás: Defináljuk a $\underline{B}^{(1)}, \dots, \underline{B}^{(n)}$ mátrixokat a következő módon: az i -edik soruktól eltekintve megegyeznek $\underline{A}$ -val, a $\underline{B}^{(j)}$ mátrix i -edik sorában a j -edik elemén kívül mindegyik 0, a j -edik pedig a_{ij} . Ezért az $\underline{A}$ mátrix i -edik sora a $\underline{B}^{(1)}, \dots, \underline{B}^{(n)}$ mátrixok i -edik sorainak összege.

A 5.10 segédteétel többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy $\det(\underline{A}) = \det(\underline{B}^{(1)}) + \dots + \det(\underline{B}^{(n)})$.

Az 5.14 segédteétel szerint $\det(\underline{B}^{(j)}) = a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\underline{A}_{ij})$, így

$$\det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\underline{A}_{ij}).$$

5.16 Következmény: $j = 1$ -re a fenti tételt alkalmazva kapjuk, hogy a determináns 5.5-ös definíciója következik az 5.3-as definícióból,

5.17 Megjegyzés: A kifejtési tétel igaz marad, ha sor helyett oszlopot mondunk, mivel $\det(\underline{A}) = \det(\underline{A}^T)$ és $\underline{A}^T$ sorai éppen $\underline{A}$ oszlopai.

5.18 Megjegyzés: A fenti tétel bizonyításánál bizonyos mátrixok determinánsainak összege egy újabb mátrix determinánsa. Általában nem igaz, hogy mátrixok összegének determinánsa az illető mátrixok determinánsainak összege lenne. Például $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de determinánsaikra $0 + 0 \neq 1$.

5.19 Megjegyzés: A kifejtési tétel lehetőséget ad a determináns rekurzív kiszámítására. Kisebb példák esetén általában ezt alkalmazzuk. Számítógépes program írásakor viszont nem ez a legjobb algoritmus. Egyszerűbb, ha az 5.9 Tétel tulajdonságait felhasználva mátrixokat ún. "felső háromszög" alakra hozzuk, azaz kinullázzuk a fődiagonális alatti részt. Egy ilyen mátrix determinánsa éppen a fődiagonálisban lévő elemek szorzata.

Az inverz mátrixra vonatkozó képlethez szükségünk lesz a következő tételre.

5.20 Tétel (Ferde kifejtés): Ha egy $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[C]$ mátrix egy sorának (illetve oszlopának) elemeit rendre megszorozzuk egy másik sorhoz (illetve oszlophoz) tartozó előjeles aldeterminánssal és összeadjuk őket, akkor 0-t kapunk.

Bizonyítás: Elég sorokra bizonyítani, oszlopokra hasonlóan bizonyítható.

Az $\underline{A}$ mátrix i -edik sorának elemeit szorozzuk meg a k -adik sor elemeihez tartozó előjeles determinánsokkal, és adjuk össze őket. Ekkor egy olyan mátrix

determinánsát kapjuk, amely a k -edik sortól eltekintve megegyezik $\underline{A}$ -val, k -edik sora pedig az i -edik sorral egyezik meg. Így az 5.9 Tétel (iv) tulajdonsága szerint ez a determináns 0.

5.21 Következmény: Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[\mathbb{C}]$ és $\underline{B} = (b_{ij}) \in M_n[\mathbb{C}]$, melyre $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\underline{A}_{ij})$.

Ekkor $\underline{B}^T \underline{A} = \underline{A} \underline{B}^T = d \cdot \underline{I}$, ahol $d = \det(\underline{A})$.

Bizonyítás: Következik a kifejtési tételből és a ferde kifejtésből.

5.22 Következmény Ha egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix reguláris, akkor létezik $\underline{A}$ -nak multiplikatív inverze, azaz olyan $\underline{A}^{-1}$ mátrix, amelyre $\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{I}$. Az inverz egyértelmű és $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{A})} [(-1)^{i+j} \det(\underline{A}_{ij})]^T$.

Bizonyítás: Az 5.21 Következmény szerint $\frac{1}{d} \underline{B}^T \underline{A} = \underline{A} \frac{1}{d} \underline{B}^T = \underline{I}$, így $\frac{1}{d} \underline{B}^T$ $\underline{A}$ -nak inverze.

Az inverz egyértelmű, ugyanis, ha $\underline{A}$ -nak $\underline{A}^{-1}$ és $\underline{X}$ két inverze akkor $\underline{X} \underline{A} = \underline{I}$. Ezt $\underline{A}^{-1}$ -gyel jobbról megszorozva, kapjuk, hogy $\underline{X} = \underline{A}^{-1}$.

5.23 Következmény (Cramer-szabály). Ha $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ reguláris mátrix, akkor az $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Ha c_i jelöli annak a mátrixnak a determinánsát, amely az i -edik oszloptól eltekintve megegyezik $\underline{A}$ -val, az i -edik oszlopa pedig $\underline{b}$, akkor

$$x_i = \frac{c_i}{\det(\underline{A})} \quad i = 1, \dots, n$$

Bizonyítás: Mivel $\underline{A}$ reguláris létezik $\underline{A}^{-1}$.

Így $\underline{x} = \underline{I} \underline{x} = (\underline{A}^{-1} \underline{A}) \underline{x} = \underline{A}^{-1} (\underline{A} \underline{x}) = \underline{A}^{-1} \underline{b}$, mivel az egységmátrixszal való szorzás minden $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ vektort helybenhagy. Nézzük meg tüzetesebben mit is ad ez $\underline{x}$ komponenseire.

A mátrixszorzás szabályai szerint $x_i = \underline{x}$ i -edik sora = $\underline{A}^{-1} \underline{b}$ i -edik sora =

$$\frac{1}{\det(\underline{A})} [(-1)^{i+j} \det(\underline{A}_{ij})]^T \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad i\text{-edik sora.}$$

Ez pedig $\frac{1}{\det(\underline{A})}$ -szor egy olyan mátrix i -edik oszlopa szerinti kifejtése, amely az i -edik oszloptól eltekintve megegyezik $\underline{A}$ -val, i -edik oszlopa pedig $\underline{b}$. Tehát az állítást bebizonyítottuk.

$M_n[\mathbb{C}]$

5.24 Megjegyzés: Ha $\underline{A}, \underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixoknak van inverzük akkor $\underline{AB}$ -nek is van és ez $\underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1}$.

Bizonyítás:

$$(\underline{AB})(\underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1}) = \underline{A}(\underline{BB}^{-1})\underline{A}^{-1} = \underline{A} \underline{I} \underline{A}^{-1} = \underline{AA}^{-1} = \underline{I}$$

$$(\underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1})(\underline{AB}) = \underline{B}^{-1}(\underline{A}^{-1} \underline{A})\underline{B} = \underline{B}^{-1} \underline{I} \underline{B} = \underline{B}^{-1} \underline{B} = \underline{I}$$

Az inverz egyértelműség miatt $\underline{AB}$ inverze $\underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1}$.

Láttuk, hogy reguláris mátrixnak van inverze. Felmerül a kérdés, hogy lehet-e szinguláris mátrixnak inverze. Ez nem fordulhat elő, ahogy ezt a következő tétel mutatja, melyet az 5.34 Következményben bizonyítunk.

5.25 Tétel (Determinánsok szorzástétele): Legyen $\underline{A}, \underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$. Ekkor $\det(\underline{AB}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{B})$.

5.26 Következmény: Ha $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ szinguláris mátrix, akkor $\underline{A}$ -nak nem lehet inverze.

Bizonyítás: Ha $\underline{A}^{-1}$ létezne, akkor $1 = \det(\underline{I}) = \det(\underline{AA}^{-1}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{A}^{-1}) = 0$ lenne, ami ellentmondás.

5.27 Következmény: Ha $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ reguláris mátrix, akkor $\det(\underline{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\underline{A})}$.

Bizonyítás: Mint az előbbi következmény bizonyításánál láttuk $1 = \det(\underline{AA}^{-1}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{A}^{-1})$, tehát $\det(\underline{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\underline{A})}$.

5.28 Következmény reguláris mátrixok nem lehetnek nullosztók, azaz ha $\underline{A}, \underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixokra $\underline{AB} = \underline{0}$, és sem $\underline{A}$ sem $\underline{B}$ nem $\underline{0}$ mátrix, akkor $\underline{A}$ is $\underline{B}$ is szinguláris mátrixok.

Bizonyítás: Ha például $\underline{A}$ reguláris lenne, akkor az $\underline{AB} = \underline{0}$ egyenlőséget szorozzuk be balról $\underline{A}^{-1}$ -zel.

Ekkor $\underline{0} = \underline{A}^{-1}(\underline{AB}) = (\underline{A}^{-1}\underline{A})\underline{B} = \underline{IB} = \underline{B}$, ami ellentmondás. Hasonlóan látható be, hogy $\underline{B}$ sem lehet reguláris.

Ennek az állításnak a megfordítása is igaz, amely majd a mátrix rangjának definiálása után világos lesz. Addig is feladatként tűzzük ki.

5.29 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ szinguláris mátrix, akkor $\underline{A}$ nullosztó, azaz létezik hozzá egy olyan nem azonosan $\underline{0}$ mátrix $\underline{X}$, hogy $\underline{AX} = \underline{0}$.

5.30 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy reguláris mátrixok szorzata reguláris.

5.31 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ szinguláris és $\underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ tetszőleges mátrix, akkor $\underline{AB}$ szinguláris.

5.32 Definíció: Hagyjuk el egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix $n-r$ sorát és $n-r$ oszlopát. Az így kapott $r \times r$ -es mátrixot, $\underline{A}$ egy $r \times r$ -es *minormátrixának* hívjuk. Ennek determinánsa $\underline{A}$ -nak egy $r \times r$ -es *aldeterminánsa*, a többi sor és oszlop találkozása által meghatározott $(n-r) \times (n-r)$ -es minormátrix determinánsát a fenti $r \times r$ -es minor *kiegészítő alldeterminánsának* nevezzük.

A kifejtési tételt általánosítja az alábbi tétel, melyből $r = 1$ esetében éppen a kifejtési tételt kapjuk vissza.

5.33 Tétel (Laplace-kifejtés): Legyen $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$. Jelöljük ki $\underline{A}$ -nak r db sorát. Készítsük el az összes ehhez tartozó $r \times r$ -es alldeterminánst és szorozzuk meg a hozzájuk tartozó kiegészítő alldeterminánsokkal valamint (-1) -nek az $r \times r$ -es minormátrix sor- és oszlopindexeinek összegére emelt hatványaival. Ezek összege éppen $\underline{A}$ determinánsa. Hasonló állítás igaz oszlopokra is.

Bizonyítás: Legyen $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ az $\underline{A} = (a_{ij})$ mátrix r különböző sorindexe, $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ az $\underline{A}$ mátrix r különböző oszlopindexe. Jelölje $\underline{A}_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r}$ az általuk kijelölt $r \times r$ -es részmátrixot. Jelölje $\underline{A}_{j_{r+1}, \dots, j_n}^{i_{r+1}, \dots, i_n}$ az $i_1, \dots, i_r$ -edik sorok és a $j_1, \dots, j_r$ -edik oszlopok elhagyása után kapott $(n-r) \times (n-r)$ -es részmátrixot. Ha $\det(\underline{A}_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r})$ egy kifejtési tagját, megszorozzuk $\det(\underline{A}_{j_{r+1}, \dots, j_n}^{i_{r+1}, \dots, i_n})$ egy kifejtési tagjával, akkor $\det(\underline{A})$ egy kifejtési tagját kapjuk. Az állítjuk, hogy e kifejtési tag $\det(\underline{A})$ -beli előjele $(-1)^{I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_r + j_1 + \dots + j_r}$ ahol I_1 az $r \times r$ -es, I_2 az $(n-r) \times (n-r)$ -es részmátrixban szereplő kifejtési tagokhoz tartozó inverziószám. Ugyanis ha $\underline{A}$ i_1 -edik sorát $i_1 - 1$ sorcserével az 1. sorba visszük, i_2 -edik sorát $i_2 - 2$ sorcserével a 2. sorba visszük stb, i_r -edik sorát $i_r - r$ sorcserével az r . sorba visszük

valamint j_1 -edik oszlopát $j_1 - 1$ oszlop cserével az 1. oszlopba visszük, ..., j_r -edik oszlopát $j_r - r$ oszlop cserével az r -edik oszlopba visszük, akkor az így kapott $\underline{B} = (b_{ij})$ mátrixban az első r sor és r oszlop által meghatározott $\det(\underline{B}_{1,2,\dots,r}^{1,2,\dots,r})$ alldetermináns éppen $\det(\underline{A}_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r})$ a hozzá tartozó $\det(\underline{B}_{r+1, \dots, n}^{r+1, \dots, n})$ kiegészítő alldetermináns pedig $\det(\underline{A}_{j_{r+1}, \dots, j_n}^{i_{r+1}, \dots, i_n})$. Ezek $\det(\underline{B})$ -nek $r!(n-r)!$ számú kifejtési tagját adják. Legyen $b_{1\sigma(1)} \dots b_{r\sigma(r)} b_{r+1\tau(r+1)} \dots b_{n\tau(n)}$ egy ilyen kifejtési tag. Ennek előjele $(-1)^{I(\sigma) + I(\tau)}$. $\det(\underline{A})$ -ban az ennek megfelelő kifejtési tag előjele

$$(-1)^{I(\sigma) + I(\tau) + i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r - (r+1)r} = (-1)^{I(\sigma) + I(\tau) + i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r}$$

Mivel az r oszlopot $\binom{n}{r}$ -féleképpen jelölhetjük ki és $\binom{n}{r} r!(n-r)! = n!$, így a fenti módon $\det(\underline{A})$ összes kifejtési tagját megkapjuk. A sor és oszlop cserék a kijelölt $r \times r$ -es részmátrix és $(n-r) \times (n-r)$ -es részmátrix elemeinek inverzióit nem változtatják így $\det(\underline{A}_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r})$ -ben és a $\det(\underline{A}_{j_{r+1}, \dots, j_n}^{i_{r+1}, \dots, i_n})$ -ben az $a_{i_1 j_{\sigma(1)}} \dots a_{i_r j_{\sigma(r)}} = b_{1\sigma(1)} \dots b_{r\sigma(r)}$ tag előjele $I(\sigma)$ az $a_{i_{r+1} j_{\tau(r+1)}} \dots a_{i_n j_{\tau(n+)}} = b_{1\tau(1)} \dots b_{n\tau(n)}$ tag előjele $I(\tau)$. Így $\det(\underline{A}) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} (-1)^{\sum_{i=1}^r (i+j_i)} \det(\underline{A}_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r}) \det(\underline{A}_{j_{r+1}, \dots, j_n}^{i_{r+1}, \dots, i_n})$.

5.34 Következmény (A determinánsok szorzástételének bizonyítása):

Legyen $\underline{A} = (a_{ij})$, $\underline{B} = (b_{ij}) \in M_n[\mathbb{C}]$, $\underline{C} \in M_{2n}[\mathbb{C}]$, melyre

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ -\underline{I}_n & \underline{B} \end{pmatrix}.$$

Ennek determinánsa a Laplace tétel szerint $\det(\underline{C}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{B}) (-1)^{\frac{n(n+1)}{2} \cdot 2} = \det(\underline{A}) \det(\underline{B})$. Minden $j = 1, \dots, n$ esetén adjunk hozzá az első oszlop b_{j1} -szeresét, második oszlop b_{j2} -szeresét stb, az n -edik oszlop b_{jn} -szeresét az $n+j$ -edik oszlophoz. A determináns nem változott, viszont a következő $\underline{D} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixhoz jutottunk

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{AB} \\ -\underline{I}_n & \underline{0} \end{pmatrix}.$$

A Laplace tétel szerint $\det(\underline{D}) = (-1)^{n + \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=n+1}^{2n} i} \det(\underline{AB}) = \det(\underline{AB})$, mivel $n + \frac{(2n+1)2n}{2} = n(2n+2)$ páros szám. Így $\det(\underline{A}) \det(\underline{B}) = \det(\underline{C}) = \det(\underline{D}) = \det(\underline{AB})$.

5.35 Példa:

1.) Legyen

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

ú.n. *diagonális mátrix* (azaz $\underline{A}$ összes nem 0 eleme a mátrix fődiagonálisában található). Ekkor $\det(\underline{A}) = \prod_{i=1}^n d_i$, mivel a mátrixnak csak egy nem 0 kifejtési tagja van, amelyhez tartozó inverziószám 0.

2.) Legyen

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \quad (\text{ú.n. felső háromszögmátrix})$$

vagy

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ * & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \quad (\text{ú.n. alsó háromszögmátrix})$$

Azaz a diagonális alatt (illetve ez utóbbinál fölött) lévő összes elem 0.

Ekkor $\det(\underline{A}) = \prod_{i=1}^n d_i$, amint az indukcióval látható az első oszlop (illetve a második esetben az első sor) szerinti kifejtések egymásutánjából.

3.)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

mivel diagonális mátrixok szorzata diagonális mátrix.

5.36 Feladat:

a.) Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\det(\underline{A}) = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (x_i - x_j)$ $1 \leq j < i \leq 4$. Lássuk be, hogy $\det(\underline{A}) \neq 0$ kivéve, ha $x_i = x_j$ valamely $i \neq j$ -re $i = 1, 2, 3, 4$ $j = 1, 2, 3, 4$.

b.) Bizonyítsunk be analóg állítást $n \times n$ -es hasonlóan felépített mátrixra is. (Ezeket Vandermonde-mátrixoknak nevezzük illetve a determinánsukat *Vandermonde-determinánsnak*).

6. 2×2 típusú hipermátrix determinánása és inverze

6.1 Definíció: Legyen $\underline{X} \in M_{n \times m}[C]$, $n = m_1 + m_2$, $m = m_1 + m_2$. Osszuk fel $\underline{X}$ -et négy részre. Legyen $\underline{A} \in M_{m_1, m_1}[C]$, $\underline{B} \in M_{m_1, m_2}[C]$, $\underline{C} \in M_{m_2, m_1}[C]$, $\underline{D} \in M_{m_2, m_2}[C]$ és $\underline{X}$ az $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ mátrixokra osztható mátrix. Ekkor $\underline{X}$ -et 2×2 típusú hipermátrixnak nevezzük. Tehát

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix},$$

azaz a kapott 2×2 -es mátrix elemei szintén mátrixok. Ezeket a *hipermátrix blokkjainak* nevezzük.

6.2 Megjegyzés: A hipermátrixok használatának előnye, hogy képleteink egyszerűbbekké és tömörebbekké válnak.

Azonos méretű és azonosan particionált hipermátrixokat össze lehet adni és ki lehet vonni (komponensenként):

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \underline{X} & \underline{Y} \\ \underline{U} & \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} \pm \underline{X} & \underline{B} \pm \underline{Y} \\ \underline{C} \pm \underline{U} & \underline{D} \pm \underline{V} \end{bmatrix}$$

2×2 -es hipermátrixokat akkor lehet összeszorozni, ha közöséges mátrixoknak tekintve össze lehet őket szorozni, azaz az első mátrix oszlopai száma egyenlő a második mátrix sorainak számával, valamint ezek particionálása azonos. Az eredmény mátrix blokkjai a tényezők blokkjaiból a 2×2 -es mátrixok szorzási szabályával kapható. Itt ügyelni kell a tényezők sorrendjére.

6.3 Példa: Legyen

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{W} = \begin{bmatrix} \underline{X} & \underline{Y} \\ \underline{V} & \underline{Z} \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\underline{UW} = \begin{bmatrix} \underline{AX} + \underline{BY} & \underline{AY} + \underline{BZ} \\ \underline{CX} + \underline{DV} & \underline{CY} + \underline{DZ} \end{bmatrix}$$

Ha az

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}$$

hipermátrix $n \times n$ es blokkokból álló $2n \times 2n$ -es mátrixot ad, akkor felmerül a kérdés, hogy az $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ blokkokból kiszámítható-e $\det(\underline{X})$. Ezzel kapcsolatban igaz a következő tétel.

6.4 Tétel: Felcserélhető négyzetes blokkokból álló hipermátrix determinánsa az ú.n. *hiperdetermináns determinánsa*, ez a 2×2 -es esetben az

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \in M_{2n, 2n}[\mathbb{C}]$$

mátrixra azt adja, hogy

$$\det(\underline{X}) = \det(\underline{AD} - \underline{BC})$$

Bizonyítás: A 2×2 -es esetre végezzük el, abban a speciális esetben, ha $\det(\underline{A}) \neq 0$. Az általános eset bizonyítását lásd [RP] könyvben.

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{CA}^{-1} & \underline{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{0} & \underline{D} - \underline{CA}^{-1}\underline{B} \end{bmatrix}$$

Ebből

$$\det \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{CA}^{-1} & \underline{I} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{0} & \underline{D} - \underline{CA}^{-1}\underline{B} \end{bmatrix}$$

Az első tényező alsó háromszög mátrix, melynek diagonálisában csupa 1-es áll, így ennek determinánsa 1.

A második tényezőt a Laplace-kefejtési tétel szerint számítjuk ki. Rögzítsük a mátrix első n oszlopát és számítsuk ki az ezekhez az oszlopokhoz tartozó összes $n \times n$ -es aldeterminánst és szorozzuk meg őket a megfelelő kiegészítő aldeterminánssal és (-1) -nek a sor- és oszlopindex összegekre emelt hatványával. Ezek közül csak 1 tag lesz nem 0. $\det(\underline{A}) \cdot \det(\underline{D} - \underline{CA}^{-1}\underline{B}) \cdot (-1)^{(1+2+\dots+n) \cdot 2}$.

Tehát $\det(\underline{X}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{D} - \underline{CA}^{-1}\underline{B}) = \det(\underline{AD} - \underline{ACA}^{-1}\underline{B})$.

Mivel a blokkok felcserélhetők ez utóbbi éppen $\det(\underline{AD} - \underline{CB})$.

Hipermátrixok inverzéről szól a következő tétel.

6.5 Tétel: Felcserélhető négyzetes blokkokból álló 2×2 -es

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}$$

hipermátrix inverze létezik, ha $\det(\underline{X}) \neq 0$.

Ekkor

$$\underline{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D} & -\underline{B} \\ -\underline{C} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\underline{AD} - \underline{BC})^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & (\underline{AD} - \underline{BC})^{-1} \end{bmatrix}$$

Ennek a tételnek is igaz az $n \times n$ -es analogonja, lásd [RP].

Bizonyítás: Csak a 2×2 -es esetre végezzük el.

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{D} & -\underline{B} \\ -\underline{C} & \underline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{AD} - \underline{BC} & -\underline{AB} + \underline{BA} \\ \underline{CD} - \underline{DC} & -\underline{CB} + \underline{DA} \end{bmatrix}$$

Ha a blokkok felcserélhetők akkor ez utóbbi egyenlő

$$\begin{bmatrix} \underline{AD} - \underline{BC} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{AD} - \underline{BC} \end{bmatrix} - \text{vel.}$$

Ha $\underline{X}$ invertálható, akkor $\det(\underline{X}) = \det(\underline{AD} - \underline{BC}) \neq 0$, tehát létezik $(\underline{AD} - \underline{BC})^{-1}$. Így

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D} & -\underline{B} \\ -\underline{C} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\underline{AD} - \underline{BC})^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & (\underline{AD} - \underline{BC})^{-1} \end{bmatrix}.$$

7. Vektorterek

A lineáris egyenletrendszerek általános megoldásához szükségünk van a *függetlenség* fogalmára. Meg kell tudnunk fogalmazni, hogy mikor tekintünk függetleneknek bizonyos egyenleteket. Ehhez a fogalomhoz kapcsolódik a vektorok függetlensége $\mathbf{R}^3$ -ban, $\mathbf{R}^n$ -ben és $\mathbf{C}^n$ -ben. A háromdimenziós valós tér helyvektorainak tulajdonságait fogjuk összegyűjteni. Ezeket a tulajdonságokat axiómaként felvéve jutunk a *lineáris tér* másnéven *vektortér* fogalmához. Ha egy állítás ezekből az axiómákból levezethető, akkor az természetesen igaz $\mathbf{R}^3$ -ban. De nem csak ott, minden olyan halmazon, amelyre a vektortéraxiómák teljesülnek. Így egy általánosan bebizonyított tétel rengeteg konkrét tételt ad $\mathbf{R}^3$ -on kívül az n -dimenziós valós és komplex terekre, polinomokra, mátrixokra, függvényekre, stb.

7.1 Definíció: Legyen V egy halmaz F egy test. A V halmaz elemeit *vektoroknak*, F elemeit *skalároknak* nevezzük.

Legyen V -n értelmezve egy $+$ -szal jelölt kétváltozós művelet és minden $\lambda \in F$ esetén legyen értelmezve V elemein a λ -val való szorzás. (Tehát V zárt ezen műveletekre nézve). Azt mondjuk, hogy V F test feletti *lineáris tér* (*vektortér*), ha a következő axiómák teljesülnek. (V -t V_F -fel is szokás jelölni, ha nem egyértelmű, hogy melyik test feletti vektortérnek kell tekinteni V -t. A skalárokat görög kisbetűvel, a vektorokat egyszer aláhúzott nyomtatott kisbetűvel jelöljük).

$$(i) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \text{ esetén } \underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v} \text{ (+kommutatív)}$$

$$(ii) \forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V \text{ esetén } \underline{v} + (\underline{w} + \underline{u}) = (\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u} \text{ (+asszociatív)}$$

$$(iii) \exists! \underline{x} \in V, \text{ hogy } \forall \underline{v} \in V \text{ esetén } \underline{x} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{x} = \underline{v} \\ \text{ezt } V \text{ nullvektorának nevezzük és } \underline{0}\text{-sal jelöljük.}$$

$$(iv) \forall \underline{v} \in V \text{ esetén } \exists! (\underline{v}\text{-től függő}) \underline{y} \in V, \text{ amelyre}$$

$$\underline{v} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{v} = \underline{0}$$

ezt $\underline{v}$ *ellentettjének* hívjuk, es $-\underline{v}$ -vel jelöljük.

$$(v) \text{ Ha } 1 \in F \text{ az } F \text{ test egységeleme, akkor}$$

$$\forall \underline{v} \in V \text{ esetén } 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$$

(vi) Ha $0 \in F$ az F test 0-eleme, akkor $\forall \underline{v} \in V$ esetén $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

(vii) $\forall \lambda \in F$ és $\forall \underline{v} \in V$ esetén

$$\lambda \underline{v} = \underline{v} \lambda$$

(viii) $\forall \lambda, \mu \in F$ és $\forall \underline{v} \in V$ esetén

$$(\lambda \mu) \underline{v} = \lambda (\mu \underline{v})$$

(ix) $\forall \lambda, \mu \in F$ és $\forall \underline{v} \in V$ esetén

$$(\lambda + \mu) \underline{v} = \lambda \underline{v} + \mu \underline{v}$$

(x) $\forall \lambda \in F$ és $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ esetén

$$\lambda (\underline{v} + \underline{w}) = \lambda \underline{v} + \lambda \underline{w}$$

7.2 Megjegyzés: Lehet nem kommutatív test feletti vektortereket is értelmezni. Ekkor (vii) nincsen feltéve, a skalároknál a vektorokat mindig ugyanarról az oldalról (balról vagy jobbról) kell szoroznunk.

7.3 Példa: Felsorolunk néhány példát vektortérre. Az axiómák teljesülésének ellenőrzését az olvasóra bízuk.

- a) $V = \mathbf{R}^3, F = \mathbf{R}$
- b) $V = \mathbf{R}^n, F = \mathbf{R}$. Vektorok összeadása és skalárral való szorzása komponensenként történik.
- c) $V = \mathbf{C}^n, F = \mathbf{C}$. Műveletek komponensenként végzendők.
- d) $V = \mathbf{C}, F = \mathbf{R}$
- e) $V = [a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos valós függvények (ezt $\mathbf{C}[a, b]$ -vel szokás jelölni),
 $F = \mathbf{R}$
- f) $V = \mathbf{R}[x],$
 $F = \mathbf{R}$
- g) $V = \{ \text{egy origón átmenő sík pontjainak helyvektorai } \mathbf{R}^3\text{-ban} \}$
 $F = \mathbf{R}$

h) $V = \{ \text{egy } \underline{A} \in M_{n \times m}[\mathbf{C}] \text{ mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációi} \},$
 $F = \mathbf{C}$

i) Legyenek $F_1 \subset F_2$ testek. Ekkor $V = F_2, F = F_1$ esetén V_F vektortér.

Nem alkotnak viszont vektorteret, például az $[a, b]$ intervallumon értelmezett nem folytonos függvények, hiszen ez a halmaz nem zárt az összeadásra.

Ha $\mathbf{R}^3$ -ban egy sík nem megy át az origón, akkor pontjainak helyvektorai nem alkotnak vektorteret. Ez se zárt az összeadásra és nincs benne $\underline{0}$ -vektor sem.

Most bevezetünk néhány fontos fogalmat.

7.4 Definíció: V_F vektortérben $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ vektorrendszer, ha $\underline{v}_i \in V$ vektorok $i = 1, \dots, n$ és egy vektor esetleg többször is előfordulhat benne.

7.5 Definíció: Legyen V_F vektortér. $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ V -beli vektorok F -beli együtthatós lineáris kombinációjának nevezzük a $\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$ vektort, ha minden $\alpha_i \in F$ $i = 1, \dots, n$. Egy lineáris kombináció triviális, ha minden α_i együttható benne 0.

7.6 Definíció: Legyen V_F vektortér. Egy $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ V -beli vektorrendszert F felett lineárisan függetlennek nevezzük, ha

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} \text{ -ből } \alpha_i = 0 \text{ } i = 1, 2, \dots, k \text{ következik.}$$

(Az az csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a $\underline{0}$ vektort).

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ vektorrendszer F felett lineárisan összefüggő.

(Végtelen sok vektort akkor nevezünk függetlennek, ha minden véges részrendszere független).

Szeretnénk jellemezni vektorok összefüggőségét.

7.7 Tétel: Legyen V_F vektortér. Egy $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ V -beli vektorrendszer pontosan akkor összefüggő F felett, ha létezik olyan $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, hogy $\underline{v}_j$ kifejezhető $\underline{v}_i = \sum_{i \neq j} \alpha_i \underline{v}_i$ alakban.

Bizonyítás: Ha $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ összefüggő, akkor létezik olyan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nem mind 0 együtthatók, hogy $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$.

Legyen például $\alpha_j \neq 0$. Ekkor $v_j = -\sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_i$. Megfordítva, ha $v_j = \sum_{i \neq j} \beta_i v_i$, akkor $\sum_{i \neq j} \beta_i v_i - v_j = 0$ egy nemtriviális lineáris kombinációja a $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ vektoroknak.

7.8 Megjegyzés: Az viszont nem igaz, hogy összefüggő vektorok mindegyike a többivel kifejezhető lenne. Például $\mathbf{R}^2$ -ben, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem esik egy egyenesbe, akkor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $2\underline{b}$ összefüggő vektorok, de $\underline{a}$ nem fejezhető ki $\underline{b}$ -ből és $2\underline{b}$ -ből.

Az $\mathbf{R}^2$ -ben két helyvektor pontosan akkor független, ha nem esnek egy egyenesbe.

$\mathbf{R}^3$ -ban pedig akkor, ha nem esnek egy síkba.

7.9 Definíció: Legyen V_F vektortér. Egy $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ V -beli vektorrendszert V -nek F feletti *generátorrendszerének* nevezzük, ha minden $v \in V$ vektor kifejezhető $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$ alakban, ahol $\alpha_i \in F$ $i = 1, \dots, k$ (Végtelen sok vektor akkor generátorrendszer, ha minden vektor kifejezhető alkalmas véges részből).

7.10 Definíció: Egy V_F vektortér *független generátorrendszerét* a tér *bázisának* nevezzük.

Felmerül a kérdés, hogy van-e minden vektortérben bázis és hány vektorból áll.

Erről szól a következő tétel, amelynek speciális esetét később bizonyítjuk.

7.11 Tétel: Minden vektortérben van bázis és egy adott vektortér összes bázisai azonos elemszámúak.

Ez alapján értelmes a következő definíció.

7.12 Definíció: Egy V_F vektortér *dimenziójának* nevezzük és $\dim_F V$ -vel jelöljük V egy bázisának elemszámát. (Ez a fenti tétel szerint V összes bázisának közös elemszáma is).

7.14 Megjegyzés: Ebben a jegyzetben többnyire *véges dimenziós* vektorterekkel foglalkozunk. A 7.11 Tételt is erre az esetre fogjuk csak bizonyítani.

Most megadjuk a fenti vektortér példák egy részének dimenzióját és némelyikben megadunk egy bázist is. Az állítások helyességének igazolását az olvasóra bízuk.

7.14 Példa:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $F = \mathbf{R}$:

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bázis és} \quad \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^3 = 3.$$

(egyébként bármely nem egy síkba eső három helyvektor szintén bázis)

b) $V = \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{R}$ esetén $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^n = n$.

c) $V = \mathbf{C}^n$, $F = \mathbf{C}$ esetén $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^n = n$. Mindkét esetben

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bázis.}$$

d) $V = \mathbf{C}$, $F = \mathbf{R}$: $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2$, $\{1, i\}$ bázis, és bármelyik két nem egy egyenesbe eső komplex szám szintén bázis.

e) $V = \mathbf{C}[a, b]$, $F = \mathbf{R}$: $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}[a, b] = +\infty$. Ennek bizonyítását például lásd [FM-III]-ban.

f) $V = \mathbf{R}[x]$, $F = \mathbf{R}$: $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[x] = +\infty$ $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ bázis.

g) $V = \underline{A} \in M_{n \times m}[\mathbf{C}]$ oszlopvektorainak összes lineáris kombinációi, $F = \mathbf{C}$. Ezt hívják az oszlopvektorok által generált vektortérnek. $0 \leq \dim_F V \leq n$. Pontosabban később tudunk mondani róla.

Szeretnénk a függetlenség, a generátorrendszer és a bázis fogalmai között néhány további kapcsolatot mutatni.

7.15 Tétel: Legyen V_F vektortér F test felett. Ekkor tetszőleges V -beli

- (i) független vektorrendszer minden részrendszere független
- (ii) generátorrendszer minden kibővítése generátorrendszer
- (iii) bázis maximális független vektorrendszer
- (iv) maximális független vektorrendszer bázis
- (v) bázis minimális generátorrendszer
- (vi) minimális generátorrendszer bázis

- (vii) véges sok vektorból álló generátorrendszer lecsökkenthető bázissá
- (viii) véges sok vektorból álló független vektorrendszer kiegészíthető bázissá, ha van a térben véges generátorrendszer.

Bizonyítás: Az (i) és (ii) állítások helyessége nyilvánvaló a definícióból.

- (iii) Legyen $\{v_1, v_2, \dots\}$ V -beli bázis, ekkor természetesen $\{v_1, v_2, \dots\}$ független vektorrendszer. Ez maximális független vektorrendszer, mert, ha $\{v_1, v_2, \dots, v\}$ a fenti vektorrendszernek egy kibővítése, akkor v kifejezhető $\{v_1, v_2, \dots\}$ egy véges részrendszeréből, hiszen $\{v_1, v_2, \dots\}$ generátorrendszer. De ekkor a 7.7 Tétel szerint ez a véges részrendszer v -vel együtt összefüggő így $\{v_1, v_2, \dots, v\}$ is az.
- (iv) Legyen $\{v_1, v_2, \dots\}$ V -beli maximális független vektorrendszer. Azt állítjuk, hogy ez bázis. Ha $v \in V$, akkor ezt az előző vektorrendszerhez hozzávéve, az már összefüggő lesz. Tehát alkalmas vektorainak nemtriviális lineáris kombinációja 0 -t ad. De ebben v -nek 0 -tól különböző együtthatóval kell szerepelni, hiszen a kiindulási vektorrendszer független volt. Így v együtthatójával leosztva, v kifejezhető az eredeti vektorrendszer bizonyos vektoraiból, tehát a kiindulási vektorrendszer generátorrendszer és így bázis is.
- (v) Legyen $\{v_1, v_2, \dots\}$ egy V -beli bázis. Ekkor természetesen a vektorrendszer generátorrendszer. Ha egy v_i elhagyása után még mindig generátorrendszer lenne, akkor v_i kifejezhető lenne a maradék vektorrendszer egy véges rendszeréből, tehát a 7.7 tétel szerint a véges részrendszer a v_i -vel együtt összefüggő így $\{v_1, v_2, \dots\}$ is az, ami ellentmondás. Tehát $\{v_1, v_2, \dots\}$ egy minimális generátorrendszer.
- (vi) Legyen $\{v_1, v_2, \dots\}$ V -beli minimális generátorrendszer. Azt állítjuk, hogy ez bázis. Azt kell bizonyítanunk, hogy ez a vektorrendszer független is. Ha valamely véges részrendszer nemtriviális lineáris kombinációja 0 -vektort adná, akkor ennek a vektorrendszernek egy eleme 7.7 Tétel szerint kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Ez esetben viszont ezt a vektort elhagyhatnánk a generátorrendszerünkben, hiszen a maradék vektorokból minden olyan kifejezhető, ami eddig kifejezhető volt. Ez ellentmond a generátorrendszer minimalitásának. Tehát vektorrendszerünk független és így bázis is.
- (vii) Vegyünk egy a vektorrendszerünkben lévő minimális generátorrendszert. Ez (vi) szerint bázis.

- (viii) Tekintsük a független vektorrendszerünket $\{v_1, \dots, v_k\}$ -t tekintsük a térnek egy véges generátorrendszerét $\{w_1, \dots, w_n\}$ -et. A független vektorrendszer elemeihez vegyünk hozzá a generátorrendszerből annyit, hogy az még mindig független maradjon, de további hozzávételekor a tér összefüggő lesz. Azt állítjuk, hogy így bázist kapunk. Elég belátnunk, hogy ez generátorrendszer. Ehhez azt fogjuk megmutatni, hogy a kiindulási generátorrendszer minden eleme kifejezhető belőle, s így módon a tér összes vektora is előáll ezek lineáris kombinációjaként.

Ha az illető generátorrendszer elemet hozzávettük a vektorrendszerünkhöz, akkor persze kifejezhető belőle.

Ha nem vettük hozzá, akkor vektorrendszerünkkel együtt összefüggő rendszert alkot, azaz nem triviális lineáris kombinációjuk 0 -t ad. Ebben a lineáris kombinációban, vektorrendszerben nem szereplő generátorrendszer elem együtthatója nem lehet 0 , mert akkor vektorrendszerünk összefüggő lenne. Tehát ez a generátorrendszer elem vektorrendszerünkkel kifejezhető.

E tételből következik 7.11 Tétel első fele abban a speciális esetben, ha van a térben véges generátorrendszer.

7.15 Következmény. Tegyük fel, hogy V_F vektortérben van véges generátorrendszer. Ekkor V -ben van véges bázis is.

Bizonyítás: Az előző tétel (vi) pontja szerint a generátorrendszerünket lecsökkenthetjük bázissá.

Most bebizonyítjuk 7.11 Tétel második felének speciális esetét.

7.16 Tétel (Kicserélési tétel): Tegyük fel, hogy V_F véges dimenziós vektortér. Ekkor V bármely két bázisának elemszáma azonos.

Bizonyítás: Legyen $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ független vektorrendszer. $Y = \{w_1, \dots, w_n\}$ generátorrendszer. Indukcióval belátjuk, hogy X elemei helyettesíthetők Y alkalmas elemeivel úgy, hogy továbbra is m elemszámú független rendszert kapjunk.

Hagyjuk el X -nek egy elemét. Ezt a halmazt jelöljük X' -vel. Ha $X' \cup w_i$ összefüggő lenne minden $i = 1, \dots, n$ -re, akkor, az összefüggést mutató 0 -t előállító nemtriviális lineáris kombinációkban w_i együtthatója nem lehet 0 , hiszen X' független. Tehát Y összes eleme kifejezhető X' -ből és így X' is generátorrendszer.

lenne. Ekkor azonban az elhagyott X -beli elem is kifejezhető X' -ből, tehát 7.7 Tétel szerint X összefüggő, ami ellentmondás. Tehát létezik olyan $1 \leq i \leq n$, hogy $X' \cup w_i$ független. Ezt az eljárást alkalmazva egymás után X összes elemei helyett Y -beli vektorokat kapunk. Így $m \leq n$. Tehát V tetszőleges véges független rendszerének elemszáma kisebb, mint V egy tetszőleges véges generátorrendszerének elemszáma. Ha most V -nek két véges bázisát tekintjük, akkor ez azt adja, hogy a két bázis egyenlő elemszámú. Ha V -nek $\{v_1, \dots, v_n\}$ egy véges bázisa és $\{e_1, e_2, \dots\}$ egy végtelen bázisa lenne, akkor a fenti okoskodást n -szer alkalmazva $\{e_1, e_2, \dots\}$ bázis n eleme kicserélhető $\{v_1, \dots, v_n\}$ -re, hogy az így kapott vektorrendszer továbbra is független. Mivel $\{v_1, \dots, v_n\}$ bázis, $\{e_1, e_2, \dots\}$ összes eleme ezekből kifejezhető, tehát a kapott vektorrendszer csak akkor lehet független, ha nincs $\{v_1, \dots, v_n\}$ -en kívül más eleme. Ez ellentmond annak, hogy $\{e_1, e_2, \dots\}$ végtelen.

7.17 Definíció: Legyen F tetszőleges test, $\underline{A} \in M_{n \times m}[F]$. $\underline{A}$ oszlopvektorai legyenek $\{a_1, \dots, a_m\}$. Tekintsük $a_1, \dots, a_m$ összes lehetséges F -beli együtthatós lineáris kombinációját. Ezt a vektorteret az $\underline{A}$ oszlopvektorai terének nevezzük.

8. Mátrix rangja

Most konkrét vektorterekkel fogunk foglalkozni. Mátrixok oszlopvektorainak és sorvektorainak terével. A 4. és 5. fejezetekben a mátrixműveleteket és determinánsokat komplex elemű mátrixokra értelmezzük. Ezek, a konjugálástól eltekintve, tetszőleges test feletti mátrixokra analóg módon értelmezhetők és a megfelelő tételek igazak maradnak.

8.1 Definíció: Legyen F tetszőleges test, $\underline{A} \in M_{n \times m}[F]$. Tekintsük az $\underline{A}$ oszlopvektorainak összes lehetséges lineáris kombinációja által meghatározott vektorteret. Ezt a vektorteret az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorai terének nevezzük. Analóg módon értelmezhető $\underline{A}$ sorvektorainak tere is.

8.2 Tétel: Legyen $\underline{A} \in M_{n \times m}[F]$, mint a fenti definícióban. Vegyük $\underline{A}$ oszlopvektorainak egy maximális független rendszerét. Ez bázis az $\underline{A}$ oszlopvektorai terében. Analóg állítás igaz sorvektorokra is.

Bizonyítás: Ez a vektorrendszer független. Be kell látnunk, hogy generátorrendszer is. Ehhez elég azt belátni, hogy $\underline{A}$ -nak tetszőleges oszlopvektora belőle kifejezhető, hiszen akkor az oszlopvektorok terének minden vektora is ezek lineáris kombinációja lesz.

Legyen a_j $\underline{A}$ -nak egy tetszőleges oszlopvektora. Mivel egy maximális független oszlopvektorrendszert tekintünk, a_j hozzávételével összefüggő rendszert kapunk. Az összefüggést mutató 0-t előállító nemtriviális lineáris kombinációban a_j együtthatója nem lehet 0, hiszen a maradék vektorrendszer független. Tehát a_j együtthatójával leosztva a_j kifejezhető az adott maximális független vektorrendszerből.

Az oszlopvektorok terének dimenziója fontos szerepet fog játszani a továbbiakban. Erre vonatkozik a következő definíció is.

8.3 Definíció: Legyen F test (Például $F = \mathbf{R}$ vagy $F = \mathbf{C}$), $\underline{A} \in M_{n \times m}[F]$. $r(\underline{A})$ -val jelöljük és az $\underline{A}$ mátrix rangjának nevezzük az $\underline{A}$ F felett független oszlopvektorainak maximális számát. (Tulajdonképpen $r_F(\underline{A})$ a pontosabb jelölés).

A mátrix rangját többféleképpen lehet jellemezni. Erre vonatkozik a következő

Tétel.

8.4 Tétel. Legyen F test, $\underline{A} \in M_{n \times m}[F]$ mátrix. Ekkor a következő számok egyenlők.

- (i) $\underline{A}$ független oszlopvektorainak maximális száma, azaz $r(\underline{A})$
- (ii) $\underline{A}$ független sorvektorainak maximális száma
- (iii) $\underline{A}$ oszlopvektorai terének dimenziója
- (iv) $\underline{A}$ sorvektorai terének dimenziója
- (v) $\underline{A}$ maximális méretű nonszinguláris aldeterminánsának mérete

Bizonyítás:

- (i) és (iii) egyenlőséget láttuk.
- (ii) és (iv) egyenlősége analóg módon bizonyítható.
- (ii) és (v) egyenlőségét nem bizonyítjuk. Lásd például [FM-III]-ban.
- (i) és (v) egyenlősége az előzőkhöz hasonlóan igazolható

8.5 Következmény: Ha $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ szinguláris mátrix, akkor $\underline{A}$ nullosztó.

Bizonyítás: Ha $\underline{A}$ szinguláris, akkor $r(\underline{A}) < n$, tehát $\underline{A}$ oszlopvektorai összefüggők. Legyen $\underline{A}$ oszlopvektorai $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$. Ekkor léteznek olyan $c_1, c_2, \dots, c_n$ együtthatók, amelyek között van nem 0 és $\sum_{i=1}^n c_i \underline{a}_i = \underline{0}$.

Legyen $\underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ egy olyan mátrix, amelynek első oszlopvektora

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

többi oszlopvektora $\underline{0}$. Ekkor $\underline{AB} = \underline{0}$.

A mátrix rangjának gyakorlati meghatározásánál fontos az alábbi tétel.

8.6 Tétel: Legyen $\underline{A} \in M_{n \times m}[F]$ mátrix, ahol F test (például $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$). $\underline{A}$ rangja nem változik, ha

- (i) két sorát (vagy oszlopát) felcseréljük
- (ii) egy sorát (vagy oszlopát) F -beli nem 0 elemmel szorozzuk.

(iii) egy sorának (vagy oszlopának) skalárszorását egy másik sorhoz (vagy oszlophoz) adjuk.

Bizonyítás: Ezen műveletek során a sorvektorok (illetve oszlopvektorok) által generált tér nem változik, tehát annak dimenziója is invariáns marad.

A fenti tétel alapján a következő algoritmust kapjuk egy mátrix rangjának számítására.

A fenti ú.n. sor- és oszlopműveletekkel elérjük, hogy mátrixunk közel felső háromszög mátrix alakú. Ekkor a mátrix rangja könnyen leolvasható.

8.7 Példa:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Az elemi műveletek a következők voltak:

az 1. sor (-3) -szorosát a 2. sorhoz adjuk.

az 1. sor (-2) -szeresét a 3. sorhoz adjuk.

$r(\underline{A}) \leq 3$, mert maximálisan 3 független sorvektora lehet, $r(\underline{A}) \geq 3$, mert van 3×3 -as nem szinguláris aldetermináns az $\underline{A}$ -ból keletkező mátrixnak, például az első 3 oszlop által meghatározott 3×3 -as mátrix determinánsa nem 0. Tehát $r(\underline{A}) = 3$.

8.8 Következmény: $\mathbb{R}^n$ illetve $\mathbb{C}^n$ bizonyos vektorainak függetlenségét úgy tudjuk egyszerűen megállapítani, ha kiszámítjuk a belőlük, mint oszlopvektorokból készíthető mátrix rangját. Ha ez megegyezik a vektorok számával, akkor függetlenek.

8.9 Megjegyzés: $\underline{A} \in M_{n \times m}[F]$ esetén $r(\underline{A}) \leq \min(n, m)$. Egy mátrix rangját úgy is meg lehet határozni, ha vektorok diadikus szorzatának összegére ú.n. "diádokra" bontjuk.

8.10 Tétel: Egy $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_{n \times m}[F]$ mátrix rangja egyenlő az $\underline{A}$ mátrix minimális számú diádokra bontásában a diádok számával. Egy ilyen felbontás a következő algoritmussal kapható: legyen valamely i -re és j -re $a_{ij} \neq 0$. Jelölje $\underline{u}_i$ az $\underline{A}$ i -edik oszlopát $\underline{u}_i^T$ az $\underline{A}$ i -edik sorát. Készítsük el az $\underline{A} - \frac{1}{a_{ij}} \underline{u}_i \underline{u}_j^T$ mátrixot. Ezen eljárást sorozatosan ismétlésével $\underline{A}$ kívánt felbontását kapjuk.

Ezt a tételt szintén nem bizonyítjuk.

8.11 Példa: Bontsuk minimális számú diád összegére az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_1^T = (1, 0, -1, 2) \quad a_{11} = 1 \quad \frac{1}{a_{11}} \underline{v}_1 \underline{u}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} - \underline{v}_1 \underline{u}_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_2^T = (0, -1, 3, -5) \quad a_{22} = -1 \quad \frac{1}{a_{22}} \underline{v}_2 \underline{u}_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} - \underline{v}_1 \underline{u}_1^T - (-1) \underline{v}_2 \underline{u}_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_3^T = (0, 0, 3, -3) \quad a_{33} = 3 \quad \frac{1}{a_{33}} \underline{v}_3 \underline{u}_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} - \underline{v}_1 \underline{u}_1^T - (-1) \underline{v}_2 \underline{u}_2^T - 3 \underline{v}_3 \underline{u}_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tehát $\underline{A} = \underline{v}_1 \underline{u}_1^T + ((-1) \underline{v}_2 \underline{u}_2^T + (3 \underline{v}_3) \underline{u}_3^T)$ $\underline{A}$ minimális számú diádokra való felbontása, így $r(\underline{A}) = 3$.

8.12 Következmény: Ha $\underline{A}, \underline{B} \in M_{n \times m}[F]$, akkor $r(\underline{A} + \underline{B}) \leq r(\underline{A}) + r(\underline{B})$

Bizonyítás: $\underline{A}$ $r(\underline{A})$ darab diád összegére bontható, $\underline{B}$ $r(\underline{B})$ darab diád összegére bontható, így $\underline{A} + \underline{B}$ legfeljebb $r(\underline{A}) + r(\underline{B})$ diád összegére bontható.

Tehát $r(\underline{A} + \underline{B}) \leq r(\underline{A}) + r(\underline{B})$.

8.13 Következmény: Legyen $\underline{A} \in M_{n \times m}[F]$, $\underline{B} \in M_{m \times k}[F]$. Ekkor $r(\underline{AB}) \leq r(\underline{A})$

Bizonyítás: Legyen $r = r(\underline{A})$. Ekkor $\underline{A} = \sum_{i=1}^r \underline{v}_i \underline{u}_i^T$ alakban írható. Ezért $\underline{AB} = \sum_{i=1}^r \underline{v}_i (\underline{u}_i^T \underline{B})$ $\underline{AB}$ -nek egy diádokra való felbontása. Így $r(\underline{AB}) \leq r = r(\underline{A})$.

9. Lineáris egyenletrendszerek

Vegyünk először néhány egyszerű példát.

9.1 Példa:

a) A

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{array} \right\}$$

lineáris egyenletrendszer metsző egyeneseket határoz meg a síkban, így 1 megoldása van.

b) A

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right\}$$

lineáris egyenletrendszer párhuzamos egyeneseket határoz meg a síkban, így nincs megoldása.

c) A

$$\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer kétszer ugyanazt az egyenest határozza meg a síkban, így végtelen sok megoldása van.

Az általános esetben is hasonló dolgok fordulhatnak elő. Erről szól a következő tétel.

9.2 Tétel: Legyen $\underline{A} \in M_{m \times n}[\mathbb{C}]$, $\underline{b} \in \mathbb{C}^m$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ekkor

- a) az $\underline{Ax} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha $r(\underline{A}) = r(\underline{A}|\underline{b})$, ahol $(\underline{A}|\underline{b})$ az $\underline{A}$ mátrixnak $\underline{b}$ oszloppal való kibővítését jelöli.
- b) Ha $r(\underline{A}) = r(\underline{A}|\underline{b}) = n$, akkor a megoldás egyértelmű.
- c) Ha $r(\underline{A}) = r(\underline{A}|\underline{b}) < n$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, $n - r(\underline{A})$ szabad paraméterrel.

Bizonyítás: Egyelőre a)-t bizonyítjuk csak. b) és c) bizonyítása később következik.

Legyenek $\underline{A}$ oszlopvektorai $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$. $\underline{Ax} = \underline{b}$ a 4.15 megjegyzés utáni 2) tulajdonság szerint (*) $x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}$ alakban írható.

Tehát $\underline{Ax} = \underline{b}$ pontosan akkor megoldható, ha léteznek olyan $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ számok, amelyekre (*) teljesül, azaz ha $\underline{b}$ benne van $\underline{A}$ oszlopvektorai terében. Tegyük fel, hogy $r(\underline{A}) = r(\underline{A}|\underline{b})$ és legyen $\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_r}$ bázis $\underline{A}$ oszlopvektorai terében. Ekkor ez bázis a kibővített mátrix oszlopvektorai terében is, hiszen a két tér dimenziója egyenlő. Tehát $\underline{b}$ az $\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_r}$ vektorok lineáris kombinációjaként kifejezhető, vagyis $\underline{b}$ benne van $\underline{A}$ oszlopvektorai terében. Az előbbiek szerint tehát az $\underline{Ax} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható.

Tegyük fel most, hogy $\underline{Ax} = \underline{b}$ megoldható. Ekkor $\underline{b}$ benne van $\underline{A}$ oszlopvektorai terében, azaz annak bázisából kifejezhető. Így $\underline{A}$ oszlopvektorainak egy maximális független rendszere, (amely 8.2 Tétel szerint $\underline{A}$ oszlopvektorai terének egy bázisa) az $(\underline{A}|\underline{b})$ kibővített mátrix oszlopvektorainak is egy maximális független rendszere. Tehát $r(\underline{A}) = r(\underline{A}|\underline{b})$.

9.3 Definíció: Egy $\underline{Ax} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert *homogén*nek nevezünk, ha $\underline{b} = \underline{0}$.

9.4 Megjegyzés: Homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van megoldása. Ennek $\underline{x} = \underline{0}$ megoldását *triviális megoldás*nak nevezük.

A homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak szerkezetét írja le a következő tétel.

9.5 Tétel: Legyen $\underline{A} \in M_{m \times n}[\mathbb{C}]$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ekkor az $\underline{Ax} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak, melynek dimenziója $n - r(\underline{A})$.

Bizonyítás Ha $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{C}^n$ megoldásai az $\underline{Ax} = \underline{0}$ egyenletrendszernek, akkor $\underline{A}(\underline{u} + \underline{v}) = \underline{Au} + \underline{Av} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ miatt $\underline{u} + \underline{v}$ is megoldás.

$\lambda \in \mathbb{C}$ esetén $\underline{A}(\lambda \underline{u}) = \lambda(\underline{Au}) = \lambda \underline{0} = \underline{0}$, tehát $\lambda \underline{u}$ is megoldás. Tehát a megoldások halmaza zárt az összeadásra és minden $\lambda \in \mathbb{C}$ skalárral való szorzásra. Mivel a megoldások $\mathbb{C}^n$ részhalmazát alkotják a műveleti tulajdonságok a vektortéraxiómák közül mind automatikusan teljesülnek. A nullvektor is megoldás és minden megoldás ellentett vektora is, tehát a megoldások vektorteret alkotnak.

Legyen $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ egy bázis a megoldások terében. Legyenek $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ $\underline{A}$ oszlopvektorai. Ezek közül válasszunk ki egy maximális független oszlopvektorrendszert, $\{\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_r}\}$ -et, ahol $r = r(\underline{A})$.

8.2 Tétel szerint ez a bázis az $\underline{A}$ oszlopvektorai terében.

Definiáljuk $\mathbb{C}^n$ $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$ vektorait a következőképpen: $\underline{v}_j$ -nek legyen i_j -edik komponense 1, a többi 0, $j = 1, \dots, r$. Azt állítjuk, hogy $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ bázis $\mathbb{C}^n$ -ben. Először a függetlenséget bizonyítjuk.

Legyen $\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{u}_i + \sum_{j=1}^r \beta_j \underline{v}_j = \underline{0}$, ahol $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, r$. Szorozzuk be balról az egyenlőség mindkét oldalát $\underline{A}$ -val. Mivel az első szumma benne van az $\underline{Ax} = \underline{0}$ egyenletrendszer megoldásterében, így ennek $\underline{A}$ -val való szorzata $\underline{0}$ -vektor. De $\underline{Av}_j = \underline{a}_{i_j}$ $j = 1, \dots, r$ a 4.15 megjegyzés utáni 1) tulajdonság szerint.

Igy $\underline{A} \sum_{j=1}^r \beta_j \underline{v}_j = \sum_{j=1}^r \beta_j \underline{a}_{i_j} = \underline{0}$. Viszont $\{\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_r}\}$ független vektorrendszer volt. Tehát $\beta_j = 0$ $j = 1, \dots, r$. Így beláttuk, hogy $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ független vektorrendszer. Most belátjuk, hogy generátorrendszer is $\mathbb{C}^n$ -ben. Legyen $\underline{w} \in \mathbb{C}^n$ egy tetszőleges vektor. Ekkor $\underline{Aw}$ benne van $\underline{A}$ oszlopvektorai terében a 4.15 Megjegyzés utáni 2)-es tulajdonság szerint. Így $\underline{Aw}$ kifejezhető $\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_r}$ lineáris kombinációjaként, azaz $\underline{Aw} = \sum_{j=1}^r \gamma_j \underline{a}_{i_j}$. Felhasználva, hogy $\underline{a}_{i_j} = \underline{Av}_j$ $j = 1, \dots, r$ kapjuk, hogy $\underline{Aw} = \underline{A} \cdot \sum_{j=1}^r \gamma_j \underline{v}_j$. Tehát $\underline{A}(\underline{w} - \sum_{j=1}^r \gamma_j \underline{v}_j) = \underline{0}$, azaz a zárójelben lévő vektor megoldása a homogén lineáris egyenletrendszernek, tehát a megoldások terének bázisával kifejezhető. Így $\underline{w} - \sum_{j=1}^r \gamma_j \underline{v}_j = \sum_{i=1}^k \delta_i \underline{u}_i$, valamilyen $\delta_i \in \mathbb{C}$ $i = 1, \dots, k$ számokra.

Tehát $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \delta_i \underline{u}_i + \sum_{j=1}^r \gamma_j \underline{v}_j$, azaz $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ $\mathbb{C}^n$ -ben generátorrendszer is, így bázis is. Ebből az $n = k + r$ egyenlőség azonnal következik.

9.6 Megjegyzés: Ha $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-r}$ a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterének bázisa, akkor ezt az egyenletrendszer *alaprendszerének* vagy *alpmegoldásainak* nevezik. Így a homogén egyenletrendszer minden megoldása $\sum_{i=1}^{n-r} c_i \underline{u}_i$ alakban kapható, alkalmas $c_i \in \mathbb{C}$ $i = 1, \dots, n - r$ skalárookra.

Ekkor azt is szokás mondani, hogy a homogén egyenlet általános megoldása, $\underline{x}_{ha} = \sum_{i=1}^{n-r} c_i \underline{u}_i$.

Most az inhomogén egyenletrendszer megoldásainak szerkezetével foglalkozunk.

9.7. Tétel: Legyen $\underline{A} \in M_{m \times n}[\mathbb{C}]$, $\underline{b} \in \mathbb{C}^m$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Jelölje $\underline{x}_{ip}$ az $\underline{Ax} = \underline{b}$ inhomogén lineáris egyenletrendszer egy rögzített megoldását (ú.n. *partikuláris megoldást*). Ekkor az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása (az ú.n. általános megoldás, röviden $\underline{x}_{ia'}$) $\underline{x}_{ia'} = \underline{x}_{ip} + \underline{x}_{ha'}$ alakban kapható meg, ahol $\underline{x}_{ha'}$ az $\underline{Ax} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldása.

Bizonyítás: Legyen $\underline{x}_{ip}$ az az inhomogén egyenletrendszernek egy rögzített, $\underline{x}$ egy tetszőleges megoldása.

Ekkor $\underline{A}(\underline{x} - \underline{x}_{ip}) = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$, tehát $\underline{x} - \underline{x}_{ip}$ megoldása a homogén egyenletrendszernek.

Ha $\underline{x}_h$ a homogén egyenletrendszernek egy tetszőleges megoldása, akkor $\underline{A}(\underline{x}_{ip} + \underline{x}_h) = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$, tehát $\underline{x}_{ip} + \underline{x}_h$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek. Tehát valóban $\underline{x}_{ia'} = \underline{x}_{ip} + \underline{x}_h$.

9.8 Következmény: Most már be tudjuk bizonyítani a 9.2 Tétel b) és c) pontjait is.

b) Ha $r = r(\underline{A}) = r(\begin{pmatrix} \underline{A} & | & \underline{b} \end{pmatrix}) = n$, akkor $n - r = 0$, tehát a homogén lineáris egyenletrendszernek csak a triviális megoldása létezik. Így $\underline{x}_{ia'} = \underline{x}_{ip}$, azaz az inhomogén egyenletrendszer megoldása egyértelmű.

c) Ha $r = r(\underline{A}) = r(\begin{pmatrix} \underline{A} & | & \underline{b} \end{pmatrix}) < n$, akkor $\underline{x}_{ia'} = \underline{x}_{ip} + \sum_{i=1}^{n-r} c_i \underline{u}_i$, ahol $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-r}$ a homogén egyenletrendszer alaprendszere, $c_1, \dots, c_{n-r}$ tetszőleges $\mathbb{C}$ -beli skalárok, az ú.n. *szabad paraméterek*. Tehát ekkor végtelensok megoldása van az egyenletrendszernek.

Most egy gyors, számítógépen is jól programozható, algoritmust mutatunk a lineáris egyenletrendszerek megoldására. Ennek neve *Gauss-elimináció*. Alapgondolata az, hogy a megadott egyenleteken olyan műveleteket végzünk, amelyek a megoldáshalmazt nem változtatják meg és elérjük, hogy az egyenletrendszer mátrixa közel "felső háromszög" mátrix legyen, amelyről könnyen leolvasható, hogy a 9.2 Tétel melyik esetével van dolgunk. Ha megoldható az

egyenletrendszer, akkor ebből az egyszerűbb alakú egyenletrendszerből a megoldások is könnyebben kiszámíthatóak.

Most felsoroljuk azon műveleteket (az ún. *elemi sorműveleteket*), amelyek a megoldáshalmazt nem változtatják meg. Egyszerűség kedvéért általában nem magán az egyenletrendszeren végezzük a műveleteket, hanem az őt leíró kibővített mátrixon.

Elemi sorműveletek:

az egyenleteken

- két egyenlet cseréje
- egy egyenlet szorzása nem 0 skalárral
- egyik egyenlet skalárszorosát egy másik egyenlethez adjuk

a kibővített mátrixon

- két sor cseréje
- egy sor szorzása nem 0 skalárral
- egyik sor skalárszorosát egy másik sorhoz adjuk

Könnnyen látható, hogy a fenti műveletek elvégzése során, ami eredetileg megoldás volt az továbbra is megoldás lesz. Ami az új egyenletrendszernek megoldása, az megoldása a réginek is, hiszen az hasonló műveletekkel visszakapható.

Tegyük fel, hogy kibővített mátrixunk a következő

$$\left(\underline{A} \mid \underline{b} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Először is sorcserével elérhető, hogy $a_{11} \neq 0$. Ellenkező esetben átsorszámozzuk az ismeretleneket, úgy, hogy legyen x_1 -nek nem 0 együtthatója.

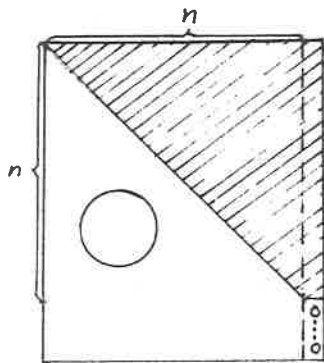
Ha tehát $a_{11} \neq 0$, akkor az első sor megfelelő skalárszorosát a többi sorból kivonva elérhető, hogy a mátrix első oszlopa a második sortól kezdve kinullázódik. Nevezetesen jelölje $\underline{s}_1^T, \dots, \underline{s}_n^T$ a kibővített mátrix sorait,

ekkor $\underline{s}_2^T - \frac{a_{21}}{a_{11}} \underline{s}_1^T, \dots, \underline{s}_n^T - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \underline{s}_1^T$ végzi el az említett műveletet.

Hasonló műveletek segítségével kinullázzuk a fődiagonális alatti részét a kibővített mátrixnak.

Az eljárásunk legkésőbb az m -edik lépésben befejeződik. Előfordulhat, hogy már egy $r < m$ esetén az r -edik lépésben akadunk meg, mert az $(r + 1)$ -edik egyenlettől kezdve minden x_i $i = 1, \dots, n$ együtthatója 0.

1. Ha $r(\underline{A}) = r(\underline{A} \mid \underline{b}) = n$, akkor az átalakított kibővített mátrixunk és egyenletrendszerünk következő alakú:

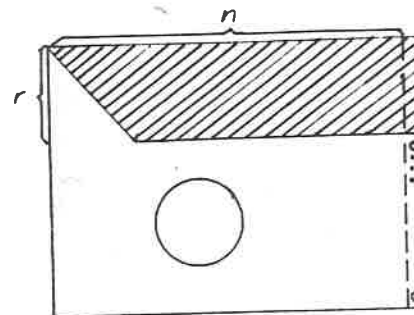


6. ábra

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}x_1 + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2 \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{nn}x_n &= \tilde{b}_n \end{aligned}$$

Igy $x_n, x_{n+1}, \dots, x_1$ az egyenleteken alulról felfelé haladva meghatározható.

2. Ha $r = r(\underline{A}) = r(\underline{A} \mid \underline{b}) < n$, akkor az átalakított kibővített mátrixunk és egyenletrendszerünk a következő alakú:

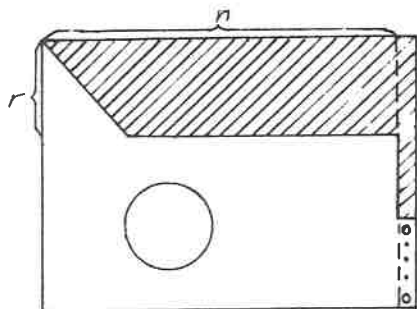


7. ábra

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}x_1 + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2 \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{rr}x_r + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n &= \tilde{b}_r \end{aligned}$$

Itt x_r értéke csak $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ függvényeként adható meg, tehát $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ szabad paraméterek. a többi $x_{r-1}, x_{r-2}, \dots, x_1$ ezek alapján az előbbiekhöz hasonlóan meghatározható.

3. Ha $r = r(\underline{A}) < r(\underline{A} \mid \underline{b})$, akkor az átalakított kibővített mátrixunk és egyenletrendszerünk a következő alakú:



8. ábra

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{rr}x_r + \cdots + \tilde{a}_{rn}x_n &= \tilde{b}_r \\ 0 &= \tilde{b}_{r+1} \\ 0 &= \tilde{b}_{t+2} \end{aligned}$$

Tehát bizonyos egyenletek baloldala 0, jobboldala nem 0, ami ellentmondás.
Tehát az egyenletrendszerből is leolvasható, hogy nincs megoldás.

Példa 9.9

1.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 6x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

A kibővített mátrix első sorának kétszeresét kivonjuk a második sorból.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$r(\underline{A}) = r(\underline{A} \mid \underline{b}) = 2 =$ az ismeretlenek száma, így a megoldás egyértelmű.

Visszaírva az egyenleteket:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = -1 \end{cases}$$

Ebből $x_2 = 1$ és $x_1 = -\frac{1}{3}$, tehát $\underline{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Ugyanezt az egyenletrendszert megoldhatjuk Cramer-szabállyal is, mert az együttható mátrix négyzetes és determinansa nem 0.

$$\det(\underline{A}) = -3$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{\det(\underline{A})} = \frac{1}{-3}$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}{\det(\underline{A})} = \frac{-3}{-3} = 1$$

3. A fenti egyenletrendszert felfoghatjuk x_1, x_2, x_3 változóban is. Ekkor

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$r(\underline{A}) = r(\underline{A} \mid \underline{b}) = 2 < 3 = n$$

Tehát 1 szabad paraméter van. (A homogén egyenletrendszer megoldásai 1 dimenziós teret adnak)

$$x_3 = t \quad x_2 = 1 \quad x_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{itt } \underline{x}_{ip} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{ha'} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$

A kibővített mátrix második sorából kivonjuk az első sor kétszeresét

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(\underline{A}) = r((\underline{A} \mid \underline{b})) = 1 \quad n = 3 \quad n - r = 2$$

Tehát 2 szabad paraméter van.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$x_2 = c_2$$

$$x_3 = c_3$$

$$x_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}c_2 - \frac{1}{3}c_3$$

$$\underline{x}_{ia'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_{ip} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_{ha'} = c_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$1 = r(\underline{A}) < r((\underline{A} \mid \underline{b})) = 2 \quad \text{tehát nincs megoldás.}$$

(A visszaírt egyenletek

$$3x_2 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$0x_3 = -1$$

szintén ellentmondást adnak).

10. Sajátérték, sajátvektor

Most a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy alkalmazását mutatjuk be.

Bevezetjük egy mátrix sajátértékének és sajátvektorának fogalmát. E fogalmak fontos szerepet játszanak a geometriában, fizikában és az operátorok elméletében. A későbbiek során ki fogjuk terjeszteni e fogalmat mátrixokról lineáris operátorokra is.

10.1 Definíció: Legyen $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ egy mátrix. Egy $0 \neq \underline{s} \in \mathbb{C}^n$ vektort az $\underline{A}$ mátrix $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük, ha $\underline{A}\underline{s} = \lambda\underline{s}$ teljesül.

10.2 Példa:

1. Az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix $\mathbb{R}^3$ vektorait a (zx) síkra tükrözi. Ugyanis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$$

A (zx) sík nem $\underline{0}$ vektorai $\underline{A}$ -nak 1 sajátértékéhez tartozó sajátvektorai. A (zx) síkra merőleges nem $\underline{0}$ vektorok $\underline{A}$ -nak -1 sajátértékéhez tartozó sajátvektorai.

2. $\underline{I} \in M_n[\mathbb{C}]$ egységmátrixnak $\mathbb{C}^n$ minden nem $\underline{0}$ vektora 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora.

10.3 Definíció: $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ spektrumának nevezzük az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei halmazát.

Felmerül a kérdés, hogy minden $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixnak vannak-e sajátvektorai és ha van akkor hány sajátvektora van, illetve ezeket hogyan lehet meghatározni. Nyilván sajátvektor tetszőleges nem nulla skalárszorosa is sajátvektor, így az ú.n.

“sajátirányok” érdekesek csak. A sajátértékek és sajátvektorok meghatározásáról szól a következő tétel.

10.4 Tétel: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix sajátértékei éppen a $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$ egyenlet gyökei. Ha λ_0 ennek az egyenletnek egy gyöke, akkor a hozzá tartozó sajátvektorok az $(\underline{A} - \lambda_0 \underline{I})\underline{s} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer megoldásával határozhatók meg. Ezen egyenletrendszer tetszőleges nemtriviális megoldása $\underline{A}$ -nak λ_0 -hoz tartozó sajátvektora.

Bizonyítás: Keresünk olyan $0 \neq \underline{s} \in \mathbb{C}^n$ vektorokat, amelyekre alkalmas $\lambda \in \mathbb{C}$ skálárra, $\underline{A}\underline{s} = \lambda \underline{s}$. Ez ekvivalens az $(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{s} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer $\underline{s}$ nemtriviális megoldásának keresésével.

Tudjuk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van 1-nél több megoldása, ha az együttható-mátrix rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma.

Tehát ilyen nemtriviális $\underline{s}$ megoldás pontosan akkor létezik, ha $\lambda \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $r(\underline{A} - \lambda \underline{I}) < n$. De $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ $n \times n$ -es mátrix így $r(\underline{A} - \lambda \underline{I}) < n$. 8.4 Tétel szerint pontosan akkor teljesül, ha $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$. Ha λ -t, mint változót tekintjük, akkor $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I})$ λ -ban egy n -edfokú polinom. Tehát $\underline{A}$ sajátértékei ennek a polinomnak a gyökei. Az algebra alaptétele szerint multiplicitásokkal számolva $\underline{A}$ -nak pontosan n darab sajátértéke van, legyenek ezek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ekkor az $(\underline{A} - \lambda_i \underline{I})\underline{s} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer megoldása adja a λ_i -hez tartozó sajátvektorokat.

10.5 Definíció: $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ -re a $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I})$ λ -ban n -edfokú polinomot az $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus polinomjának nevezzük.

10.6 Megjegyzés: Annak idején a mátrixokat és a determinánst komplex elemű mátrixokra értelmeztük. Hasonlóan értelmezhetők a mátrix-műveletek és a determináns akkor is, ha a mátrix elemei a $\mathbb{C}[x]$ polinomgyűrű elemei, vagy még általánosabb esetben tetszőleges gyűrű elemei. Tulajdonképpen a $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I})$ kiszámításakor egy olyan mátrix determinánsát számoljuk ki, amelynek elemei a $\mathbb{C}[\lambda]$ egyváltozós polinomgyűrű elemei.

10.7 Megjegyzés: Láttuk, hogy egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixnak mindig van a komplex számok körében sajátértéke. De $\underline{A} \in M_n[\mathbb{R}]$ esetén nem feltétlenül teljesül, hogy van $\underline{A}$ -nak valós sajátértéke. Például az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

esetén

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \lambda^2 - 2 \cos 30^\circ \lambda + 1 = 0$$

egyenlet diszkriminánsa

$$D = 4 \cos^2 30^\circ - 4 < 0,$$

tehát nincs valós gyöke.

Nem igaz az sem, hogy egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixnak lenne mindig n -darab lineárisan független sajátvektora.

10.8 Példa: Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2[\mathbb{C}]$$

Ennek karakterisztikus polinomja $(1 - \lambda)^2$, tehát $\underline{A}$ -nak 1 kétszeres sajátértéke. Számítsuk ki $\underline{A}$ $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorait. Az

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{s} = \underline{0}$$

lineáris egyenletrendszer $\underline{s} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ -re $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tehát $m_2 = 0$ m_1 tetszőleges.

Igy $\underline{A}$ sajátértékei mind az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor nem nulla skalárszorosai, tehát $\underline{A}$ -nak csak 1 lineárisan független sajátvektora van.

10.9 Definíció: Egy $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix *nyoma* (trace, Spur), vagy *első skalárinvariánsa*, az $\underline{A}$ mátrix főátlóban levő elemei összege, azaz $\sum_{i=1}^n a_{ii}$. Erre a $\text{tr}(\underline{A})$ jelölést használjuk a továbbiakban.

Most egy kapcsolatot mutatunk egy mátrix sajátértékei, nyoma és determinánsa között.

10.10 Tétel: Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix. Ekkor $\underline{A}$ nyoma éppen $\underline{A}$ sajátértékeinek összege, $\underline{A}$ determinánsa éppen $\underline{A}$ sajátértékeinek szorzata.

Bizonyítás: Irjuk fel $\underline{A}$ karakterisztikus polinomját két különböző módon és végezzünk együtthatóösszehasonlítást.

$$p(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots + \det(\underline{A})$$

Másrészt írjuk fel a karakterisztikus polinomot gyöktényezős alakban. Tudjuk, hogy főegyütthatója $(-1)^n$ és gyökei éppen $\underline{A}$ sajátértékei. Legyenek ezek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ekkor

$$p(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \lambda^{n-1} + \dots + \lambda_1 \dots \lambda_n$$

Az együtthatóösszehasonlításból

$$a_0 = \det(\underline{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$(-1)^{n-1} a_{n-1} = \text{tr}(\underline{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

10.11 Tétel: Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[\mathbb{C}]$ és $\underline{B} = (b_{ij}) \in M_n[\mathbb{C}]$.

Ekkor $\text{tr}(\underline{AB}) = \text{tr}(\underline{BA})$.

Bizonyítás: Jelölje $i(\underline{AB})_i$ az $\underline{AB}$ mátrix i -edik sorának i -edik elemét. Ekkor

$$\begin{aligned} \text{tr}(\underline{AB}) &= \sum_{i=1}^n i(\underline{AB})_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \\ &= \sum_{k=1}^n k(\underline{BA})_k = \text{tr}(\underline{BA}). \end{aligned}$$

Most definiáljuk mátrixnak polinomba való behelyettesítését.

10.12 Definíció: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixot a $p(x) = \sum_{i=1}^l a_i x^i \in \mathbb{C}[X]$ polinomba úgy helyettesítünk be, hogy kiszámítjuk, a következőt:

$a_0 \underline{I} + a_1 \underline{A} + \dots + a_l \underline{A}^l$. Ezt a mátrixot $p(\underline{A})$ -val jelöljük és p -nek $\underline{A}$ helyen vett helyettesítési értékének nevezzük.

10.13 Definíció: Egy $p(x) \in \mathbb{C}[X]$ polinomot az $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix *annulálópolinomjának* nevezzük, ha $p(\underline{A}) = \underline{0}$.

10.14 Megjegyzés: Minden $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixnak van annulálópolinomja hiszen $\underline{I}, \underline{A}, \underline{A}^2, \dots, \underline{A}^{n^2}$ az $M_n[\mathbb{C}]$ vektortér $n^2 + 1$ eleme, $\dim_{\mathbb{C}} M_n[\mathbb{C}] = n^2$ miatt lineárisan összefüggő. Így léteznek olyan $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ skalárok, hogy $c_0 \underline{I} + c_1 \underline{A} + \dots + c_n \underline{A}^n = \underline{0}$ és nem minden c_i nulla. Így $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ $\underline{A}$ -nak annulálópolinomja. Most megmutatjuk, hogy van minden $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixnak n -edfokú annulálópolinomja is.

10.15 Tétel (Cayley-Hamilton): Egy $\underline{A} \in [\mathbb{C}]$ mátrix karakterisztikus polinomja az $\underline{A}$ mátrix annulálópolinomja.

Bizonyítás: Mint az inverzmátrix létezésének bizonyításánál láttuk, ha egy mátrixot megszorozunk az előjeles aldeterminánsaiból álló mátrix transzponáltjával, akkor az egységmátrixnak a mátrix determinánsaszorosaát kapjuk. Ezt az állítást alkalmazzuk most $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ mátrixra. Erre tehát

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I})((-1)^{i+j} \det((\underline{A} - \lambda \underline{I})_{ij}))^T = \begin{pmatrix} p(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda) \end{pmatrix}$$

ahol $p(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I})$, azaz $\underline{A}$ karakterisztikus polinomja.

Másrészt

$$\begin{pmatrix} p(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda) \end{pmatrix} = ((-1)^{i+j} \det((\underline{A} - \lambda \underline{I})_{ij}))^T (\underline{A} - \lambda \underline{I})$$

Itt $((-1)^{i+j} \det((\underline{A} - \lambda \underline{I})_{ij}))^T$, $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ előjeles aldeterminánsaiból álló mátrix transzponáltja, tehát e mátrix minden eleme λ -nak egy legfeljebb $(n-1)$ -edfokú polinomja. Ezt a mátrixot szétbontjuk olyan mátrixok összegére, amelyek λ -nak azonos fokú tagjait tartalmazzák komponenseikben.

Igy $((-1)^{i+j} \det((\underline{A} - \lambda \underline{I})_{ij}))^T = \underline{A}_0 + \lambda \underline{A}_1 + \dots + \lambda^{n-1} \underline{A}_{n-1}$, ahol $\underline{A}_0, \underline{A}_1, \dots, \underline{A}_{n-1} \in M_n[\mathbb{C}]$.

Tehát $(\underline{A} - \lambda \underline{I})(\underline{A}_0 + \lambda \underline{A}_1 + \dots + \lambda^{n-1} \underline{A}_{n-1}) = (\underline{A}_0 + \lambda \underline{A}_1 + \dots + \lambda^{n-1} \underline{A}_{n-1})(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = p(\lambda) \underline{I}$. Ebből leolvasható, hogy $\underline{A}$ felcserélhető $\underline{A}_0, \underline{A}_1, \dots, \underline{A}_{n-1}$ mátrixokkal. Így ugyanazt az eredményt kapjuk, ha előbb helyettesítjük be a szorzótényezőket $\underline{A}$ -t és utána végezzük el a beszorzást, mint ha előbb végezzük a beszorzást és utána helyettesítjük be $\underline{A}$ -t. Így $\underline{0} = p(\underline{A}) \underline{I} = p(\underline{A})$.

10.16 Definíció: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix *minimálpolinomjának* nevezzük $\underline{A}$ minimális fokú annulálópolinomját.

A

következő tétel egy mátrix minimálpolinomjának és többi annulálópolinomjának

kapcsolatára mutat rá.

10.17 Tétel: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix minimálpolinomja $\underline{A}$ minden annullálópolinomjának osztója.

Bizonyítás: Legyen $m(x)$ $\underline{A}$ minimálpolinomja és $p(x)$ $\underline{A}$ tetszőleges annullálópolinomja.

Ekkor $p(x) = h(x)m(x) + r(x)$ alakban írható a 3.7 Tétel szerint, ahol vagy $r(x) = 0$ vagy $\deg r(x) < \deg m(x)$. Ha $r(x) = 0$, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben helyettesítjük be $\underline{A}$ -t. Ekkor $\underline{0} = p(\underline{A}) = h(\underline{A})m(\underline{A}) + r(\underline{A})$ és $m(\underline{A}) = \underline{0}$ $r(\underline{A}) = \underline{0}$ -t adja. Tehát találtunk az $\underline{A}$ -nak egy $\deg m(x)$ -nél kisebb fokú annullálópolinomját, ami ellentmondás.

10.18 Következmény: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix minimálpolinomja skalárszorozótól eltekintve egyértelmű.

Bizonyítás: Legyen $m_1(x)$ és $m_2(x)$ $\underline{A}$ -nak két minimálpolinomja.

Az előző tétel szerint osztói egymásnak, azaz léteznek olyan $h_1(x), h_2(x)$ polinomok, amelyekre $m_1(x) = h_1(x)m_2(x)$ és $m_2(x) = h_2(x)m_1(x)$. Ebből $m_1(x) = h_1(x)h_2(x)m_1(x)$. Mivel a szorzat polinom foka a tényezők fokainak összege, $h_1(x)$ és $h_2(x)$ csak konstans polinomok lehetnek.

A következő tétel a minimálpolinom gyökeit jellemzi.

10.19 Tétel: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix minimálpolinomjának gyökei $\underline{A}$ sajátértékei és $\underline{A}$ minden sajátértéke előfordul a gyökök között.

Bizonyítás: A 10.17 Tétel szerint $\underline{A}$ $m(x)$ minimálpolinomja osztója $\underline{A}$ $p(x)$ karakterisztikus polinomjának. Tehát $p(x) = h(x)m(x)$. Így $m(x)$ gyöktényezői $p(x)$ gyöktényezőinek részhalmazát alkotják. $p(x)$ gyökeiről viszont tudjuk, hogy éppen $\underline{A}$ sajátértékei.

Tehát az állítás első felét beláttuk.

Legyen most $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ $\underline{A}$ -nak egy tetszőleges sajátértéke $\underline{0} \neq \underline{s}_0 \in \mathbb{C}^n$ sajátvektorral. Megmutatjuk, hogy λ_0 gyöke $m(x)$ -nek.

Legyen $m(x) = \sum_{i=0}^t a_i x^i$. Ekkor $\underline{A}\underline{s}_0 = \lambda_0 \underline{s}_0$, $\underline{A}^2 \underline{s}_0 = \underline{A}(\underline{A}\underline{s}_0) = \underline{A}(\lambda_0 \underline{s}_0) = \lambda_0 \underline{A}\underline{s}_0 = \lambda_0^2 \underline{s}_0$ és hasonlóan, minden $1 \leq i \leq t$ esetén $\underline{A}^i \underline{s}_0 = \lambda_0^i \underline{s}_0$.

Ekkor

$$\underline{0} = m(\underline{A})\underline{s}_0 = a_0 \underline{s}_0 + \sum_{i=1}^t a_i \underline{A}^i \underline{s}_0 = a_0 \underline{s}_0 + \sum_{i=1}^t a_i \lambda_0^i \underline{s}_0 = m(\lambda_0) \underline{s}_0.$$

De $\underline{s}_0 \neq \underline{0}$, tehát $m(\lambda_0) = 0$.

10.20 Példa. Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{A}$ karakterisztikus polinomja $(1 - \lambda)^3$

$\underline{A}$ minimálpolinomja $(1 - \lambda)^2$

Egy $\underline{A}$ mátrix minimálpolinomját meg lehet határozni próbálgatással. karakterisztikus polinom azon osztóit kell megvizsgálni, amelyeknek $\underline{A}$ minden sajátértéke gyöke. Ezek közül a minimális fokú annullálópolinom épp $\underline{A}$ minimálpolinomja. Meg lehet azonban határozni próbálgatás nélkül is az alábbi tétel alkalmazásával, amelyet bizonyítás nélkül közlünk. Bizonyítását lásd a függelékben F 1.12 Következmény címszó alatt.

10.21 Tétel: Legyen $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$. Ekkor ha $p(\lambda)$ jelöli $\underline{A}$ karakterisztikus polinomját, $d(\lambda)$ pedig az $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ előjeles aldeterminánsából álló $((-1)^{i+1} \det((\underline{A} - \lambda \underline{I})_{ij}))$ mátrix elemeinek legnagyobb közös osztóját, akkor $\underline{A}$ minimálpolinomja $\frac{p(\lambda)}{d(\lambda)}$.

10.22 Példa: Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{A} - \lambda \underline{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Az $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ előjeles aldeterminánsából álló mátrix épp

$$\begin{pmatrix} (1 - \lambda)^2 & 0 & 0 \\ -(1 - \lambda) & (1 - \lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)^2 \end{pmatrix}.$$

Ennek elemeinek legnagyobb közös osztója $d(\lambda) = (1 - \lambda)$. Így $\frac{p(\lambda)}{d(\lambda)} = \frac{(1 - \lambda)^3}{(1 - \lambda)} = (1 - \lambda)^2$.

11. Mátrixfüggvények

Mivel komplex értékű komplex mátrixokon értelmezett függvényeket szeretnénk értelmezni először bevezetjük a komplex sorozat, sor, függvénysor majd hatványsor konvergenciájának fogalmát.

11.1 Definíció: Egy $\{a_n\}$ komplex sorozatról azt mondjuk, hogy *konvergens* és határértéke $\alpha \in \mathbb{C}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

11.2 Definíció: Egy $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ komplex számsor konvergens, ha az $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ részletösszegek sorozata konvergens.

11.3 Definíció: Legyenek $f_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor z_0 -ban konvergens, ha a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z_0)$ numerikus sor konvergens.

11.4 Definíció: Egy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ alakú függvénysort z_0 középpontú hatványsornak hívunk.

11.5 Tétel (Cauchy-Hadamard): A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya egy z_0 körüli r sugarú körlap a komplex számsíkon, ahol

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

ahol $\limsup$ az illető sorozat legnagyobb torlódási pontját jelzi. A körlap határán lévő pontokról csak külön vizsgálat döntheti el, hogy beletartoznak-e a konvergenciatartományba.

11.4 Definíció: Legyen $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ és legyen $f(z)$ egy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ hatványsor összegfüggvénye. Ha az $s_n(\underline{A}) = \sum_{k=0}^n a_k \underline{A}^k$ mátrix minden komponense $n \rightarrow +\infty$ esetén egy konvergens sorozatot ad, akkor azt mondjuk, hogy $f(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \underline{A}^k$ értelmezve van. A következő tétel elégséges feltételt ad arra, hogy egy mátrixfüggvény értelmezve legyen. Ezt a tételt később bizonyítjuk, lásd a 11.24 Következményt.

11.5 Tétel: Ha az $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ hatványsor konvergenciatartománya belsejében tartalmazza az $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix spektrumát, akkor a $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underline{A}^i$ mátrixsorozat konvergens, azaz $f(\underline{A})$ értelmezve van.

11.6 Példa: Az $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ az egész komplex számsíkon konvergens, tehát $e^{\underline{A}}$ értelmezve van és egyenlő a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^n}{n!}$ sor összegével. Speciálisan minden t valós paraméterre $e^{\underline{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \underline{A}^n}{n!}$.

11.7 Megjegyzés: Legyenek $x_1(t), \dots, x_n(t)$ differenciálható valós függvények, $\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)$ deriváltfüggvényekkel. Legyen $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{A} \in M_n[\mathbb{R}]$, $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$. Ekkor az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = \underline{u}$$

elsőrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletrendszer megoldása

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \underline{u},$$

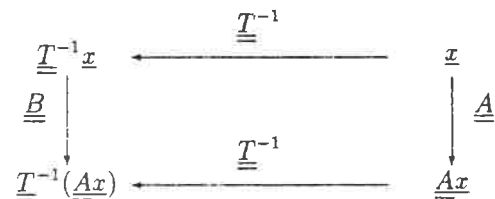
11.8 Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix *nilpotens*, ha létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\underline{A}^k = \underline{0}$.

11.9 Megjegyzés: Ha egy nilpotens mátrixot helyettesítünk be egy hatványsorba, akkor a mátrixhatványsor végső sok nem nulla tagot tartalmaz, tehát tulajdonképpen egy polinomba helyettesítünk be.

11.10 Definíció: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixot *blokkdiagonális* mátrixnak nevezünk, ha $\underline{A}$ olyan hipermátrix, amelynek nullától különböző blokkjai mind a fődiagonális mentén szimmetrikusan elhelyezkedő, négyzetes blokkok.

11.11 Megjegyzés: Blokkdiagonális mátrix polinomja (sora, függvénye) olyan blokkdiagonális mátrix, ahol a nem nulla blokkok az eredeti mátrix megfelelő blokkjainak, polinomjai (sorai, függvényei).

Legyen $\underline{T} \in M_n[\mathbb{C}]$ egy reguláris mátrix. Ekkor, ha $\underline{x}$ végigfut $\mathbb{C}^n$ különböző vektorain, akkor $\underline{T}^{-1}\underline{x}$ is megadja $\mathbb{C}^n$ összes elemeit. Ha $\underline{x} \neq \underline{y} \in \mathbb{C}^n$, akkor $\underline{T}^{-1}\underline{x} \neq \underline{T}^{-1}\underline{y}$, mert ellenkező esetben $\underline{T}$ -vel való leszorzás után $\underline{x} = \underline{y}$ egyenlőséget kapnánk. Egy adott $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixhoz meg szeretnénk adni egy olyan $\underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixot, amely ugyanúgy mozgatja a $\{\underline{T}^{-1}\underline{x} | \underline{x} \in \mathbb{C}^n\}$ képvektorokat, ahogyan $\underline{A}$ az $\{\underline{x} | \underline{x} \in \mathbb{C}^n\}$ vektorokat, azaz $\underline{B}(\underline{T}^{-1}\underline{x}) = \underline{T}^{-1}(\underline{A}\underline{x})$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$. Diagrammal szemléltetve:



$$\text{Tehát } \underline{B} = \underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T}.$$

11.12 Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\underline{A}, \underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixok *hasonlóak*, ha létezik egy olyan $\underline{T} \in M_n[\mathbb{C}]$ reguláris mátrix, melyre $\underline{B} = \underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T}$. Ekkor $\underline{T}$ *hasonlósági transzformáció*-nak nevezzük. Azt, hogy $\underline{A}$ és $\underline{B}$ hasonló, $\underline{A} \sim \underline{B}$ -vel jelöljük.

11.13 Tétel: A mátrixok hasonlósága $M_n[\mathbb{C}]$ -n egy ekvivalenciarelációt ad, azaz

- (i) $\underline{A} \sim \underline{A}$ minden $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ -re (reflexivitás)
- (ii) ha $\underline{A} \sim \underline{B}$, akkor $\underline{B} \sim \underline{A}$ (szimmetria)
- (iii) ha $\underline{A} \sim \underline{B}$ és $\underline{B} \sim \underline{C}$, akkor $\underline{A} \sim \underline{C}$ (transzitivitás)

Bizonyítás:

- (i) Az egységmátrix $\underline{I}$ -nak önmagával való hasonlóságát biztosítja.
- (ii) Ha $\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T} = \underline{B}$, akkor $(\underline{T}^{-1})^{-1}\underline{B}\underline{T}^{-1} = \underline{T}\underline{B}\underline{T}^{-1} = \underline{A}$, tehát $\underline{B} \sim \underline{A}$.
- (iii) Ha $\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T} = \underline{B}$ és $\underline{S}^{-1}\underline{B}\underline{S} = \underline{C}$, akkor $(\underline{T}\underline{S})^{-1}\underline{A}(\underline{T}\underline{S}) = \underline{S}^{-1}(\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T})\underline{S} = \underline{S}^{-1}\underline{B}\underline{S} = \underline{C}$. Tehát $\underline{A} \sim \underline{C}$.

11.14 Tétel: Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai, sajátértékei, nyomai, determinánsai megegyeznek.

Bizonyítás: Legyenek $\underline{A}, \underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ hasonlóak $\underline{T} \in M_n[\mathbb{C}]$ hasonlósági transzformációval, azaz $\underline{B} = \underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T}$. Ekkor $\det(\underline{B} - \lambda \underline{I}) = \det(\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T} - \lambda \underline{I}) = \det(\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T} - \underline{T}^{-1}\lambda \underline{I}\underline{T}) = \det(\underline{T}^{-1}(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{T}) = \det(\underline{T}^{-1})\det(\underline{A} - \lambda \underline{I})\det(\underline{T}) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I})$.

Itt felhasználtuk, hogy az egységmátrixok λ -szorosával minden mátrix felcserélhető, a determinánsok szorzástételét és azt, hogy inverz mátrix determinánsa az eredeti mátrix determinánsának reciproka.

Ezzel a karakterisztikus polinomokra vonatkozó állítást beláttuk. Mivel a karakterisztikus polinom gyökei éppen a mátrix sajátértékei, így $\underline{A}$ és $\underline{B}$ sajátértékei megegyeznek. A mátrix nyoma a sajátértékei összege, determinánsa pedig a sajátértékei szorzata, így a nyomra és determinánsra vonatkozó állítás is azonnal következik.

11.15 Megjegyzés: A fenti tétel megfordítása nem igaz, azaz lehet két mátrix karakterisztikus polinomja azonos anélkül, hogy a két mátrix hasonló lenne. Például az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok karakterisztikus polinomja $(1 - \lambda)^2$. A két mátrix nem lehet hasonló, hiszen az egységmátrixot minden hasonlósági transzformáció fixen hagyja. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ arra is példa, hogy nem minden mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz. Hiszen egy hozzá hasonló mátrixnak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, tehát ha hasonló lenne egy diagonális mátrixhoz az csak az egységmátrix lehetne, amelyről már láttuk, hogy ez nem lehetséges. Viszont látni fogjuk, hogy minden mátrix hasonló valamely felső háromszög mátrixhoz.

11.16 Definíció: Egy $\underline{J} \in M_r[\mathbb{C}]$ mátrixot λ_0 sajátértékhez tartozó, $r \times r$ -es felső Jordan-blokknak nevezünk. Ha $\underline{J}$ felső háromszögmátrix, melynek diagonálisában minden elem λ_0 és i -edik sorának $i + 1$ -edik eleme 1, minden $1 \leq i \leq r - 1$ esetén.

A következő tétel azt mutatja, hogy $M_n[\mathbb{C}]$ minden hasonlósági osztályában van egy olyan felső háromszög mátrix, amelyről a mátrixnak sok tulajdonsága leolvasható. A tétel bizonyítása a Függelékben található.

11.17 Tétel (Jordan-féle normálalak): Minden $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix hasonló az $\underline{A}$ sajátértékeihez tartozó felső Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, ezt $\underline{A}$ Jordan-féle normálalakjának nevezzük. A Jordan-féle normálalak a blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű, azaz, ha $\underline{A}$ hasonló egy felső Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, akkor egyértelműen meghatározott, hogy egy-egy sajátértékhez hány és milyen méretű blokk tartozik. A λ_i -hez tartozó blokkok száma megegyezik $\underline{A}$ λ_i -hez tartozó lineárisan független sajátvektorai számával. A λ_i -hez

tartozó, maximális méretű Jordan-blokk dimenziója éppen $\underline{A}$ minimálpolinomjában a $(\lambda - \lambda_i)$ gyöktényező kitevője.

A további blokkméreteket az ún. "invariáns faktorok" alapján lehet meghatározni, amelyeket a következőkben definiálunk.

11.18 Definíció: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix determinánsosztói a következők:

$$\begin{aligned} D_n(\lambda) &= \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \underline{A} \text{ karakterisztikus polinomja} \\ &\vdots \\ D_i(\lambda) &= \text{l.n.k.o.}\{\underline{A} - \lambda \underline{I} \text{ } (i \times i) \text{-es aldeterminánsai}\} \\ &\vdots \\ D_0(\lambda) &= 1 \end{aligned}$$

11.19 Definíció: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix invariáns faktora

$$\begin{aligned} E_n(\lambda) &= \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)} \\ E_{n-1}(\lambda) &= \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)} \\ &\vdots \\ E_i(\lambda) &= \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)} \\ &\vdots \\ E_1(\lambda) &= \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} \end{aligned}$$

11.20 Megjegyzés: A determinánsosztók definíciójából könnyen következik, hogy minden $1 \leq i \leq n - 1$ esetén $D_i(\lambda)$ osztója $D_{i+1}(\lambda)$ -nak és így $E_i(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ polinom. A 10.21 Tételből pedig az következik, hogy $E_n(\lambda)$ éppen $\underline{A}$ minimálpolinomja.

11.21 Tétel: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ Jordan-féle normálalakja leolvasható $\underline{A}$ invariáns faktoraiból. A λ_i sajátértékhez tartozó blokkértékek csökkenő sorrendben éppen az $E_n(\lambda), E_{n-1}(\lambda), \dots, E_1(\lambda)$ invariáns faktorokban a $(\lambda_i - \lambda)$ gyöktényező kitevője. A tétel bizonyítását lásd a Függelék F 1.11 pontjában.

1.22 Példa: Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{A} - \lambda \underline{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$D_3(\lambda) = (1-\lambda)^3$$

$$E_3(\lambda) = (1-\lambda)^2$$

$$D_2(\lambda) = (1-\lambda)$$

$$E_2(\lambda) = (1-\lambda)$$

$$D_1(\lambda) = 1$$

$$E_1(\lambda) = 1$$

$$D_0(\lambda) = 1$$

1.23 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix hasonló a szponáltjához. (Mutassuk meg, hogy azonos a Jordan-féle normálalakjuk).

következő tételben kiszámítjuk egy négyzetes mátrix polinomját.

1.24 Tétel:

Legyen $\underline{J}_0$ λ_0 sajátértékekhez tartozó $r \times r$ -es felső Jordan-blokk, $p(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ polinom.

Ekkor

$$p(\underline{J}_0) = \begin{pmatrix} p(\lambda_0) & p'(\lambda_0) & \frac{p''(\lambda_0)}{2!} & \dots & \frac{p^{(r-1)}(\lambda_0)}{(r-1)!} \\ & p(\lambda_0) & p'(\lambda_0) & \dots & \frac{p^{(r-2)}(\lambda_0)}{(r-2)!} \\ & & p(\lambda_0) & \dots & \frac{p^{(r-3)}(\lambda_0)}{(r-3)!} \\ & & & \dots & p(\lambda_0) \end{pmatrix},$$

azaz $P(\underline{J}_0)$ felső háromszög mátrix, melynek diagonalisában minden elem $p(\lambda_0)$, és a mátrix i -edik sorában a diagonáltól kezdve az elemek $p(\lambda_0), p'(\lambda_0), \frac{p''(\lambda_0)}{2!}, \dots, \frac{p^{(r-i)}(\lambda_0)}{(r-i)!}$.

Ha

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 & & \\ & \underline{J}_2 & \\ & & \dots \\ & & & \underline{J}_k \end{pmatrix}$$

Jordan blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor

$$p(\underline{J}) = \begin{pmatrix} p(\underline{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\underline{J}_k) \end{pmatrix}.$$

Ha egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix hasonló $\underline{J}$ -hez, azaz $\underline{C}^{-1}\underline{A}\underline{C} = \underline{J}$ alkalmas $\underline{C}$ reguláris mátrixra, akkor $p(\underline{A}) = \underline{C}p(\underline{J})\underline{C}^{-1}$.

Bizonyítás: Irjuk fel a $p(x)$ polinomot $(x - \lambda_0)$ hatványai szerint: $p(x) = c_0 + c_1(x - \lambda_0) + c_2(x - \lambda_0)^2 + \dots + (x - \lambda_0)^t c_t$. Könnyen látható, hogy $p(\lambda_0) = c_0$, $\frac{p'(\lambda_0)}{1!} = c_1$, $\frac{p''(\lambda_0)}{2!} = c_2, \dots, \frac{p^{(i)}(\lambda_0)}{i!} = c_i, \dots, \frac{p^{(t)}(\lambda_0)}{t!} = c_t$, azaz $p(x) = \sum_{i=0}^t \frac{p^{(i)}(\lambda_0)}{i!} (x - \lambda_0)^i$.

Igy $p(\underline{J}_0) = p(\lambda_0)\underline{I} + \frac{p'(\lambda_0)}{1!}(\underline{J}_0 - \lambda_0 \underline{I}) + \dots + \frac{p^{(t)}(\lambda_0)}{t!}(\underline{J}_0 - \lambda_0 \underline{I})^t$. Itt $(\underline{J}_0 - \lambda_0 \underline{I})^i$ olyan 2×2 -es hipermátrixnak felel meg, amelynek első hipersorának második eleme egy $(r-i) \times (r-i)$ méretű egységmátrix, többi eleme nullmátrix, ha $i < r$. Ha $i \geq r$, akkor $(\underline{J}_0 - \lambda_0 \underline{I})^i$ nullmátrix.

A beszorzásokat elvégezve az állításban szereplő mátrixhoz jutunk.

b) Az állítás első fele a 11.11 Megjegyzésből következik. Ha $\underline{C}^{-1}\underline{A}\underline{C} = \underline{J}$, akkor $\underline{A} = \underline{C}\underline{J}\underline{C}^{-1}$, így $p(\underline{A}) = a_0 \underline{I} + \sum_{i=1}^t a_i \underline{A}^i = a_0 \underline{I} + \sum_{i=1}^t a_i (\underline{C}\underline{J}\underline{C}^{-1})^i = a_0 \underline{I} + \sum_{i=1}^t a_i \underline{C}\underline{J}^i \underline{C}^{-1} = \underline{C}(a_0 \underline{I} + \sum_{i=1}^t a_i \underline{J}^i) \underline{C}^{-1} = \underline{C}p(\underline{J})\underline{C}^{-1}$.

11.25 Következmény: Ha az $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ hatványsor konvergencia tartományának belsejében tartalmazza az $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix spektrumát és

$\underline{C}^{-1}\underline{A}\underline{C} = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{J}_k \end{pmatrix}$ $\underline{A}$ Jordan-féle normálalakja, melyben minden $1 \leq i \leq k$ esetén $\underline{J}_i \in M_{n_i}[\mathbb{C}]$ λ_i sajátértékhez tartozó felső Jordan-blokk, akkor $f(\underline{J}_1), \dots, f(\underline{J}_k), f(\underline{J})$ és $f(\underline{A})$ is értelmes, $f(\underline{A}) = \underline{C}f(\underline{J})\underline{C}^{-1}$,

$$f(\underline{J}) = \begin{pmatrix} f(\underline{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\underline{J}_k) \end{pmatrix},$$

ahol

$$f(\underline{J}_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás: Mivel $\underline{J}$ és $\underline{A}$ sajátértékei azonosak a fenti

konvergenciatartományának belsejében tartalmazza $\underline{J}, \underline{J}_1, \dots, \underline{J}_k$ sajátértékeit $\underline{J}$ -re.

Mivel $f(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_N(z)$, ahol $s_N(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^i$ N -edfokú polinom, $s_N(z)$ -re az előző tétel alkalmazható, tehát $s_N(\underline{A}) = \underline{C} s_N(\underline{J}) \underline{C}^{-1}$, $s_N(\underline{J}) =$

$$\begin{pmatrix} s_N(\underline{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & s_N(\underline{J}_k) \end{pmatrix} \text{ és}$$

$$s_N(\underline{J}_i) = \begin{pmatrix} s_N(\lambda_i) & s'_N(\lambda_i) & \dots & \frac{s_N^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ & \ddots & & \\ & & & s_N(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Mivel $s_N^{(j)}(\lambda_i)$ tart $f^{(j)}(\lambda_i)$ -hez az állítás azonnal következik.

11.26 Következmény: Ha $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixnak λ_0 k -szoros sajátértéke és $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ hatványsor a konvergenciatartományának belsejében tartalmazza $\underline{A}$ sajátértékeit, akkor $f(\underline{A})$ -nak $f(\lambda_0)$ legalább k -szoros sajátértéke.

Bizonyítás: Legyen $\underline{C}^{-1} \underline{A} \underline{C} = \underline{J}$, $\underline{A}$ Jordan-féle normálakaja. Ekkor λ_0 $\underline{J}$ -nek k -szoros sajátértéke. Az előző következmény szerint $f(\underline{J})$ -nek $f(\lambda_0)$ legalább k -szoros sajátértéke, $f(\underline{A}) = \underline{C} f(\underline{J}) \underline{C}^{-1}$ így ez $f(\underline{A})$ -ra is teljesül.

11.27 Megjegyzés: Egy $\underline{A}$ mátrix Jordan-féle normálakra hozásához szükséges $\mathbb{C}$ hasonlósági transzformációt megkapjuk a Függelékben bemutatott konstruktív bizonyításból.

A computer algebrai érdeklődésű olvasók számára megjegyezzük, hogy például a MAPLE szimbolikus számolásokat támogató programcsomag ki tudja számítani adott mátrix Jordan-féle normálakját és a hozzá tartozó hasonlósági transzformációt.

Ha $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, akkor a MAPLE segítségével a következő módon számítható ki $\underline{A}$ Jordan-féle normálakaja és a $\underline{C}$ hasonlósági transzformáció:

```
with (linalg);
```

```
a := matrix([[1,1,1], [0,1,1], [0,0,1]]);
```

```
Jordan (a, 'c');
```

```
print (c);
```

A Jordan-féle normálakra hozás nélkül is kiszámítható egy mátrixfüggvény Hermite-féle interpoláció segítségével. Az Hermite interpolációról szóló tételt kimondjuk, itt nem bizonyítjuk. Bizonyítása megtalálható például [SZP]-ben.

11.28 Tétel: (Hermite-féle interpoláció): Adottak $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ különböző alappontok és

$$f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(m_1-1)}(x_1)$$

$$\vdots$$

$$f(x_n), f'(x_n), \dots, f^{(m_n-1)}(x_n)$$

deriváltértékek az illető pontokban.

Ekkor létezik egyetlen olyan $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ legfeljebb $N = (\sum_{i=1}^n m_i) - 1$ -edfokú polinom, amelyre minden $1 \leq i \leq n$ esetén

$$p(x_i) = f(x_i)$$

$$\vdots$$

$$p^{(m_i-1)}(x_i) = f^{(m_i-1)}(x_i)$$

teljesül.

11.29 Megjegyzés: A fenti tételben szereplő $p(x)$ polinomot ismeretben együtthatós polinomnak felvéve, a fenti feltételeket felhasználva, $\sum_{i=1}^n m_i$ egyenletből álló lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelyből $p(x)$ ugyanennyi $\sum_{i=1}^n m_i$ darab együtthatója meghatározható. Ha $n = 1$, akkor $p(x)$ éppen az x_1 körüli N -edfokú Taylor polinom, ha $m_i = 1$ $1 \leq i \leq n$, akkor $p(x)$ a megfelelő Lagrange-interpolációs polinommal egyezik meg.

11.30 Példa: Legyen

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 0$$

$$f'(x_1) = 0$$

$$m_1 = 2 \quad m_2 = 1 \quad N = 3 - 1 = 2 \quad p(x) = ax^2 + bx + c.$$

feltételeket behelyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= p(x_1), \quad \text{azaz } 1 = a + b + c \\ f'(x_1) &= p'(x_1), \quad \text{azaz } 0 = 2a + b \\ f(x_2) &= p(x_2), \quad \text{azaz } 0 = 4a + 2b + c \end{aligned}$$

Ebből

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = 0, \quad \text{tehát } p(x) = -x^2 + 2x$$

A következő tétel megadja, hogy hogyan lehet mátrixfüggvényeket Hermite-féle interpoláció segítségével kiszámítani.

11.31 Tétel: Legyenek $\underline{A}$ különböző sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ és tegyük fel, hogy $\underline{A}$ minimálpolinomjában a $(\lambda - \lambda_i)$ gyöktényező kitevője legfeljebb m_i . Legyen $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ hatványsor, amely konvergenciatartományának belsejében tartalmazza $\underline{A}$ spektrumát.

Ekkor $f(\underline{A}) = p(\underline{A})$, ahol $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ alappontokhoz és az $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \dots, f^{m_i-1}(\lambda_i)$ $i = 1, \dots, s$ értékekhez tartozó Hermite-féle interpolációs polinom.

Bizonyítás: Ha $\underline{C}^{-1} \underline{A} \underline{C} = \underline{J}$ $\underline{A}$ Jordan-féle normálalakja és $\underline{J}$ blokkjai $\underline{J}_1, \dots, \underline{J}_k$, akkor a 11.24 Tétel szerint

$$p(\underline{A}) = \underline{C} p(\underline{J}) \underline{C}^{-1} = \underline{C} \begin{pmatrix} p(\underline{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\underline{J}_k) \end{pmatrix} \underline{C}^{-1}.$$

Ha $\underline{J}_i \in M_{r_i}[\mathbb{C}]$ μ_i -hez tartozó Jordan-blokk, akkor létezik olyan $1 \leq i \leq s$, hogy $\mu_i = \lambda_i$ és $r_i \leq m_i$, hiszen a λ_i -hez tartozó maximális Jordan-blokk méret legfeljebb m_i a 11.17 Tétel szerint.

Ezért

$$p(\underline{J}_i) = \begin{pmatrix} p(\lambda_i) p'(\lambda_i) \frac{p^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

ami az interpolációs polinom tulajdonságai szerint megegyezik a

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_i) f'(\lambda_i) & \dots & \frac{f^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_i) \end{pmatrix} = f(\underline{J}_i)$$

mátrixszal. De a 11.25 Következmény szerint

$$f(\underline{A}) = \underline{C} f(\underline{J}) \underline{C}^{-1} = \underline{C} \begin{pmatrix} f(\underline{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\underline{J}_k) \end{pmatrix} \underline{C}^{-1},$$

így az előző egyenlőség miatt $f(\underline{A}) = p(\underline{A})$.

11.31 Példa: Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

Számítsuk ki $e^{\underline{A}t}$ -t, ahol t valós paraméter.

Ekkor $f(x) = e^{xt}$, $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = (1 + \lambda)^2(1 - \lambda)$.

Ekkor $\underline{A}$ Jordan-féle normálalakja $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ vagy $\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, attól függően, hogy $\underline{A}$ minimálpolinomja $(1 + \lambda)(1 - \lambda)$ vagy $(1 + \lambda)^2(1 - \lambda)$.

Az előző tétel szerint ennek eldöntése nélkül is meghatározható $f(\underline{A})$.

$\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 1$ lesznek az alappontok $m_1 = 2$ és $m_2 = 1$.

Ekkor $N = m_1 + m_2 - 1 = 2$, $p(x) = a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t)$.

A feltételek

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= p(\lambda_1), \quad \text{azaz } e^{-t} = a_2(t) - a_1(t) + a_0(t) \\ f'(\lambda_1) &= p'(\lambda_1), \quad \text{azaz } te^{-t} = -2a_2(t) + a_1(t) \\ f(\lambda_2) &= p(\lambda_2), \quad \text{azaz } e^t = a_2(t) + a_1(t) + a_0(t) \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert $a_2(t), a_1(t), a_0(t)$ -re megoldva,

$$\begin{aligned} a_2(t) &= \frac{1}{4}(e^t - (1 + 2t)e^{-t}) \\ a_1(t) &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ a_0(t) &= \frac{1}{4}[e^t + (3 + 2t)e^{-t}] \end{aligned}$$

Igy $e^{\underline{A}t} = a_2(t)\underline{A}^2 + a_1(t)\underline{A} + a_0(t)$ már behelyettesítéssel kiszámolható.

A mátrixfüggvényeket legegyszerűbb abban az esetben kiszámolni, ha a mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz.

11.32 Definíció: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixot egyszerű struktúrájú mátrixnak nevezünk, ha $\underline{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz.

11.33 Tétel: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixra a következő állítások ekvivalensek

- (i) $\underline{A}$ egyszerű struktúrájú mátrix
- (ii) $\underline{A}$ minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres
- (iii) $\underline{A}$ -nak létezik n darab lineárisan független sajátvektora
- (iv) $\mathbb{C}^n$ -ben létezik olyan bázis, amely $\underline{A}$ sajátvektoraiból áll.

Bizonyítás: (i) $\rightarrow$ (ii) Mivel $\underline{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz ez egyben $\underline{A}$ Jordan-féle normálakja is. Tehát mindegyik sajátértékhez tartozó Jordan-blokk 1×1 -es. Így a 11.17 Tétel szerint $\underline{A}$ minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

(ii) $\rightarrow$ (i) Ha $\underline{A}$ minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres, akkor $\underline{A}$ Jordan-normálakájában minden blokk 1×1 -es. Így $\underline{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz.

(i) $\rightarrow$ (iii) A feltétel szerint létezik egy olyan $\underline{C} \in M_n[\mathbb{C}]$ reguláris mátrix, amelyre

$$\underline{C}^{-1} \underline{A} \underline{C} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

diagonális mátrix. Jelölje $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$ $\underline{C}$ oszlopvektorait. Ekkor

$$\underline{A}[\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n] = [\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n] \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

azaz $[\underline{A}\underline{c}_1, \dots, \underline{A}\underline{c}_n] = [d_1\underline{c}_1, \dots, d_n\underline{c}_n]$. Mivel $\underline{C}$ reguláris $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$ mátrixok függetlenek, speciálisan egyik sem nullvektor. Így $i = 1, \dots, n$ esetén $\underline{c}_i$ $\underline{A}$ -nak d_i sajátértékhez tartozó sajátvektora.

(iii) $\rightarrow$ (iv) Legyen $\{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$ $\underline{A}$ -nak n elemszámú lineárisan független sajátvektor rendszere. Ekkor $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$ bázis $\mathbb{C}^n$ -ben.

(iv) $\rightarrow$ (i) Legyen $\{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$ $\mathbb{C}^n$ -ben bázis, amely $\underline{A}$ sajátvektoraiból áll. Legyen $\underline{A}\underline{c}_i = \lambda_i \underline{c}_i$ $i = 1, \dots, n$ -re. Defináljuk azt a $\underline{C}$ mátrixot, amelynek oszlopvektorai $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$. Ekkor $\underline{C}$ reguláris és

$$\underline{A} \underline{C} = [\lambda_1 \underline{c}_1, \dots, \lambda_n \underline{c}_n] = [\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\underline{A} \underline{C} = \underline{C} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

és így

$$\underline{C}^{-1} \underline{A} \underline{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

11.34 Megjegyzés: Ha $\underline{A}$ egyszerű struktúrájú mátrix és

$$\underline{C}^{-1} \underline{A} \underline{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

akkor

$$f(\underline{A}) = \underline{C} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \underline{C}^{-1},$$

ha $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ tartalmazza konvergenciatartományának belsejében $\underline{A}$ sajátértékeit. Ekkor $f(\underline{A}) = p(\underline{A})$, ahol $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ $\underline{A}$ különböző sajátértékeihez mint alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinom.

Most mutatunk néhány példát egyszerű struktúrájú mátrixokra.

11.35 Példa: Ha egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix sajátértékei különbözők, akkor $\underline{A}$ egyszerű struktúrájú.

Bizonyítás: Ekkor $\underline{A}$ karakterisztikus polinomja egyben $\underline{A}$ minimálpolinomja is és minden gyöke egyszeres, így a 11.33 Tétel szerint $\underline{A}$ egyszerű struktúrájú mátrix.

11.36 Definíció: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{R}]$ mátrixról azt mondjuk, hogy

(i) szimmetrikus, ha $\underline{A}^T = \underline{A}$

(ii) antiszimmetrikus, ha $\underline{A}^T = -\underline{A}$

(iii) ortogonális, ha $\underline{A}^T = \underline{A}^{-1}$

(iv) normális, ha $\underline{A}^T \underline{A} = \underline{A} \underline{A}^T$.

Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixról azt mondjuk, hogy

(v) önadjungált, ha $\overline{\underline{A}}^T = \underline{A}$

(vi) ferdén önadjungált, ha $\overline{\underline{A}}^T = -\underline{A}$

vii) unitér, ha $\overline{\underline{A}}^T = \underline{A}^{-1}$

viii) normális, ha $\overline{\underline{A}}^T \underline{A} = \underline{A} \overline{\underline{A}}^T$.

11.37 Megjegyzés: Minden $\underline{A} \in M_n[\mathbf{R}]$ mátrixra $\underline{A} \in M_n[\mathbf{C}]$ is automatikusan teljesül. A fenti tulajdonságokból mind következik (viii). Viszont a későbbiekben látni fogjuk, hogy minden normális mátrix egyszerű struktúrájú. Így a fenti összes mátrix típus példa egyszerű struktúrájú mátrixra. Az viszont nem feltétlenül igaz, hogy egy valós elemű normális mátrix hasonló egy valós, diagonális mátrixhoz. Például a

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

ortogonális mátrix sajátértékei komplexek.

12. Vektortérkonstrukciók, lineáris operátorok

Ebben a fejezetben adott vektorterekből újabb vektortereket konstruálunk. A következő konstrukciókkal ismerkedünk meg.

- vektortér altere
- alterek összege, direkt összeg
- vektorterek direkt szorzata
- faktortér
- lineáris operátorok vektortere
- duális tér
- vektorterek tenzorszorzata

12.1 Definíció: Legyen F test V_F vektortér. Azt mondjuk, hogy a $\{0\} \neq W \leq V$ részhalmaz *altere* V -nek, ha W maga is vektortér a V -beli műveletekre nézve. Ezt a tulajdonságot $W \leq V$ -vel jelöljük. A $\{0\}$ és V altereket *triviális altereknek* nevezzük.

12.2 Definíció: Legyen V_F vektortér, $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$. Ekkor a $W = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in F \right\}$ halmazt a $v_1, \dots, v_k$ vektorokat által *generált alternek* nevezzük, és $W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ -val jelöljük.

12.3 Megjegyzés: A fenti definícióbeli W halmaz valóban alter, hiszen zárt az összeadásra és az F -beli skalárokkal való szorzásra, valamint teljesíti a vektortéraxiómákat. Ez az alter a $v_1, \dots, v_k$ vektorokat tartalmazó legszűkebb alter, hiszen W elemei minden $v_1, \dots, v_k$ -t tartalmazó alterben benne vannak.

12.4 Feladat: Igazoljuk az alábbi állítások helyességét. Véges dimenziós alter esetén adjunk a szereplő alterekben bázist.

- $\mathbf{R}^3$ -ban egy origón átmenő sík (vagy egyenes) pontjainak helyvektorai alter $\mathbf{R}^3$ -ban.
- Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbf{C}]$ mátrix oszlopvektorai tere alter $\mathbf{C}^n$ -ben, ez épp az $\underline{A}$ oszlopvektorai által generált alter.

(iv) $M_n[\mathbf{R}]$ -nek alterét alkotják a szimmetrikus mátrixok, egy másik alterét alkotják az antiszimmetrikus mátrixok.

(v) Az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvények vektortérének alterét alkotják a folytonos valós függvények.

(vi) $\mathbf{R}[x]$ -nek alterét alkotják a legfeljebb n -edfokú polinomok.

(vii) $\mathbf{R}^3$ -ban nem origón átmenő sík (vagy egyenes) pontjainak helyvektorai nem alter $\mathbf{R}^3$ -ban.

(viii) $M_n[\mathbf{R}]$ ortogonális mátrixai nem alkotnak alteret az $M_n[\mathbf{R}]$ vektortérben.

(ix) Az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényeknek nem alkotják alterét a nem folytonos valós függvények.

(x) $\mathbf{R}[x]$ -nek nem alkotják alterét a pontosan n -edfokú polinomok.

12.5 Megjegyzés: Könnyen látható, hogy vektortér bizonyos altereinek metszete szintén alter. Uniójuk viszont nem. Például $\mathbf{R}^2$ -nek altere az x -tengely pontjaihoz tartozó helyvektorok halmaza és az y tengely pontjaihoz tartozó helyvektorok halmaza is. Ezek uniója viszont nem zárt az összeadásra.

12.6 Definíció: Legyen V_F vektortér, $W_1, W_2 \leq V$ alterek.

Azt mondjuk, hogy W a W_1 és W_2 alterek összege vagy generátuma ha $W = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$. Erre tényre a $W = W_1 + W_2$ illetve a $W = \langle W_1, W_2 \rangle$ jelöléseket használjuk.

12.7 Megjegyzés: W alter V -ben. Sőt W az a legszűkebb altere V -nek amely W_1 -et és W_2 -t is tartalmazza. De egy $\underline{w} \in W$ -beli vektor nem feltétlenül áll elő egyértelműen $\underline{w}_1 + \underline{w}_2$ alakban. Analóg módon értelmezhető több alter összege is.

12.8 Definíció: Azt mondjuk, hogy a V_F vektortér W altere az $W_1, \dots, W_k$ alterek direkt összege, ha W minden $\underline{w}$ eleme egyértelműen áll elő $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \underline{w}_i$ alakban, ahol $\underline{w}_i \in W_i$ $i = 1, \dots, k$. Ekkor a $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ vagy a $W = \bigoplus_{i=1}^k W_i$ jelölést használjuk.

12.9 Feladat:

(i) Igazoljuk, hogy $\mathbf{R}^3$ az x, y és z tengelyek által meghatározott alterek direkt összege.

(ii) Igazoljuk, hogy $\mathbf{R}^3$ az (xy) és (yz) síkok által meghatározott alterek összege, de nem direkt összege. Mutassunk olyan vektort, amely többféleképpen is előáll a két altérbeli vektorok összegeként.

Most szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy egy alter bizonyos alterek direkt összege legyen.

12.10 Tétel: Legyen V_F vektortér $W, W_1, \dots, W_k$ alterek V -ben. Ekkor $W = \bigoplus_{i=1}^k W_i$ pontosan akkor teljesül, ha

(i) $W = W_1 + \dots + W_k$ és

(ii) $W_i \cap \langle W_1, W_2, \dots, W_{i-1}, W_{i+1}, \dots, W_k \rangle = \{0\}$ $i = 1, \dots, k$.

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $W = \bigoplus_{i=1}^k W_i$.

Ekkor nyilván $W = W_1 + \dots + W_k$. Ha $\underline{w}_i \in W_i \cap \langle W_1, \dots, W_{i-1}, W_{i+1}, \dots, W_k \rangle$, akkor $0 + \dots + \underline{w}_i + \dots + 0 = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_i + \dots + 0 + \dots + \underline{w}_k$ $\underline{w}_i$ -nek két előállítását $W_1, \dots, W_k$ -beli vektorokból. Az előállítás egyértelműsége miatt ez csak úgy lehetséges, ha $\underline{w}_i = 0 = \underline{w}_1 = \dots = \underline{w}_k$.

Tegyük fel most, hogy (i) és (ii) teljesül. Ekkor minden $\underline{w} \in W$ előáll $\underline{w} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_k$ alakban, ahol $\underline{w}_i \in W_i$ $i = 1, \dots, k$. Ha lenne egy másik előállítás is, $\underline{w} = \underline{w}'_1 + \dots + \underline{w}'_k$, ahol $\underline{w}'_i \in W_i$ $i = 1, \dots, k$, és például $\underline{w}_i \neq \underline{w}'_i$, akkor $0 \neq \underline{w}_i - \underline{w}'_i = \sum_{j \neq i} \underline{w}'_j - \underline{w}_j$ és ez a vektor eleme a $W_i \cap \langle W_1, \dots, W_{i-1}, W_{i+1}, W_k \rangle$ metszetnek, amely (ii) szerint ellentmondást ad.

12.11 Tétel: Legyen V véges dimenziós vektortér $W_1, \dots, W_n$ altereinek direkt összege. Ekkor $\dim V = \sum_{i=1}^n \dim W_i$.

Bizonyítás: A bizonyítást az $n = 2$ esetre végezzük el, az általános eset hasonlóan bizonyítható.

Legyen $V = W_1 \oplus W_2$, W_1 egy bázisa $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$, W_2 egy bázisa $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_l\}$.

Azt állítjuk, hogy $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_l\}$ V -nek bázisa. Belátjuk, hogy ez független generátorrendszer.

Ha $\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{e}_i + \sum_{j=1}^l \beta_j \underline{f}_j = 0$, akkor mivel minden V -beli vektor egyértelműen áll elő egy W_1 -beli és egy W_2 -beli vektor összegeként $\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{e}_i = 0$ és $\sum_{j=1}^l \beta_j \underline{f}_j = 0$. De $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$ és $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_l\}$ független vektorrendszerek voltak, így az α_i $i = 1, \dots, k$ és β_j $j = 1, \dots, l$ együtthatók mind nullák.

Legyen $\underline{v} \in V$ tetszőleges vektor. Ez előáll $\underline{v} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ alakban alkalmas $\underline{w}_i \in W_i$ $i = 1, 2$ vektorokra.

De w_1 kifejezhető W_1 bázisával w_2 pedig W_2 bázisával. Tehát v az $\{e_1, \dots, e_2, f_1, \dots, f_2\}$ vektorok lineáris kombinációjaként előáll, tehát ez a vektorhalmaz V -ben generátorrendszer, és így bázis is.

Ebből $\dim V = k + l = \dim W_1 + \dim W_2$.

12.12 Definíció: Legyen V vektortér, $W \leq V$ altér. Egy $W_1 \leq V$ alteret W *direkt kiegészítőjének* nevezzük, ha $V = W \oplus W_1$.

12.13 Tétel: Legyen V véges dimenziós vektortér. Ekkor minden $W \leq V$ alternak van direkt kiegészítője. A direkt kiegészítő nem egyértelmű, dimenziója viszont az.

Bizonyítás: Vegyünk a W altérben egy $e_1, \dots, e_k$ bázist. A 7.15 Tétel szerint ez kiegészíthető V egy $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ bázisává. Legyen $W_1 = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$. Ekkor $V = W + W_1$, hiszen minden $v \in V$ vektorra $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^n \beta_i e_i$ alkalmas α_i, β_i skalárokkal. Így $v \in W + W_1$. Ha $0 \neq x \in W \cap W_1$, akkor $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i = \sum_{i=k+1}^n \beta_i e_i$ alkalmas α_i, β_i skalárokkal, amelyek nem mind nullák. Így $\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i - \sum_{i=k+1}^n \beta_i e_i = 0$ nemtriviális lineáris kombináció, amely ellentmond $\{e_1, \dots, e_n\}$ függetlenségének. Így $W \cap W_1 = \{0\}$.

Tehát $V = W \oplus W_1$. Az előző tételből látjuk, hogy $\dim W_1 = \dim V - \dim W$.

A direkt kiegészítő nem egyértelmű. Például $\mathbb{R}^2$ -ben az x tengely által meghatározott altér direkt kiegészítője tetszőleges origón átmenő, x tengelytől különböző egyenes.

12.14 Definíció: Egy $W \leq V$ altér *kodimenziójának* nevezzük a $\dim V - \dim W$ számot.

Az 1 kodimenziós altereket *hipersíkoknak* nevezzük.

12.15 Definíció. Legyenek $V_1, \dots, V_k$ vektorterek F test felett. A $V_1, \dots, V_k$ vektorterek *direkt szorzatának* nevezzük és $V_1 \times \dots \times V_k$ -val jelöljük azt a vektorteret, amelynek alaphalmaza a $V_1 \times \dots \times V_k = \{(v_1, \dots, v_k) | v_i \in V_i, i = 1, \dots, k\}$. Descartes-szorzat halmaz, a műveleteket pedig komponensenként végezzük, azaz

$$(v_1, \dots, v_k) + (v'_1, \dots, v'_k) = (v_1 + v'_1, \dots, v_k + v'_k)$$

$$\lambda(v_1, \dots, v_k) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_k)$$

(Könnyen látható, hogy a vektortéraxiómák teljesülnek).

12.16 Példa:

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}}_n, \quad \mathbf{C}^n = \underbrace{\mathbf{C} \times \dots \times \mathbf{C}}_n, \quad GF(P)^n = \underbrace{GF(p) \times \dots \times GF(p)}_n$$

12.17 Feladat: Legyen $V = V_1 \times V_2$. Bizonyítsuk be, hogy $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$. Konstruáljuk meg V egy bázisát, ha adott V_1 -nek egy $e_1, \dots, e_k$ V_2 -nek egy $f_1, \dots, f_l$ bázisa!

12.18 Definíció: Legyen V vektortér, $W \leq V$ altér. V/W -vel jelöljük és V -nek W altér szerinti faktorterének nevezzük azt a vektorteret, amelynek alaphalmaza V ekvivalencia osztályai (mod W). Egy v_1 és egy v_2 vektort (mod W) ekvivalensnek nevezünk, ha különbségük W -beli. Ezt $v_1 \equiv v_2 \pmod{W}$ -vel jelöljük. A műveleteket az ekvivalencia osztályok reprezentáns elemeivel végezzük és ahova az eredmény esik, azt az osztályt nevezzük a művelet eredményének.

12.19 Megjegyzés: A fenti reláció V -n ekvivalenciareláció. A_i műveletek eredménye független a reprezentáns elem választásától: ha $v_1 \equiv v_2 \pmod{W}$ és $v'_1 \equiv v'_2 \pmod{W}$, akkor $(v_1 + v'_1) - (v_2 + v'_2) = (v_1 - v_2) + (v'_1 - v'_2) \in W$, tehát $v_1 + v'_1 \equiv v_2 + v'_2 \pmod{W}$. $\lambda v_1 - \lambda v_2 = \lambda(v_1 - v_2) \in W$, tehát $\lambda v_1 \equiv \lambda v_2 \pmod{W}$.

Az is könnyen látható, hogy V/W -re a vektortéraxiómák teljesülnek.

V/W elemei tulajdonképpen a W altér eltoltjai, azaz $V/W = \{v + W | v \in V\}$.

12.20 Példa: Legyen $v \in \mathbf{R}^3$ $W = \text{az } (x, y)\text{-sík}$.

Ekkor V/W elemei az (xy) síkkal párhuzamos síkok.

12.21 Tétel: Legyen $\dim V = n$, $W \leq V$ altér, melyre $\dim W = k$. Ekkor $\dim V/W = n - k$.

Bizonyítás: Legyen $\{e_1, \dots, e_k\}$ W -nek egy bázisa. Egészítsük ki ezt V -nek egy $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ bázisává. Azt állítjuk, hogy $e_{k+1}, \dots, e_n$ ekvivalencia osztályai V/W -nek egy bázisát adja.

Tegyük fel, hogy ezeknek egy lineáris kombinációja a faktortérben nulla. Ez azt jelenti, hogy $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i \in W$.

De ekkor ez kifejezhető $\{e_1, \dots, e_k\}$ -val, tehát $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^k \beta_i e_i$, azaz $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^k \beta_i e_i = 0$. Tehát minden együttható nulla. Így $e_{k+1}, \dots, e_n \pmod{W}$ független.

Azt állítjuk, hogy $\underline{e}_{k+1}, \dots, \underline{e}_n$ ekvivalencia osztályai V/W -ben generátorrendszert alkotnak.

Legyen $\underline{v} \in V/W$ egy ekvivalencia osztályának reprezentáns eleme. Ekkor $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{e}_i + \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{e}_i$ alkalmas α_i, β_i skalárokra.

Tehát $\underline{v} \equiv \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{e}_i \pmod{W}$.

12.22 Megjegyzés: A faktortér konstrukciót gyakran használják a dimenzióra vonatkozó indukcióval történő bizonyításoknál.

12.23 Definíció: Legyenek V_1, V_2 vektorterek az F test felett. Egy $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezést (homogén) *lineáris operátornak* nevezünk, ha $\varphi(\underline{v} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}) + \varphi(\underline{w})$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V_1$ esetén, $\varphi(\lambda \underline{v}) = \lambda \varphi(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in V_1$ és $\forall \lambda \in F$ esetén teljesül. Ha $V_1 = V_2$, akkor (homogén) *lineáris transzformációról* beszélünk.

Ha a φ lineáris operátor kölcsönösen egyértelmű, akkor φ -t *vektortérizomorfizmusnak* nevezzük, ha emellett $V_1 = V_2$, akkor *invertálható lineáris transzformációról* beszélünk.

12.24 Példa:

- (i) Legyen a $\varphi : \mathbf{R}[x] \rightarrow \mathbf{R}[x]$ leképezés olyan, hogy $p(x)$ -hez annak $p'(x)$ deriváltját rendeli hozzá. Ekkor φ lineáris transzformáció.
- (ii) Legyen $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ az a leképezés, amely egy $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ vektorhoz az $\underline{A} \cdot \underline{x}$ vektort rendeli hozzá egy rögzített $\underline{A} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ mátrix esetén. Ekkor φ lineáris operátor.
- (iii) $\mathbf{R}^3$ -ban egy origón átmenő síkra (egyenesre) való tükrözés, vetítés $\mathbf{R}^3$ -nak lineáris transzformációi.
- (iv) $\mathbf{R}^3$ -ban egy origón átmenő tengely körüli elforgatás, vagy a tengely irányában vett nyújtás $\mathbf{R}^3$ -nak lineáris transzformációi.
- (v) $\mathbf{R}^3$ -ban az origó középpontú centrális nyújtás $\mathbf{R}^3$ -nak lineáris transzformációja.
- (vi) Nem origón átmenő síkra (egyenesre) való tükrözés, vetítés, nem origón átmenő tengely körüli elforgatás nem homogén lineáris transzformáció $\mathbf{R}^3$ -ban. (Ezeket szokásos affin transzformációknak vagy inhomogén lineáris transzformációknak hívni).

(vii) Legyen V tetszőleges vektortér. Legyen $\text{id}_V : V \rightarrow V$ leképezés, amelyre $\text{id}_V(\underline{v}) = \underline{v}$, minden $\underline{v} \in V$ esetén. Ezt a V vektortér *identikus leképezésének* nevezzük. Ez V -nek invertálható lineáris transzformációja.

(viii) Legyenek V_1, V_2 tetszőleges vektorterek $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ egy olyan leképezés, amelyre $\varphi(\underline{v}) = \underline{0}_{V_2}$ minden $\underline{v} \in V_1$ esetén. Ekkor φ lineáris operátor. Ezt az *azonosan nulla leképezésnek* hívjuk és 0-val jelöljük.

12.25 Megjegyzés: Ha $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor, akkor $\varphi(\underline{0}_{V_1}) = \underline{0}_{V_2}$ és $\varphi(-\underline{v}) = -\varphi(\underline{v})$ minden $\underline{v} \in V_1$ esetén.

Bizonyítás: $\varphi(\underline{0}_{V_1}) = \varphi(0 \cdot \underline{0}_{V_1}) = 0\varphi(\underline{0}_{V_1}) = \underline{0}_{V_2}$. $\varphi(-\underline{v}) = \varphi((-1)\underline{v}) = (-1)\varphi(\underline{v}) = -\varphi(\underline{v})$.

12.26 Megjegyzés: Ha $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ vektortérizomorfizmus, akkor létezik egy olyan $\varphi^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ leképezés, amelyre $\varphi^{-1}\varphi = \text{id}_{V_1}$ és $\varphi\varphi^{-1} = \text{id}_{V_2}$ és φ^{-1} is vektortérizomorfizmus.

Bizonyítás: Mivel φ kölcsönösen egyértelmű minden $\underline{v}_2 \in V_2$ vektorhoz létezik egyetlen olyan $\underline{v}_1 \in V_1$ vektor, melyre $\varphi(\underline{v}_1) = \underline{v}_2$. Így $\varphi^{-1}(\underline{v}_2) = \underline{v}_1$ egyenlőséggel egy $V_2 \rightarrow V_1$ leképezést definiáltunk, amelyre $\varphi^{-1}\varphi = \text{id}_{V_1}$ és $\varphi\varphi^{-1} = \text{id}_{V_2}$. Tehát φ^{-1} is kölcsönösen egyértelmű. Belátjuk, hogy φ^{-1} művelettartó is.

Ha $\underline{v}, \underline{w} \in V_2$ azt állítjuk, hogy $\varphi^{-1}(\underline{v} + \underline{w}) = \varphi^{-1}(\underline{v}) + \varphi^{-1}(\underline{w})$.

Alkalmazzuk φ leképezést a baloldali és jobboldali kifejezésre is. Ekkor a $\varphi(\varphi^{-1}(\underline{v} + \underline{w})) = \underline{v} + \underline{w}$ és a $\varphi(\varphi^{-1}(\underline{v}) + \varphi^{-1}(\underline{w})) = \varphi(\varphi^{-1}(\underline{v})) + \varphi(\varphi^{-1}(\underline{w})) = \underline{v} + \underline{w}$ egyenlőségeket kapjuk. Mivel φ injektív $\varphi^{-1}(\underline{v} + \underline{w}) = \varphi^{-1}(\underline{v}) + \varphi^{-1}(\underline{w})$.

Hasonlóan látható be, hogy $\varphi^{-1}(\lambda \underline{v}) = \lambda(\varphi^{-1}(\underline{v}))$ $\forall \underline{v} \in V_1$ esetén.

12.27 Definíció: Azt mondjuk, hogy V_1 és V_2 F test feletti vektorterek *izomorfak*, ha létezik egy $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ vektortérizomorfizmus. Ezt a tényt $V_1 \simeq V_2$ -vel jelöljük.

12.28 Példa: $\mathbf{R}_R^{n+1} \simeq \{p(x) \in \mathbf{R}[x] \mid \deg p(x) \leq n\} \mathbf{R}$.

Bizonyítás: A $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ -nel definiált leképezés vektortérizomorfizmus a két vektortér között.

12.29 Definíció: Legyenek V_1, V_2 F test feletti vektorterek. Ekkor azt a vektorteret, amelynek alaphalmaza a $\{\varphi \mid \varphi : V_1 \rightarrow V_2 \text{ lineáris operátor}\}$ halmaz és

Adja a műveletek $(\varphi_1 + \varphi_2)(\underline{v}) = \varphi_1(\underline{v}) + \varphi_2(\underline{v})$ és $(\lambda\varphi)(\underline{v}) = \lambda\varphi(\underline{v})$ egyenlőségekkel van definiálva, a V_1 -ből V_2 -be képező lineáris operátorok vektorterének nevezzük és $L(V_1, V_2)$ -vel jelöljük.

12.30 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy $L(V_1, V_2)$ -ben a vektortéraxiómák teljesülnek.

Ennek speciális esete, amikor V_2 -t F -nek, mint önmaga feletti vektortérnek választjuk. Ennek a vektortérnek a dimenziójával a következő fejezetben fogunk foglalkozni.

12.31 Definíció: Egy V_F vektortér *duális terének* hívjuk és V^* -gal jelöljük az (V, F) vektorteret. V^* elemeit V -n értelmezett *lineáris funkcionáloknak* hívjuk.

12.32 Példa:

- (i) A $p(x) \mapsto \int_a^b p(x)dx$ definícióval adott leképezés lineáris funkcionál $\mathbf{R}[x]$ -en
- (ii) Legyen $\underline{a} \in \mathbf{R}^3$ rögzített vektor. Ekkor a $\underline{v} \mapsto \underline{a}^T \underline{v} = \sum_{i=1}^3 a_i v_i$ leképezés, ($\underline{a}$ -val való skaláris szorzás) lineáris funkcionál az $\mathbf{R}^3$ vektortéren. (sőt az is igaz, hogy $\mathbf{R}^3$ duális terének minden eleme ilyen alakban áll elő)

12.32 Definíció: Legyenek $V_1, \dots, V_k$ vektorterek az F test felett. Az $V_1, \dots, V_k$ vektorterek *tenzorszorzatának* nevezzük és $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ -val jelöljük azt a vektorteret, amelynek alaphalmaza a $\sum \alpha_{i_1, \dots, i_k} \underline{v}_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{v}_{i_k}$ alakú formális kifejezések ekvivalencia osztályai, ahol $\alpha_{i_1, \dots, i_k} \in F$, $\underline{v}_{i_j} \in V_{j_i}$ és két kifejezés ekvivalens, ha a következő átalakítások sorozatával kaphatók egymásból.

- (i) $\lambda(\underline{v}_1 \otimes \dots \otimes \underline{v}_r) = \underline{v}_1 \otimes \dots \otimes \lambda \underline{v}_i \otimes \dots \otimes \underline{v}_k \quad i = 1, \dots, k$
- (ii) $\underline{v}_1 \otimes \dots \otimes (\underline{v}_i + \underline{v}'_i) \otimes \dots \otimes \underline{v}_r = \underline{v}_1 \otimes \dots \otimes \underline{v}_i \otimes \dots \otimes \underline{v}_k + \underline{v}_1 \otimes \dots \otimes \underline{v}'_i \otimes \dots \otimes \underline{v}_k$
ahol $\lambda \in F$, $\underline{v}_1 \in V_1, \dots, \underline{v}_i, \underline{v}'_i \in V_i, \dots, \underline{v}_k \in V_k \quad i = 1, \dots, k$.

A fenti kifejezések összeadása azt jelenti, hogy az új tagokat egy $+$ jel után hozzáírjuk a régiékhöz. Skalárral úgy szorzunk egy ilyen kifejezést, hogy az együtthatókat beszorozzuk.

12.34 Tétel: Legyenek $V_1, \dots, V_k$ F test feletti vektorterek. $\dim V_1 \otimes \dots \otimes V_k = \prod_{i=1}^k \dim V_i$.

Bizonyítás: $k = 2$ esetben bizonyítunk. Legyen V_1 egy bázisa a $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$. V_2 egy bázisa $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\}$.

Azt állítjuk, hogy $V_1 \otimes V_2$ -nek az $\{\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j\} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$ vektorok bázisát alkotják.

Legyen $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{f}_j = \underline{0}$. Ekkor $\sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \underline{e}_i) \otimes \underline{f}_j = \underline{0}$.

Mivel $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m$ függetlenek, ez csak akkor lehetséges, ha $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \underline{e}_i = \underline{0}, \quad j = 1, \dots, m$. De $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ függetlensége miatt $\alpha_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$. Tehát $\{\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j\} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$ független vektorrendszer.

Legyen $\underline{v} \otimes \underline{w} \in V_1 \otimes V_2$. Ekkor $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i, \quad \underline{w} = \sum_{j=1}^m \beta_j \underline{f}_j$, alkalmas $\alpha_i, \beta_j \in F \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$ együtthatókra.

Igy $\underline{v} \otimes \underline{w} = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \underline{e}_i \otimes \underline{f}_j$. Mivel $V_1 \otimes V_2$ minden elemének minden reprezentánsa $\underline{v} \otimes \underline{w}$ alakú vektorok lineáris kombinációja, így $\{\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j\} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$ generátorrendszer és így bázis is.

Tehát $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \cdot \dim V_2$.

12.36 Definíció: A V_F vektortér *p-szeresen kontravariáns és q-szorosan kovariáns tenzorainak* nevezzük a $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q$ vektortér elemeit.

A tenzorok tárgyalására a későbbiekben még visszatérünk.

13. Koordinátázás

A koordinátázás lehetővé teszi, hogy absztrakt vektortér vektorai helyett $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, F^n$ vektoraival számoljunk. Lineáris operátorok alkalmazása helyett pedig mátrixokkal szorozzunk.

Először bebizonyítjuk egy vektortér bázisainak egy fontos tulajdonságát.

13.1 Tétel: Legyen V egy vektortér az F test felett. Ha $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ V -ben egy bázis, akkor minden $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen állítható elő

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i \quad \alpha_i \in F \quad i = 1, \dots, n$$

alakban.

Bizonyítás: Mivel $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ generátorrendszer, ezért létezik $\underline{v}$ -nek ilyen előállítása.

Ha $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{e}_i$, ahol $\alpha_i, \beta_i \in F \quad i = 1, \dots, n$, akkor $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \underline{e}_i = \underline{0}$ és mivel $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ független vektorrendszer $\alpha_i - \beta_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$, azaz $\alpha_i = \beta_i \quad i = 1, \dots, n$. Tehát $\underline{v}$ fenti típusú előállítása egyértelmű.

13.2 Definíció: Legyen V egy F test feletti vektortér, $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \subset V$ egy bázis V -ben. Egy $\underline{v} \in V$ vektor $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázisra vonatkozó koordinátavektorának nevezzük és $[\underline{v}]$ -nevezzük és csal jelöljük az

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n \text{ vektort, ha } \underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i.$$

13.3 Példa: Az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

vektor koordinátavektora a

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisban

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13.4 Tétel: Egy V_F vektortér $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázisra vonatkozó koordinátavektoraira teljesül

- (i) $[\underline{v} + \underline{w}] = [\underline{v}] + [\underline{w}] \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ esetén
- (ii) $[\lambda \underline{v}] = \lambda [\underline{v}] \quad \forall \underline{v} \in V$ és $\forall \lambda \in F$ esetén
- (iii) a $\underline{v} \rightarrow [\underline{v}]$ leképezés bijekció V és F^n között.

Tehát a $\underline{v} \rightarrow [\underline{v}]$ leképezés V és F^n között vektortérizomorfizmus.

Bizonyítás:

(i) Legyen $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i$, $\underline{w} = \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{e}_i$

$$[\underline{v}] + [\underline{w}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = [\underline{v} + \underline{w}]$$

(ii)

$$\lambda [\underline{v}] = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n \end{pmatrix} = [\lambda \underline{v}]$$

(iii) A $\underline{v} \rightarrow [\underline{v}]$ leképezés injektív, mert ha $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i$ és $\underline{w} = \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{e}_i$ és $\underline{v} \neq \underline{w}$, akkor létezik olyan $1 \leq i \leq n$, hogy $\alpha_i \neq \beta_i$, tehát $[\underline{v}] \neq [\underline{w}]$.

A leképezés szürjektív is, hiszen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n$$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i$ vektor képe.

13.5 Következmény: Minden F test feletti n dimenziós vektortér F^n -nel izomorf.

13.6 Definíció: Legyenek V_1 és V_2 F test feletti vektorterek. Legyen $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ V_1 -nek $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\}$ V_2 -nek egy bázisa. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ egy lineáris operátor. $[\varphi]$ -vel jelöljük és φ -nek az $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\}$ bázispárra vonatkozó koordinátamátrixának nevezzük azt az $M_{m \times n}[F]$ -beli mátrixot, amelynek oszlopvektorai $\varphi(\underline{e}_1), \dots, \varphi(\underline{e}_n)$ az $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\}$ bázisra vonatkozó koordinátavektorai, azaz

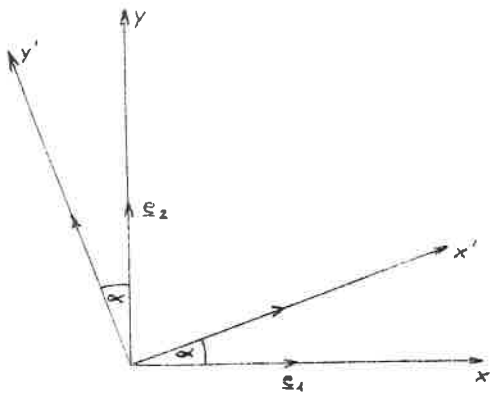
$$[\varphi] = [[\varphi(\underline{e}_1)], \dots, [\varphi(\underline{e}_n)]]$$

Ha $V_1 = V_2$, akkor az $\underline{e}_i = \underline{f}_i$ $i = 1, \dots, n$ választás a szokásos.

13.7 Példa: Legyen $V_1 = V_2 = \mathbf{R}^2$, $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázis $\mathbf{R}^2$ -ben. A $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ lineáris operátor legyen az origó körüli $+\alpha$ szögű elforgatás.

Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{e}_1) &= \cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2 \\ \varphi(\underline{e}_2) &= -\sin \alpha \underline{e}_1 + \cos \alpha \underline{e}_2 \end{aligned}$$



9. ábra

Az elforgatás $[\varphi]$ mátrixa az $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ bázisban:

$$\begin{matrix} & \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \\ \underline{e}_1 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \underline{e}_2 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{matrix}$$

10. ábra

Felmerül a kérdés, hogy mennyire szabadon lehet megadni egy lineáris operátort. Erre ad választ a következő tétel.

13.8 Tétel: Egy lineáris operátor bázison előírható, azaz, ha a V_1, V_2 F test feletti vektorterek, $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \subset V_1$ egy bázis és $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \subset V_2$ egy tetszőleges V_2 -beli vektorrendszer, akkor létezik egyetlen olyan $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor, amelyre $\varphi(\underline{e}_i) = \underline{v}_i$ $i = 1, \dots, n$.

Bizonyítás: Először az egyértelműséget bizonyítjuk.

Ha létezik a fenti tulajdonságokkal rendelkező $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor, akkor $\varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$, tehát V_1 minden vektorának képe egyértelműen meghatározott, azaz csak egy ilyen φ lehet.

Definiáljuk ezért a φ leképezést úgy, hogy $\varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$.

Ekkor φ lineáris operátor, hiszen, ha $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i$ és $\underline{w} = \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{e}_i$, akkor $\varphi(\underline{v} + \underline{w}) = \varphi(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \underline{v}_i = \varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i) + \varphi(\sum_{i=1}^n \beta_i \underline{e}_i) = \varphi(\underline{v}) + \varphi(\underline{w})$ és

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \underline{v}) &= \varphi(\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i) = \varphi(\sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i \underline{v}_i = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i = \lambda \varphi(\underline{v}). \end{aligned}$$

A következő tétel a koordinátamátrix bizonyos tulajdonságairól szól.

13.9 Tétel: Legyenek V_1, V_2 F test feletti vektorterek, és $\varphi, \psi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátorok. Legyen $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \subset V_1$ és $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\} \subset V_2$ egy-egy bázis.

Ekkor φ és ψ fenti bázispárbeli $[\varphi]$, $[\psi]$ koordinátamátrixaira a következő tulajdonságok teljesülnek.

(i) $[\varphi + \psi] = [\varphi] + [\psi]$

(ii) $[\lambda \varphi] = \lambda [\varphi]$

(iii) a $\varphi \mapsto [\varphi]$ leképezés bijekció $L(V_1, V_2)$ vektortér és $M_{m \times n}(F)$ között.

Tehát a $\varphi \mapsto [\varphi]$ leképezés $L(V_1, V_2)$ és $M_{m \times n}(F)$ között vektortérizomorfizmus.

Ezen kívül teljesül még

(iv) $[\varphi(\underline{v})] = [\varphi][\underline{v}] \quad \forall \underline{v} \in V_1$ esetén

azaz a φ leképezésnek az F^n vektortér vektorainak $[\varphi]$ mátrixszal való szorzása felel meg.

Bizonyítás:

(i) $[\varphi + \psi]$ definíciójából indulunk ki,

$$[(\varphi + \psi)(\underline{e}_1)], \dots, [(\varphi + \psi)(\underline{e}_n)] = [[\varphi(\underline{e}_1) + \psi(\underline{e}_1)], \dots, [\varphi(\underline{e}_n) + \psi(\underline{e}_n)]]$$

Ez a 13.4 Tétel (i) szerint a következővel egyenlő

$$\begin{aligned} &= [[\varphi(\underline{e}_1)] + [\psi(\underline{e}_1)], \dots, [\varphi(\underline{e}_n)] + [\psi(\underline{e}_n)]] = [[\varphi(\underline{e}_1)], \dots, [\varphi(\underline{e}_n)]] + [[\psi(\underline{e}_1)], \dots, \\ &= [\varphi] + [\psi] \end{aligned}$$

(ii) $[\lambda \varphi]$ definíciójából indulunk ki,

$$[\lambda \varphi] = [[(\lambda \varphi)(\underline{e}_1)], \dots, [(\lambda \varphi)(\underline{e}_n)]] ,$$

amely a 13.4 Tétel (ii) szerint a következővel egyenlő

$$= [\lambda \varphi(\underline{e}_1)], \dots, [\lambda \varphi(\underline{e}_n)] = \lambda [\varphi(\underline{e}_1)], \dots, [\varphi(\underline{e}_n)] = \lambda [\varphi] .$$

(iii) Először az injektivitást látjuk be. Ha $\varphi \neq \psi \in L(V_1, V_2)$, és $[\varphi] = [\psi]$ lenne, akkor $[\varphi(\underline{e}_i)] = [\psi(\underline{e}_i)]$ $i = 1, \dots, n$.

A 13.4 Tétel (iii) pontja szerint ebből $\varphi(\underline{e}_i) = \psi(\underline{e}_i)$ $i = 1, \dots, n$ következik. A 13.8 Tétel szerint viszont ebből $\varphi = \psi$ következik. Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$ mátrix. Konstruáljunk egy olyan $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátort, amelyre $[\varphi] = \underline{A}$. A 13.8 Tétel szerint elég φ -t megadni az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bázison.

Legyen $\varphi(\underline{e}_i) = a_{i1} \underline{f}_1 + \dots + a_{im} \underline{f}_m$, $i = 1, \dots, n$

Ekkor $[\varphi] = \underline{A}$, tehát a $\varphi \mapsto [\varphi]$ leképezés szürjektív.

(v) Legyen $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i$. Ekkor $\varphi(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\underline{e}_i)$. A 13.4 Tétel szerint

$$[\varphi(\underline{v})] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [\varphi(\underline{e}_i)] = [[\varphi(\underline{e}_1)], \dots, [\varphi(\underline{e}_n)]] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [\varphi][\underline{v}]$$

Mielőtt rátérnénk a koordinátamátrix további tulajdonságaira, megismerkedünk a lineáris operátorokhoz kapcsolódó két fontos altérrel.

13.10 Definíció: Legyenek V_1, V_2 F test feletti vektorterek, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor. φ *magterének* nevezzük és $\text{Ker } \varphi$ -vel jelöljük V_1 -nek a következő részhalmazát:

$$\text{Ker } \varphi = \{\underline{v} \in V_1 \mid \varphi(\underline{v}) = \underline{0}_{V_2}\}$$

φ *képterének* nevezzük. Es $\text{Im } \varphi$ -vel jelöljük V_2 -nek a következő részhalmazát.

$$\text{Im } \varphi = \{\underline{v} \in V_2 \mid \exists \underline{u} \in V_1 : \varphi(\underline{u}) = \underline{v}\}$$

13.10 Tétel: Legyenek V_1, V_2 F test feletti vektorterek, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor.

Ekkor $\text{Ker } \varphi \leq V_1$ altér és $\text{Im } \varphi \leq V_2$ altér.

Ezen kívül φ pontosan akkor injektív, ha $\text{Ker } \varphi = \{\underline{0}_{V_1}\}$, és φ pontosan akkor szürjektív, ha $\text{Im } \varphi = V_2$.

Bizonyítás: $\text{Ker } \varphi \neq \emptyset$ hiszen a 12.25 Megjegyzés szerint $\underline{0}_{V_1} \in \text{Ker } \varphi$. Belátjuk, hogy $\text{Ker } \varphi$ zárt a V_1 -beli műveletekre.

Ha $\underline{v}, \underline{w} \in \text{Ker } \varphi$, akkor $\varphi(\underline{v} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}) + \varphi(\underline{w}) = \underline{0}_{V_2} + \underline{0}_{V_2} = \underline{0}_{V_2}$, tehát $\underline{v} + \underline{w} \in \text{Ker } \varphi$ szintén teljesül.

$$\varphi(\lambda \underline{v}) = \lambda \varphi(\underline{v}) = \lambda \underline{0}_{V_2} = \underline{0}_{V_2}.$$

Könnyen látható, hogy $\text{Ker } \varphi$ -re a vektortéraxiómák teljesülnek, így $\text{Ker } \varphi \leq V_1$ altér.

$\text{Im } \varphi \neq \emptyset$, hiszen $\underline{0}_{V_2} = \varphi(\underline{0}_{V_1})$, ezért $\underline{0}_{V_2} \in \text{Im } \varphi$. Belátjuk, hogy $\text{Im } \varphi$ zárt a V_2 -beli műveletekre is.

Ha $\underline{v}, \underline{w} \in \text{Im } \varphi$, akkor $\underline{v} = \varphi(\underline{u})$, $\underline{w} = \varphi(\underline{s})$ alkalmas $\underline{u}, \underline{s} \in V_1$ vektorokra. Így $\underline{v} + \underline{w} = \varphi(\underline{u}) + \varphi(\underline{s}) = \varphi(\underline{u} + \underline{s})$, tehát $\underline{v} + \underline{w} \in \text{Im } \varphi$. $\lambda \underline{v} = \lambda \varphi(\underline{u}) = \varphi(\lambda \underline{u})$, tehát $\lambda \underline{v} \in \text{Im } \varphi$.

Könnyen látható, hogy $\text{Im } \varphi$ -re a vektortéraxiómák teljesülnek, így $\text{Im } \varphi \leq V_2$ altér.

Ha φ injektív, és $\underline{v} \in \text{Ker } \varphi$, akkor $\varphi(\underline{0}_{V_1}) = \varphi(\underline{v}) = \underline{0}_{V_2}$ miatt $\underline{0}_{V_1} = \underline{v}$, azaz $\text{Ker } \varphi = \{\underline{0}_{V_1}\}$.

Ha $\text{Ker } \varphi = \{\underline{0}_{V_1}\}$ és $\varphi(\underline{u}) = \varphi(\underline{s})$, valamely $\underline{u}, \underline{s} \in V_1$ vektorokra, akkor $\varphi(\underline{u} - \underline{s}) = \underline{0}_{V_2}$, tehát $\underline{u} - \underline{s} \in \text{Ker } \varphi$. Így $\underline{u} - \underline{s} = \underline{0}_{V_1}$, azaz $\underline{u} = \underline{s}$, vagyis φ injektív.

A szürjektivitásról szóló állítás azonnal következik a definícióból.

13.11 Példa:

(i) Legyen a $\varphi : \mathbf{R}[x] \rightarrow \mathbf{R}[x]$ lineáris operátor a deriválás. Ekkor

$$\text{Ker } \varphi = \{\text{konstans polinomok}\}$$

$$\text{Im } \varphi = \mathbf{R}[x].$$

(ii) Legyen $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ lineáris operátor az $\underline{A} \in M_{m \times n}[\mathbf{R}]$ mátrixszal való szorzás. Ekkor

$$\text{Ker } \varphi = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n \mid \underline{A}\underline{x} = \underline{0}\} =$$

$$= \{\text{az } \underline{A}\underline{x} = \underline{0} \text{ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai}\}$$

$$\text{Im } \varphi = \{\underline{b} \in \mathbf{R}^m \mid \exists \underline{x} \in \mathbf{R}^n : \underline{A}\underline{x} = \underline{b}\} =$$

$$= \{\underline{A} \text{ oszlopvektorainak összes lehetséges lineáris kombinációi}\} =$$

$$= \{\underline{A} \text{ oszlopvektorai által generált altér } \mathbf{R}^m\text{-ben}\}$$

Egy lineáris operátor fontos jellemzői a lineáris operátor rangja és nullítása.

13.12 Definíció: Legyenek V_1, V_2 F test feletti vektorterek, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor. φ *rangjának* nevezzük $\dim \text{Im } \varphi$ -t, *nullításának* nevezzük $\dim \text{Ker } \varphi$ -t.

13.13 Példa: A fenti (ii) példában φ rangja éppen az $\underline{A}$ mátrix rangja, nullítása pedig az $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterének dimenziója.

a 9.5 Tétel általánosításának tekinthető a következő tétel

13.14 Tétel: (Rang-nullítási tétel): Legyenek V_1, V_2 F test feletti véges dimenziós vektorterek; $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor.

Ekkor

$$\dim V_1 = \dim(\text{Ker } \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi)$$

Bizonyítás: Ha a φ lineáris operátor egy $\underline{A} \in M_{m \times n}[\mathbf{R}]$ mátrixszal való szorzás, akkor a $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ leképezésre a tétel állítása azt mondja ki, hogy

$$n = \dim \mathbf{R}^n = \{\underline{Ax} = 0 \text{ független megoldásainak száma}\} + r(\underline{A}).$$

Ezt a 9.5 Tételben bebizonyítottuk. Hasonló módon látható be arra az esetre is, ha $\varphi : F^n \rightarrow F^m$ egy $\underline{A} \in M_{m \times n}[F]$ mátrixszal való szorzás, ahol F tetszőleges test.

Ha $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor, akkor rögzített V_1 és V_2 -beli bázisban fölírva φ -nek egy $[\varphi]$ mátrixszal való szorzás felel meg, így az állítás a mátrixokra vonatkozó állításból következik.

A 13.11 Példa (i) pontja mutatja, hogy egy lineáris transzformáció lehet szürjektív anélkül, hogy injektív lenne. A következő eredményből viszont az következik, hogy ilyen eset véges dimenziós vektorterek esetén nem fordulhat elő.

13.15 Következmény: Legyenek V_1, V_2 F test feletti véges dimenziós vektorterek, melyekre $\dim V_1 = \dim V_2$. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor. Ekkor φ pontosan akkor injektív, ha szürjektív.

Bizonyítás: Ha φ injektív, akkor $\text{Ker } \varphi = \{0_{V_1}\}$, tehát $\dim \text{Ker } \varphi = 0$. A Rang-nullitási tételből $\dim V_2 = \dim V_1 = 0 + \dim \text{Im } \varphi$ következik. Ekkor $V_2 = \text{Im } \varphi$ is teljesül, hiszen véges dimenziós vektortér valódi alteréhez van direkt kiegészítő, így dimenziója határozottan kisebb, mint a vektortér dimenziója.

Ha φ szürjektív, akkor $\dim \text{Im } \varphi = \dim V_2 = \dim V_1$ miatt a Rang-nullitási tétel azt adja, hogy $\dim \text{Ker } \varphi = 0$, tehát $\text{Ker } \varphi = \{0_{V_1}\}$, azaz φ injektív.

13.16 Megjegyzés: Végtelen dimenziós térnek lehet vele azonos dimenziós altere, például $\mathbf{R}[x]$ -ben azon polinomok, amelyekben x -nek csak páros hatványai szerepelnek egy ilyen alteret ad.

13.17 Következmény: Legyenek V_1, V_2 F test feletti véges dimenziós vektorterek. Ekkor V_1 és V_2 pontosan akkor izomorf, ha a dimenzióik megegyeznek.

Bizonyítás: Ha $\dim V_1 = \dim V_2$, akkor a 13.5 Következmény szerint izomorfak. Ha V_1 és V_2 izomorf, akkor létezik egy $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ izomorfizmus. A Rang-nullitási tétel szerint $\dim V_1 = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = 0 + \dim V_2 = \dim V_2$. Tehát V_1 és V_2 azonos dimenziós vektorterek.

13.18 Megjegyzés: Egy V F test feletti n dimenziós vektortérnek bármely két bázisához létezik pontosan egy olyan lineáris transzformációja V -nek, amely az első bázis elemeit a második bázis elemeibe viszi. Ez vektortérizomorfizmus is.

Bizonyítás: Legyen $\{e_1, \dots, e_n\}$ és $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ V -nek két bázisa. A 13.1 Tétel szerint létezik egyetlen olyan φ lineáris transzformációja V -nek, amelyre $\varphi(e_i) = e'_i$, $i = 1, \dots, n$.

Azt állítjuk, hogy ez vektortérizomorfizmus. A 13.15 Következmény szerint elég azt belátni, hogy φ injektív.

Ha $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in \text{Ker } \varphi$ lenne, akkor $\varphi(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e'_i = 0$. De mivel $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ V -nek bázisa volt, ebből $\alpha_i = 0$ $i = 1, \dots, n$ következik. Így $v = 0$. Tehát φ injektív.

13.19 Definíció: Legyen V egy F test feletti vektortér. Legyen $\{e_1, \dots, e_n\}$ és $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ V -nek két bázisa. Ekkor azt az egyértelműen létező $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformációt, amelyre $\varphi(e_i) = e'_i$ $i = 1, \dots, n$ a fenti bázisokhoz tartozó báziscseretranszformációnak nevezzük.

Mielőtt tanulmányoznánk a báziscsere hatását a koordinátavektorokra és a koordinátamátrixokra, bebizonyítjuk a koordinátamátrix néhány további tulajdonságát.

13.20 Tétel: Legyen V F test feletti vektortér, $\varphi, \psi : V \rightarrow V$ lineáris transzformációk. Legyen $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ egy bázis.

Ekkor

$$(i) [\varphi\psi] = [\varphi][\psi]$$

$$(ii) [\text{id}_V] = I$$

(iii) Ha φ^{-1} létezik akkor $[\varphi]^{-1}$ is létezik és $[\varphi^{-1}] = [\varphi]^{-1}$. Ha $[\varphi]^{-1}$ létezik, akkor φ^{-1} is létezik.

Bizonyítás:

(i) A koordinátamátrix definíciójából indulunk ki.

$$[\varphi\psi] = [[(\varphi\psi)(e_1)], \dots, [(\varphi\psi)(e_n)]] = [[\varphi(\psi(e_1))], \dots, [\varphi(\psi(e_n))]]$$

Ez a 13.9 Tétel (iv) pontja szerint egyenlő a következővel

$$= [[\varphi][\psi(e_1)], \dots, [\varphi][\psi(e_n)]] = [\varphi][[\psi(e_1)], \dots, [\psi(e_n)]] = [\varphi][\psi]$$

(ii) A koordinátamátrix definíciójából világos.

(iii) Ha φ^{-1} létezik, akkor $\varphi\varphi^{-1} = \text{id}_V$. Ezért az előzőek alapján $[\varphi][\varphi^{-1}] = \underline{I}$, tehát $[\varphi]^{-1}$ létezik és egyenlő $[\varphi^{-1}]$ -gyel.

Ha $[\varphi]^{-1}$ létezik, akkor $[\varphi][\varphi]^{-1} = \underline{I} = [\varphi]^{-1}[\varphi]$. Legyen ψ egy olyan lineáris transzformáció V -n, amelynek a fenti bázisbeli koordinátamátrixa $[\varphi]^{-1}$. Ilyen ψ a 13.9 Tétel (iii) pontja szerint létezik. Ezért $[\varphi][\psi] = [\text{id}_V] = [\psi][\varphi]$, így ugyanezen tétel szerint $\varphi\psi = \text{id}_V = \psi\varphi$, tehát $\psi = \varphi^{-1}$.

13.21 Megjegyzés: Az előző tétel (i) pontjabeli állítás akkor is igaz, ha $\psi : V_1 \rightarrow V_2$, $\varphi : V_2 \rightarrow V_3$ lineáris operátorok, és mindhárom vektortérben adott egy-egy bázis $[\psi]$ és $[\varphi]$ pedig a megfelelő bázispárokra vonatkozó koordinátamátrixok.

Most megvizsgáljuk, hogy hogyan változik a koordinátavektor báziscsere esetén.

13.22 Tétel: Legyen V F test feletti vektortér $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \subset V$ egy bázis $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\} \subset V$ egy másik bázis.

Legyen $T : V \rightarrow V$ báziscseretranszformáció, melyre $T(\underline{e}'_i) = \underline{e}_i$. Jelölje $[\underline{v}]_{\text{régi}}, [\underline{v}]_{\text{új}}$ egy $\underline{v} \in V$ vektor koordinátavektorait az első és a második bázisban. Jelölje $[T]_{\text{régi}}$ a T lineáris transzformáció mátrixát az első bázisban. Ekkor

$$[\underline{v}]_{\text{új}} = [T]_{\text{régi}}^{-1}[\underline{v}]_{\text{régi}}$$

Bizonyítás: Legyen $[\underline{v}]_{\text{régi}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $[\underline{v}]_{\text{új}} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix}$. Ekkor $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i =$

$\sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \underline{e}'_i = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i T(\underline{e}_i)$. A koordinátavektor 13.4 Tételbeli tulajdonságait felhasználva ebből a következő egyenlőséget kapjuk:

$$[\underline{v}]_{\text{régi}} = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i [T(\underline{e}_i)]_{\text{régi}} = [[T(\underline{e}_1)]_{\text{régi}}, \dots, [T(\underline{e}_n)]_{\text{régi}}] \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix} = [T]_{\text{régi}}[\underline{v}]_{\text{új}}$$

Ebből a $[T]_{\text{régi}}^{-1}[\underline{v}]_{\text{régi}} = [\underline{v}]_{\text{új}}$ egyenlőséget kapjuk.

13.23 Példa: Legyen $x + xyz + yz^3 = 3$ egy felület egyenlete az

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisban felírva.

Fel szeretnénk írni e felület egyenletét a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bázisban.}$$

Legyen $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ az $\underline{i} \rightarrow \underline{v}_1$, $\underline{j} \rightarrow \underline{v}_2$, $\underline{k} \rightarrow \underline{v}_3$ báziscseretranszformáció.

Ekkor

$$[T]_{\text{régi}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Legyen egy $\mathbb{R}^3$ -beli pont koordinátavektora a régi bázisban

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

az új bázisban

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix},$$

tehát $x = \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z}$, $y = \tilde{y} - \tilde{z}$, $z = \tilde{x} + \tilde{y} - \tilde{z}$. Így a felület egyenlete az új bázisban

$$(\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z}) + (\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z})(\tilde{y} - \tilde{z})(\tilde{x} + \tilde{y} - \tilde{z}) + (\tilde{y} - \tilde{z})(\tilde{x} + \tilde{y} - \tilde{z})^3 = 3.$$

13.24 Megjegyzés: A fenti tételt úgy is szokták fogalmazni, hogy a V vektorterv elemeinek koordinátavektorai *kontravariánsan* változnak.

Most megvizsgáljuk, hogy hogyan változik egy lineáris transzformáció koordinátamátrixa báziscsere esetén.

13.25 Tétel: Legyen V egy F test feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Legyenek $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \subset V$ és $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\} \subset V$ bázisok és $T : V \rightarrow V$ báziscseretranszformáció, melyre $T(\underline{e}_i) = \underline{e}'_i$, $i = 1, \dots, n$. Jelölje $[\varphi]_{\text{régi}}, [\varphi]_{\text{új}}$ φ mátrixát a két bázisban és $[T]_{\text{régi}}$ T mátrixát a régi bázisban. Ekkor

$$[\varphi]_{\text{új}} = [T]_{\text{régi}}^{-1}[\varphi]_{\text{régi}}[T]_{\text{régi}}.$$

Bizonyítás: Jelölje $[v]_{\text{régi}}$ és $[v]_{\text{új}}$ egy $v \in V$ vektor koordinátavektorait a két bázisban.

A koordinátamátrix definíciója és az előző tétel alapján

$$[\varphi]_{\text{új}} = [[\varphi(e'_1)]_{\text{új}}, \dots, [\varphi(e'_n)]_{\text{új}}] = [[T]_{\text{régi}}^{-1}[\varphi(e'_1)]_{\text{régi}}, \dots, [T]_{\text{régi}}^{-1}[\varphi(e'_n)]_{\text{régi}}] =$$

$$= [T]_{\text{régi}}^{-1}[[\varphi(e'_1)]_{\text{régi}}, \dots, [\varphi(e'_n)]_{\text{régi}}] = [T]_{\text{régi}}^{-1}[[\varphi(T(e_1))]_{\text{régi}}, \dots, [\varphi(T(e_n))]_{\text{régi}}]$$

A 13.9 Tétel (iv) pontja szerint ez egyenlő a következővel

$$[T]_{\text{régi}}^{-1}[[\varphi]_{\text{régi}}[T(e_1)]_{\text{régi}}, \dots, [\varphi]_{\text{régi}}[T(e_n)]_{\text{régi}}] = [T]_{\text{régi}}^{-1}[\varphi]_{\text{régi}}[T]_{\text{régi}}.$$

13.26 Megjegyzés: Ha $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor és $T : V_1 \rightarrow V_1, S : V_2 \rightarrow V_2$ báziscsere transzformációk, akkor analóg módon igazolható, hogy

$$[\varphi]_{\text{új}} = [S]_{\text{régi}}^{-1}[\varphi]_{\text{régi}}[T]_{\text{régi}}$$

13.27 Megjegyzés: A fenti tételekben írhattunk volna $[T]_{\text{régi}}$ helyett $[T]_{\text{új}}$ -at is hiszen $[T]_{\text{új}} = [T]_{\text{régi}}^{-1}[T]_{\text{régi}}[T]_{\text{régi}} = [T]_{\text{régi}}$, azaz a báziscsere transzformáció mátrixa a régi és az új bázisban azonos.

Ha $F = \mathbf{R}$ és a báziscsere transzformáció mátrixa ortogonális mátrix, akkor az új koordinátamátrix könnyebben számolható, hiszen inverzképzés helyett csak transzponálni kell. Az ortogonális mátrixok könnyebb felismerése érdekében hasznos a következő tétel.

13.28 Tétel: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbf{R}]$ mátrixra a következő állítások ekvivalensek

- (i) $\underline{A}$ ortogonális mátrix ($\underline{A}^T = \underline{A}^{-1}$).
- (ii) Ha $\underline{A}$ oszlopvektorai $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$, akkor $(\underline{a}_i, \underline{a}_j) = \delta_{ij}$ (ahol δ_{ij} az ún. Kronecker-féle delta függvény, amelynek értéke 0, ha $i \neq j$ és 1, ha $i = j$)
- (iii) Ha $\underline{A}$ sorvektorai $\underline{s}_1^T, \dots, \underline{s}_n^T$, akkor $(\underline{s}_i, \underline{s}_j) = \delta_{ij}$.

Bizonyítás: (i) $\rightarrow$ (ii) A feltétel szerint $\underline{A}^T \underline{A} = \underline{I}$. A szorzatmátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $\underline{a}_i^T \underline{a}_j = (\underline{a}_i, \underline{a}_j)$. Másrészt az egység mátrix i -edik sorának j -edik eleme δ_{ij} . Így az állítás következik.

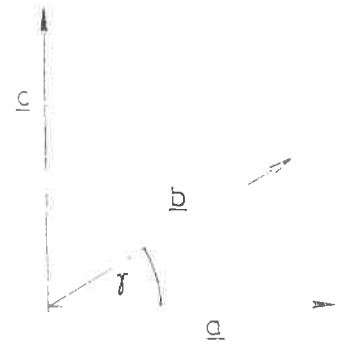
(ii) $\rightarrow$ (i) Az előző pont lépéseit fordított sorrendben végezve kapjuk az eredményt.

(i) $\rightarrow$ (iii) A feltétel szerint $\underline{A} \underline{A}^T = \underline{I}$. A szorzatmátrix i -edik sorának j -edik eleme épp $\underline{s}_i^T \underline{s}_j = (\underline{s}_i, \underline{s}_j)$. Másrészt ez az elem δ_{ij} . Tehát az állítás következik

(iii) $\rightarrow$ (i) Az előző pont lépéseit fordított sorrendben végezve kapjuk az eredményt.

13.29 Megjegyzés: A fenti tétel állításait úgy is szokták fogalmazni, hogy egy ortogonális mátrix sor-és oszlopvektorai *ortonormált vektorrendszert* alkotnak.

13.30 Definíció. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbf{R}^3$ vektorok. A $\underline{a}$ és $\underline{b}$ *vektoriális szorzatának* nevezzük és $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelöljük azt az $\mathbf{R}^3$ -beli $\underline{c}$ vektort, amelynek hossza az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma területe, iránya pedig az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok síkjára merőleges úgy, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok ún. "jobbrendszert" alkossanak (azaz $\underline{c}$ irányából nézve az $\underline{a}$ vektor pozitív irányban π -nél kisebb szöggel a $\underline{b}$ irányába forgatható).



11. ábra

$$|\underline{c}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \gamma$$

13.31 Tétel: Egy $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ vektorral való vektoriális szorzás egy lineáris

transzformáció az $\mathbb{R}^3$ vektortéren, melynek mátrixa az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban

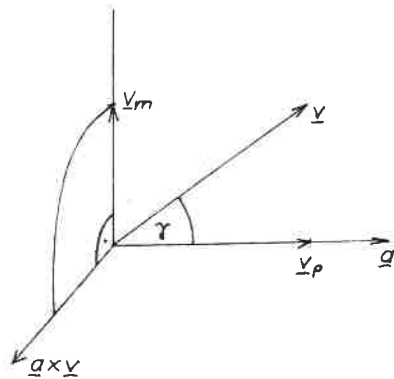
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Egy $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ vektor esetén $\underline{a} \times \underline{v} = \underline{i}(a_2v_3 - v_2a_3) - \underline{j}(a_1v_3 - v_1a_3) + \underline{k}(a_1v_2 - v_1a_2)$, amelyet úgy kaphatunk meg, hogy "kifejtjük" az

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

"determinánst".

Bizonyítás: $\underline{a} \times \underline{v}$ -t megkaphatjuk, ha $\underline{v}$ -t felbontjuk egy $\underline{a}$ irányú $\underline{v}_p$ és egy $\underline{a}$ -ra merőleges $\underline{v}_m$ komponensre. Ezután az $\underline{a}$ -ra merőleges komponens az $\underline{a}$ tengely körül pozitív irányban 90° -kal elforgatjuk és megszorozzuk $|\underline{a}|$ -kel



$$|\underline{v}_m| = |\underline{v}| \sin \gamma$$

12. ábra

A vektoriális szorzás ezen interpretációjából könnyen következik, hogy

$$\underline{a} \times (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{a} \times \underline{v} + \underline{a} \times \underline{w} \quad \text{és} \quad \underline{a} \times (\lambda \underline{v}) = \lambda(\underline{a} \times \underline{v}),$$

azaz az $\underline{a}$ vektorral való vektoriális szorzás lineáris operátor.

Könnyen látható, hogy $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$, így

$$(\underline{v} + \underline{w}) \times \underline{a} = \underline{v} \times \underline{a} + \underline{w} \times \underline{a} \quad \text{és} \quad (\lambda \underline{a}) \times \underline{v} = \lambda(\underline{a} \times \underline{v})$$

is teljesül.

Igy $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$, $\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$ esetén, felhasználva, hogy $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$ és $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$, kapjuk, hogy

$$\underline{a} \times \underline{v} = (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}) \times (v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}) = \underline{i}(a_2v_3 - a_3v_2) + \underline{j}(a_3v_1 - a_1v_3) + \underline{k}(a_1v_2 - a_2v_1),$$

amely éppen $\underline{Av}$. Ebből $\underline{Ai}$, $\underline{Aj}$, $\underline{Ak}$ értéke leolvasható.

13.32 Megjegyzés: A vektoriális szorzás további tulajdonságait lásd például a [FM-III] jegyzetben.

Most $\mathbb{R}^3$ néhány lineáris transzformációjának mátrixát határozzuk meg.

13.33 Példa:

(i) A z tengely körüli $+60^\circ$ -os elforgatás mátrixa $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Meg szeretnénk határozni a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ irányú origón átmenő tengely körüli $+60^\circ$ -os elforgatás mátrixát.

A feladatot visszavezetjük az előzőre. Áttérünk egy olyan ortonormált $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3$ bázisra, amely jobbrendszer és $\underline{e}'_3$ $\underline{v}$ irányába esik. Például

$$\underline{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}'_2 = \underline{e}'_3 \times \underline{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3$ az új koordinárendszer x', y', z' tengelyeit jelöli ki.

Ebben a bázisban a lineáris transzformációnk mátrixa

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{az (i) pont szerint.}$$

Legyen $\underline{A}$ a lineáris transzformációk mátrixát az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban, legyen $\underline{T}$ az $\underline{i} \rightarrow \underline{e}'_1, \underline{j} \rightarrow \underline{e}'_2, \underline{k} \rightarrow \underline{e}'_3$ báziscsere transzformáció mátrixa.

Ekkor

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ és } \underline{\tilde{A}} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T},$$

azaz $\underline{A} = \underline{T} \underline{\tilde{A}} \underline{T}^{-1}$. Mivel $\underline{T}$ ortogonális mátrix $\underline{A} = \underline{T} \underline{\tilde{A}} \underline{T}^T$. Így $\underline{A}$ a beszorzás elvégzésével meghatározható.

13.34 Megjegyzés: A fenti módszer alkalmazható tükrözés, vetítés nyújtás esetén is.

13.35 Definíció: Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$. Az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok hagyományos *skaláris szorzatának* nevezzük és $(\underline{a}, \underline{b})$ -vel jelöljük az $|\underline{a}||\underline{b}| \cos \gamma \in \mathbb{R}$ számot, ahol γ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által közbezárt szög.

13.34 Megjegyzés: Könnyen látható, hogy $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$, $(\underline{a}, \underline{a}) = 0$ pontosan akkor, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőleges egymásra. Ha $\underline{a}^0$ jelöli az $\underline{a}$ irányába eső egységnyi hosszúságú vektort, akkor $(\underline{b}, \underline{a}^0) \underline{a}^0$ éppen $\underline{b}$ vektornak $\underline{a}$ irányú vetülete. Ha a $\underline{b}$ vektort felbontjuk egy $\underline{a}$ -ra merőleges $\underline{b}_m$ egy $\underline{a}$ -val párhuzamos $\underline{b}_p$ összetevőkre, akkor $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{a}, \underline{b}_p)$. Ebből könnyen látható, hogy $(\underline{a}, (\underline{b} + \underline{c})_p) = (\underline{a}, \underline{b}_p) + (\underline{a}, \underline{c}_p)$ amiből $(\underline{a}, \underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{a}, \underline{c})$ és $(\underline{a}, \lambda \underline{b}) = \lambda (\underline{a}, \underline{b})$ következik. Ebből $(\underline{b} + \underline{c}, \underline{a}) = (\underline{b}, \underline{a}) + (\underline{c}, \underline{a})$ és $(\lambda \underline{a}, \underline{b}) = \lambda (\underline{a}, \underline{b})$ is levezethető az $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$ tulajdonság segítségével.

13.34 Tétel: A skaláris szorzat fenti definíciója megegyezik 4. fejezetbeli definícióval, $n = 3$ esetén.

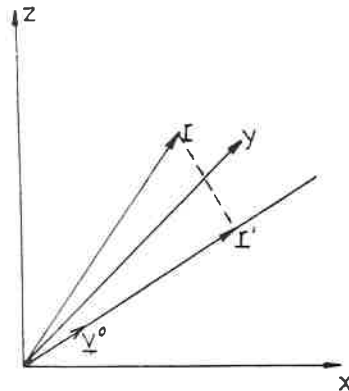
Bizonyítás: Legyen $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$ $\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$. Felhasználva, hogy $(\underline{i}, \underline{i}) = 1, (\underline{j}, \underline{j}) = 1, (\underline{k}, \underline{k}) = 1$ és $(\underline{i}, \underline{j}) = 0, (\underline{i}, \underline{k}) = 0, (\underline{j}, \underline{k}) = 0$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\underline{a}, \underline{b}) &= (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}, b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned}$$

A skaláris szorzat és a diadikus szorzat segítségével, egy másik módszerrel is meghatározhatjuk vetítés, tükrözés illetve nyújtás mátrixát.

13.35 Példa: Legyen $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a $\underline{v}$ irányú vektorú origón átmenő

egyenesre való vetítés mátrixát $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban.



13. ábra

Egy $\underline{r}$ vektor $\underline{v}$ irányú vetülete $\underline{r}' = (\underline{r}, \underline{v}^0) \underline{v}^0 = \underline{v}^0 (\underline{r}, \underline{v}^0) = \underline{v}^0 (\underline{v}^0, \underline{r}) = \underline{v}^0 (\underline{v}^{0T} \cdot \underline{r}) = (\underline{v}^0 \underline{v}^{0T}) \underline{r}$

Tehát a vetítés mátrixa

$$\underline{v}^0 \underline{v}^{0T} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 1 \quad 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

A báziscsere egy másik alkalmazása a görbék és felületek kanonikus alakra hozása, amelyhez szükségünk lesz a következő tételre, amelyet egyelőre bizonyítás nélkül közlünk.

13.36 Tétel (Főtengelytétel): Minden $\underline{A} \in M_n[\mathbb{R}]$ szimmetrikus mátrix sajátértékei valósak és létezik $\underline{A}$ -nak ortonormált sajátvektorrendszere $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$.

Legyen $\underline{M}$ az az ortogonális mátrix, amelynek oszlopvektorai $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$. Ekkor

$$\underline{M}^T \underline{A} \underline{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

diagonális mátrix, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek.

13.37 Példa: Egy másodrendű görbe egyenletének általános alakja:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

A koordinátarendszer alkalmas választásával megállapítható, hogy a görbe ellipszis, hiperbola, parabola, metsző egyenespár, kettős egyenes, párhuzamos egyenespár, pont vagy üres. Az $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrixot és a $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ vektort bevezetve a görbe mátrixegyenlettel adható meg:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \underline{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{b}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

Legyenek $\underline{A}$ sajátértékei λ_1, λ_2 , a hozzájuk tartozó egységsajátvektorok $\underline{s}_1, \underline{s}_2$.

Legyen $\underline{M}$ az a mátrix, amelynek oszlopvektorai $\underline{s}_1, \underline{s}_2$.

Ekkor $\underline{M}$ az $i \rightarrow \underline{s}_1, j \rightarrow \underline{s}_2$ báziscsere transzformáció mátrixa.

Ha $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pont koordinátái az $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ bázisban, akkor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{M} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$. Így a görbe egyenlete az új bázisban

$$(\underline{M} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix})^T \underline{A} \underline{M} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \underline{b}^T \underline{M} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + c = 0$$

azaz

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}^T \underline{M}^T \underline{A} \underline{M} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \underline{b}^T \underline{M} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + c = 0$$

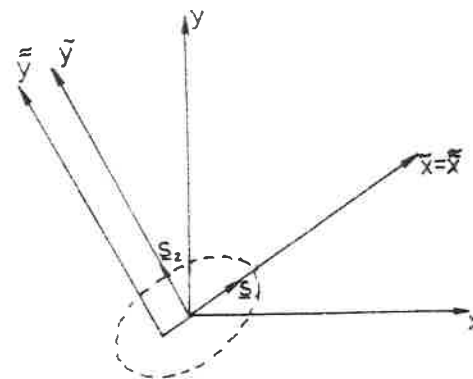
Az előző tétel szerint $\underline{M}^T \underline{A} \underline{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, tehát azt kapjuk, hogy egyenletünk

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + b'_1 \tilde{x} + b'_2 \tilde{y} + c = 0$$

alakú lesz.

Ebben szükség esetén $\tilde{x}$ -ben és $\tilde{y}$ -ban teljes négyzetté egészítünk ki, majd eltoljuk koordinátarendszert.

Például, ha $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, b'_1 = 1, b'_2 = 0, c = -1$, akkor az $\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 + \tilde{x} = 1$ egyenletből $\tilde{x}$ -ban teljes négyzetté alakítás után az $(\tilde{x} + \frac{1}{2})^2 + 2\tilde{y}^2 = \frac{3}{4}$ egyenletet kapjuk.



14. ábra

Bevezetve az $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{1}{2}, \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y}$ jelölést kapjuk, hogy

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1,$$

tehát egyenletünk ellipszis.

A koordinátarendszert tehát először $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ irányába forgattuk, utána eltoltuk.

Felületeknél analóg lépéseket kell tennünk 3 dimenzióban. A görbék és felületek lehetséges kanonikus alakjait lásd [FM-III]-ban.

14. Lineáris transzformációk további tulajdonságai

Az eddigiek során láttuk hogy egy vektortér lineáris transzformációit össze lehet adni, skalárral lehet szorozni, és két transzformációt össze lehet szorozni. Most polinomba fogjuk behelyettesíteni.

14.1 Definíció: Legyen V egy F test feletti vektortér $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in F[x]$ polinom. φ -nek a $p(x)$ polinomba való behelyettesítésének nevezzük és $p(\varphi)$ -vel jelöljük az $a_0\text{id}_V + a_1\varphi + \dots + a_n\varphi^n$ lineáris transzformációt. $p(x)$ φ -nek *anullálópolinomja*, ha $p(\varphi) = 0$.

14.2 Definíció: Legyen V egy a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. A φ lineáris transzformáció *karakterisztikus polinomjának* nevezzük, φ koordinátamátrixának karakterisztikus polinomját, φ *determinánsának* nevezzük φ koordinátamátrixának determinánsát. φ *minimálpolinomjának* nevezzük φ -nek minimális fokú anulálópolinomját.

14.3 Megjegyzés: A fenti definíció értelmes, hiszen φ különböző bázisbeli koordinátamátrixai hasonlóak és hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja és determinánsai megegyeznek. φ minimálpolinomja éppen φ mátrixának a minimálpolinomja.

14.4 Definíció: Legyen V egy a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Azt mondjuk, hogy egy $0 \neq v \in V$ vektor φ -nek $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértékéhez tartozó *sajátvektora*, ha $\varphi(v) = \lambda v$.

14.5 Tétel: Legyen V a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Egy $0 \neq v \in V$ vektor φ -nek pontosan akkor $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora, ha φ koordinátamátrixának, $[\varphi]$ -nek, v koordinátavektora $[v]$, λ sajátértékhez tartozó sajátvektora.

Bizonyítás: φ -nek v pontosan akkor λ -hoz tartozó sajátvektora, ha $v \neq 0$ és $\varphi(v) = \lambda v$. Ez ekvivalens azzal, hogy $[\varphi(v)] = [\lambda v]$ és $[v] \neq 0$, azaz $[\varphi][v] = \lambda[v]$

és $[v] \neq 0$. Amely pontosan azt jelenti, hogy $[\varphi]$ -nek $[v]$ λ sajátértékhez tartozó sajátvektora.

Láttuk, hogy egy lineáris transzformáció mátrixai hasonlóak. Ennek a megfordítása is igaz.

14.6 Tétel: Legyenek $\underline{A}, \underline{B} \in M_n[F]$ mátrixok hasonlóak és legyen $\underline{T} \in M_n[F]$ hasonlósági transzformáció, melyre $\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T} = \underline{B}$.

Ekkor ha V az F test feletti n -dimenziós vektortér és $\{e_1, \dots, e_n\}$ V -nek egy rögzített bázisa, akkor egyértelműen létezik egy $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció és egy $\tau : V \rightarrow V$ báziscseretranszformáció, amelyre $[\varphi]_{\text{rég}} = \underline{A}$, $[\varphi]_{\text{új}} = \underline{B}$, $[\tau] = \underline{T}$.

Bizonyítás: A 13.9 Tétel szerint létezik egyetlen olyan $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, amelynek mátrixa az $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázisban $\underline{A}$ és létezik egyetlen olyan $\tau : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, amelynek a mátrixa $\underline{T}$. Mivel $\underline{T}$ reguláris, a 13.20 Tétel szerint τ invertálható lineáris transzformáció.

Azt állítjuk, hogy $\{\tau e_1, \dots, \tau e_n\}$ V -ben bázis. Mivel $\dim V = n$, ezért elég azt belátni, hogy ez a vektorrendszer független, hiszen akkor már bázis is. Ha $\sum_{i=1}^n \alpha_i (\tau e_i) = 0$ valamely $\alpha_i \in F$ $i = 1, \dots, n$ esetén, akkor $\tau(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = 0$. De τ vektortérizomorfizmus, így $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$, és mivel $\{e_1, \dots, e_n\}$ független vektorrendszer, ezért $\alpha_i = 0$ $i = 1, \dots, n$. Tehát τ az $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\{\tau e_1, \dots, \tau e_n\}$ bázisokhoz tartozó báziscseretranszformáció. Ebben az utóbbi új bázisban $[\varphi]_{\text{új}} = [\tau]^{-1}[\varphi]_{\text{rég}}[\tau] = \underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T} = \underline{B}$.

14.7 Következmény: A mátrixok Jordan-féle normálakjáról szóló tételből következik, hogy ha φ egy V komplex számtest feletti véges dimenziós vektortér lineáris transzformációja, akkor létezik V -ben olyan bázis, amelyben φ mátrixa Jordan-féle normálakú.

Bizonyítás: Legyen $\underline{A} = [\varphi]$. A Jordan-féle normálakról szóló tétel szerint létezik olyan $\underline{T}$ reguláris mátrix, hogy $\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T} = \underline{J}$, ahol $\underline{J}$ Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix. Az előző tétel szerint létezik V -ben olyan bázis, amelyben $[\varphi] = \underline{J}$.

14.8 Definíció: Legyen V egy F test feletti vektortér $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Azt mondjuk, hogy V -nek egy W altere φ -nek *invariáns altere*, ha $\varphi(W) \subseteq W$.

14.9 Példa:

(i) Legyen V egy a komplex számtest feletti vektortér $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Legyen v φ -nek sajátvektora λ sajátértékkel. Ekkor

$$\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in C\}$$

φ -nek 1 dimenziós invariáns altere, ugyanis

$$\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v) = \alpha \lambda v \in \langle v \rangle,$$

minden $\alpha \in C$ esetén.

(ii) Legyen V egy a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Legyen λ_0 φ -nek egy sajátértéke. Ekkor φ -nek λ_0 -hoz tartozó sajátvektorai és a 0 vektor φ -nek egy invariáns alterét alkotják.

Ez épp $\text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \text{id}_V) = \{v \mid (\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)v = 0\}$. Ebből látszik, hogy állításunk helyes. Belátjuk, hogy φ -re invariáns. Ha $v \in \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)$, akkor $(\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)\varphi(v) = \varphi(\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)(v) = \varphi(0) = 0$, azaz $\varphi(v) \in \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)$, tehát ez az alter φ -re invariáns.

(iii) Legyen V , φ , λ_0 mint a (ii) pontban, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. A fentiekhez hasonlóan bebizonyítható, hogy $\text{Ker}((\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)^k)$ szintén φ -re invariáns alter és $\text{Ker}((\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)^k) \subseteq \text{Ker}((\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)^{k+1})$.

14.10 Definíció: Legyen V egy a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, λ_0 φ -nek egy sajátértéke. Ekkor a $\text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \text{id}_V) \subseteq V$ alteret λ_0 -hoz tartozó *sajátaltérnek*, $\bigcup_k (\text{Ker}((\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)^k)) \subseteq V$ alteret λ_0 -hoz tartozó *általánosított sajátaltérnek*, $\text{Ker}((\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)^k)$ nem 0 elemeit *legfeljebb k -indexű λ_0 -hoz tartozó általánosított sajátvektoroknak* $\text{Ker}((\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)^k) \setminus \text{Ker}((\varphi - \lambda_0 \text{id}_V)^{k-1})$ elemeit pedig pontosan k indexű λ_0 -hoz tartozó általánosított sajátvektoroknak nevezzük.

14.11 Feladat:

a) Legyen V egy a komplex számtest feletti vektortér $\varphi, \psi : V \rightarrow V$ lineáris transzformációk, amelyekre $\varphi\psi = \psi\varphi$. Bizonyítsuk be, hogy φ -nek λ_0 sajátértékhez tartozó sajátaltere ψ -nek invariáns altere.

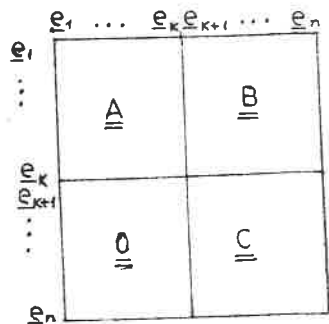
b.) Bizonyítsuk be, hogy φ -nek és ψ -nek a fenti feltételek mellett van közös sajátvektora.

c) Bizonyítsuk be, hogy V -nek akárhány páronként felcserélhető lineáris transzformációjának van közös sajátvektora.

Most megvizsgáljuk, hogy egy lineáris transzformáció invariáns altere, hogyan írható fel φ mátrixán.

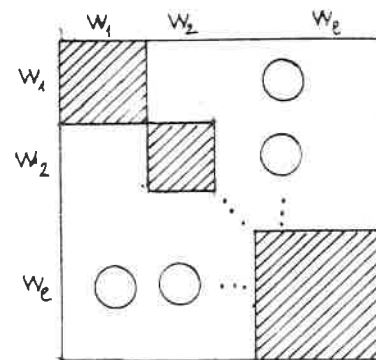
14.12 Megjegyzés:

Legyen V egy F test feletti vektortér $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció V -
 Legyen $W \leq V$ φ -re invariáns altér. Legyen $\{e_1, \dots, e_k\}$ W egy bázisa.
 Legyen $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ V egy bázisa. Ebben a bázisban φ mátrixa a következő alakú.



15. ábra

Ha $V = \bigoplus_{i=1}^l W_i$ és $W_i \leq V$ φ -re invariáns alterek $i = 1, \dots, l$, valamint V -nek egy olyan bázisát tekintjük amely a $W_1, \dots, W_l$ alterek bázisainak uniója, akkor ebben a bázisban φ mátrixa a következő alakú:



azaz blokkdiagonális.

16. ábra

(iii) Legyen V, W, φ mint az (i) pontban. Ekkor a V/W faktortéren értelmezhető egy $\bar{\varphi}$ lineáris operátor a következő módon: $\underline{v}$ ekvivalencia osztályához rendeljük $\varphi(\underline{v})$ ekvivalencia osztályát. Ez a definíció értelmes, hiszen, ha $\underline{v}_1 \equiv \underline{v}_2 \pmod{W}$, azaz $v_1 = v_2 + w$ alkalmas $w \in W$ -re, akkor $\varphi(v_1) = \varphi(v_2 + w) = \varphi(v_2) + \varphi(w)$. Mivel $\varphi(w) \in W$, ebből $\varphi(v_1) \equiv \varphi(v_2) \pmod{W}$ következik.

Az is könnyen látható, hogy $\bar{\varphi}$ lineáris operátor. Írjuk fel $\bar{\varphi}$ mátrixát V/W -nek $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$ osztályai által meghatározott bázisában. Ekkor $[\bar{\varphi}] = \underline{C}$ a (i) pontbeli jelölésekkel.

(iv) Legyenek V_1, V_2 egy F test feletti vektorterek. Legyen $\{e_1, \dots, e_n\}$ V_1 -nek egy bázisa, $\{f_1, \dots, f_m\}$ V_2 -nek egy bázisa. Legyenek $\varphi : V_1 \rightarrow V_2, \psi : V_2 \rightarrow V_2$ lineáris transzformációk. Legyen $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[F]$ φ mátrixa az $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázisban, $\underline{B} = (b_{ij}) \in M_m[F]$ ψ mátrixa az $\{f_1, \dots, f_m\}$ bázisban.

Definiáljuk $V_1 \otimes V_2$ -nek azt a lineáris transzformációját, amelyre

$$e_i \otimes f_j \mapsto \varphi(e_i) \otimes \psi(f_j).$$

Ennek mátrixa az $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$ bázisban a következő.

	$e_1 \otimes f_1 \dots e_n \otimes f_1$			$e_1 \otimes f_m \dots e_n \otimes f_m$
$e_1 \otimes f_1$	$\underline{\underline{A}}b_{11}$	$\underline{\underline{A}}b_{12}$	$\dots$	$\underline{\underline{A}}b_{1m}$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
$e_n \otimes f_1$				
$\vdots$				
$e_n \otimes f_m$	$\underline{\underline{A}}b_{m1}$	$\dots$	$\dots$	$\underline{\underline{A}}b_{mn}$

17. ábra

Az egy $M_{nm}[F]$ -beli mátrix, amely a $\underline{\underline{B}}$ mátrixból úgy kapható, hogy minden eleme helyére egy $n \times n$ -es mátrix kerül, amelynek értéke $\underline{\underline{A}}$ megszorozva az ott levő $\underline{\underline{B}}$ -beli elemmel. Ezt az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixok Kronecker-szorzatának hívják.

15. Tenzorok

Ebben a fejezetben először a vektortér és duális terének bázisai közötti kapcsolatot vizsgáljuk. Utána megvizsgáljuk hogy hogyan változnak egy tenzor koordinátái báziscsere esetén. Bevezetjük a tenzorok jelölésére szolgáló Einstein-féle konvenciót is a fejezet végén.

Láttuk, hogy $\dim_F V = n$ esetén $\dim_F V^* = n$. Most erre adunk egy új bizonyítást és egyben V^* -nak egy bázisát is megkonstruáljuk V egy bázisának segítségével.

15.1 Tétel: Legyen V egy F test feletti vektortér, $e_1, \dots, e_n$ V -nek rögzített bázisa. Ekkor azon $E_1, \dots, E_n$ V^* -beli elemek, amelyekre $E_i(e_j) = \delta_{ij}$, $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, n$, V^* -nak egy bázisát definiálják.

Bizonyítás: Mivel lineáris operátor bázison előírható, (13.8 Tétel), így $E_1, \dots, E_n \in V^*$ ezáltal definiálva van.

Belátjuk, hogy ez bázist alkot V^* -ban.

Ha $\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i = 0$, akkor ezt a lineáris funkcionált az e_j vektorra alkalmazva kapjuk, hogy $\alpha_j = 0$. Így $i = 1, \dots, n$ esetén $\alpha_i = 0$, tehát $E_1, \dots, E_n$ független rendszer V^* -ban.

Ha $\varphi \in V^*$, akkor azt állítjuk, hogy $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) E_i$.

Helyettesítsük be φ -be az $e_1, \dots, e_n$ vektorokat. Mivel a jobboldalon szereplő lineáris funkcionál értéke $e_1, \dots, e_n$ vektorokon megegyezik φ értékével, ezért a két lineáris funkcionál egyenlő. Itt ismét felhasználtuk, hogy lineáris operátor bázison előírható.

15.2 Definíció: Legyen V egy F test feletti vektortér, $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ bázis. V^* -nak azt az $\{E_1, \dots, E_n\}$ bázisát, amelyre $E_i(e_j) = \delta_{ij}$, az $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázishoz tartozó duális bázisnak nevezzük.

15.3 Megjegyzés: Ha $\varphi \in V^*$, azaz $\varphi : V \rightarrow F_F$ lineáris operátor, és $e_1, \dots, e_n$ V -beli $1 \in F_F$ -beli bázisok akkor, φ mátrixa erre a bázispárra $[\varphi] = [\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)]$. Ez éppen a V^* vektortér φ elemének $E_1, \dots, E_n$ duális bázisra vonatkozó koordinátavektorának transzponáltja. Láttuk, hogy $[\varphi(v)] = [\varphi][v]$. Ezt

$\varphi \in V^*$ -ra alkalmazva azt kapjuk, hogy V^* minden eleme úgy hat V -n, mint $[\varphi]$ vektorral való skaláris szorzás V vektorainak koordinátavektorain. Tehát például $\mathbf{R}^n$ elemei éppen az $\mathbf{R}^n$ -beli vektorokkal vett skaláris szorzások.

Most megvizsgáljuk, hogyan változik egy $\varphi \in V^*$ lineáris funkcionál mátrixa, ha V -ben egy másik bázisra térünk át.

15.4 Tétel: Legyen V egy F test feletti vektortér, $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ két bázis V -ben. F_F -ben vegyük 1-et bázisnak. Legyen $\varphi \in V^*$ lineáris funkcionál. Ekkor $[\varphi]_{\text{új}}$, $[\varphi]_{\text{régi}}$ jelöli φ mátrixát az $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ $\{1\}$ és $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ $\{1\}$ bázispárokban. Legyen $T: V \rightarrow V$ báziscseretranszformáció, melyre $T(\underline{e}_i) = \underline{e}'_i$, $i = 1, \dots, n$. Ekkor $[\varphi]_{\text{új}} = [\varphi]_{\text{régi}} \cdot [T]_{\text{régi}}$

Bizonyítás: $[\varphi]_{\text{új}} = [\varphi(\underline{e}'_1), \dots, \varphi(\underline{e}'_n)] = [\varphi(T(\underline{e}_1)), \dots, \varphi(T(\underline{e}_n))] = [\varphi T]_{\text{régi}} = [\varphi]_{\text{régi}}[T]_{\text{régi}}$

15.5 Megjegyzés: A fenti tételbeli tulajdonságot úgy szokták mondani, hogy $[\varphi]$ koordinátái kovariánsan változnak. V elemeit kontravariáns vektoroknak hívják, mert koordinátavektoraiban a $[\underline{v}]_{\text{új}} = [T]^{-1}[\underline{v}]_{\text{régi}}$ szabály érvényes. V^* elemeit kovariáns vektoroknak hívják, mert koordinátamatrixaikra (amelyek sorvektorok), a $[\varphi]_{\text{új}} = [\varphi]_{\text{régi}}[T]$ szabály érvényes.

Most megvizsgáljuk, hogy mi a kapcsolat a V vektortér egy báziscseretranszformációjának mátrixa és a duális tér megfelelő duális bázisaihoz tartozó báziscseretranszformáció mátrixai között.

15.6 Tétel: Legyen V egy F test feletti vektortér. Legyenek $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ és $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ V -beli bázisok, $\{E_1, \dots, E_n\}$ és $\{E'_1, \dots, E'_n\}$ nekik megfelelő duális bázisok V^* -ban.

Legyen $T: V \rightarrow V$ egy báziscseretranszformáció, melyre $T(\underline{e}_i) = \underline{e}'_i$, $i = 1, \dots, n$, $B: V^* \rightarrow V^*$ báziscseretranszformáció, melyre $B(E_i) = E'_i$, $i = 1, \dots, n$. Ekkor $[B] = ([T]^T)^{-1}$ kapcsolat áll fenn a T és B koordinátamatrixai között a megfelelő bázisokban.

Bizonyítás: Legyen $[T] = (t_{ij})$, $[B] = (b_{ij})$, $[B^{-1}] = (b^*_{ij})$. Ekkor $\underline{e}'_j = T\underline{e}_j = t_{1j}\underline{e}_1 + \dots + t_{nj}\underline{e}_n$. Így $E_i(\underline{e}'_j) = E_i(T\underline{e}_j) = E_i(\sum_{k=1}^n t_{kj}\underline{e}_k) = \sum_{k=1}^n t_{kj}E_i(\underline{e}_k) = t_{ij}$. $BE_i = E'_i$ -ből $E_i = B^{-1}E'_i = b^*_{i1}E'_1 + \dots + b^*_{in}E'_n$ következik. Így $E_i(\underline{e}'_j) = \sum_{k=1}^n b^*_{ki}E'_k(\underline{e}'_j) = b^*_{ji}$.

Ebből $(t_{ij}) = (b^*_{ji})$, azaz $[T] = [B^{-1}]^T$ és $[B] = ([T]^T)^{-1}$ következik.

15.7 Megjegyzés: Láttuk, hogy ha egy V_1 vektortér egy bázisa $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ és egy V_2 vektortér egy bázisa $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\}$, akkor $V_1 \otimes V_2$ egy bázisa $\{\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j\}$ $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Ennek az állításnak a többszörös analogonja is igaz.

A $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q$ tér, a p -szoros kontravariáns és q -szoros kovariáns tenzorok tere, $\dim V = n$ esetén n^{p+q} dimenziós, és ha V -nek egy bázisa $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ és a hozzá tartozó duális bázis V^* -ban $\{E_1, \dots, E_n\}$, akkor a fenti tér egy bázisa

$\{\underline{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{\alpha_p} \otimes E_{\beta_1} \otimes \dots \otimes E_{\beta_q}\}$, ahol $1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_p \leq n$, $1 \leq \beta_1, \dots, \beta_q \leq n$

Most megvizsgáljuk, hogy mi történik egy tenzorral, ha a vektortérben egy másik bázisra térünk át.

15.8 Tétel: Legyen V egy F test feletti vektortér $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ és $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ V -ben bázisok. Legyenek $\{E_1, \dots, E_n\}$ és $\{E'_1, \dots, E'_n\}$ az ezekhez tartozó duális bázisok V^* -ban. Legyen $T: V \rightarrow V$ báziscseretranszformáció, melyre $T(\underline{e}_i) = \underline{e}'_i$, $i = 1, \dots, n$. Legyen T mátrixa az $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázisban $[T] = (t_{ij})$, legyen $[T]^{-1} = (t^*_{ij})$.

Vegyünk egy p -szeresen kontravariáns q -szoros kovariáns tenzort V -n. Ezt a fenti báziselemekkel kifejezve, n^{p+q} együttható határozza meg, azaz tenzorunk

$$\sum_{\substack{1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_p \leq n \\ 1 \leq \beta_1, \dots, \beta_q \leq n}} a_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \underline{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{\alpha_p} \otimes E_{\beta_1} \otimes \dots \otimes E_{\beta_q}$$

alakú.

Térjünk át V -ben az $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ V^* -ban az $\{E'_1, \dots, E'_n\}$ bázisra.

Ekkor a fenti tenzor az ezekhez tartozó

$$\{\underline{e}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}'_{i_p} \otimes E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_q}\}$$

$$1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$$

$$1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n$$

bázisban.

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n}} a_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} t^*_{i_1 \alpha_1} \dots t^*_{i_p \alpha_p} t_{\beta_1 j_1} \dots t_{\beta_q j_q} \cdot \underline{e}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}'_{i_p} \otimes E'_{j_1} \otimes \dots \otimes E'_{j_q}$$

Bizonyítás: Mivel $T^{-1}(\underline{e}'_k) = \underline{e}_k$, $\underline{e}_k = \sum_{i=1}^n t_{ik}^* \underline{e}'_i$, a 15.6 Tétel szerint $E_k = \sum_{i=1}^n t_{ki} E'_i$. Így, ha

$$\begin{aligned} \sum a_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \underline{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{\alpha_p} \otimes E_{\beta_1} \otimes \dots \otimes E_{\beta_q} = \\ = \sum a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p'} \underline{e}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}'_{i_p} \otimes E'_{j_1} \otimes \dots \otimes E'_{j_q}, \end{aligned}$$

akkor a baloldalon az $\underline{e}_k$ -ra és E_k -ra kapott kifejezéseket behelyettesítve $k = 1, \dots, n$ indexekre és a tenzorszorzat tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy

$$a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p'} = \sum_{\substack{1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_p \leq n \\ 1 \leq \beta_1, \dots, \beta_q \leq n}} a_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} t_{i_1 \alpha_1}^* \dots t_{i_p \alpha_p}^* t_{\beta_1 j_1} \dots t_{\beta_q j_q}. \quad (*)$$

15.9 Megjegyzés: az előző tétel bizonyításában bevezetett képlet lehetőséget ad a tenzor fogalmának másfajta bevezetésére is, amelyet több könyv is használ, például [G]. Ekkor a tenzort a következőképpen definiálják: Azt mondjuk, hogy a V F test feletti vektortéren adott egy p -szeresen kontravariáns és q -szorosán kovariáns tenzor, ha minden $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \subset V$ bázishoz meg van adva n^{p+q} darab F -beli együttható (az illető tenzor komponensei)

$$\left\{ a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right\} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n \end{array}$$

Ha egy $T : \underline{e}_i \rightarrow \underline{e}'_i$ $i = 1, \dots, n$ báziscserét hajtunk végre V -n, akkor az új bázisban a tenzor komponensei

$$\left\{ a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p'} \right\} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n \end{array}$$

és a tenzor régi és új bázisbeli komponensei között a (*) összefüggés áll fenn, ahol $[T] = (t_{ij})$, $[T]^{-1} = (t_{ij}^*)$.

A tenzorok felírását egyszerűsíthetjük, ha használjuk az ún. *Einstein-féle konvenciót*. Ez azt jelenti, hogy a tenzor kontravariáns komponenseinek megfelelő indexek felül, a kovariáns komponensekhez tartozó indexek alul szerepelnek. Ha egy kifejezésben ugyanez az index felső és alsó indexként is előfordul, arra összegezni kell.

15.10 Példa

$$\begin{array}{ll} \underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i & \text{helyett } \underline{x} = x^i \underline{e}_i \\ \underline{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \underline{e}_i & \text{helyett } \underline{\tilde{x}} = \tilde{x}^i \underline{e}_i \\ \underline{e}'_i = \sum_{k=1}^n t_{ki} \underline{e}_k & \text{helyett } \underline{e}'_i = t_i^k \underline{e}_k \\ \tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n t_{ij}^* \tilde{x}_j & \text{helyett } \tilde{x}^i = t^{*i}_j x^j \end{array}$$

a (*)-gal jelölt formula helyett a

$$a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p'} = a_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} t_{\alpha_1}^{*i_1} \dots t_{\alpha_p}^{*i_p} t_{j_1}^{\beta_1} \dots t_{j_q}^{\beta_q}$$

kifejezést kapjuk az Einstein-féle konvencióval.

15.11 Példa:

(i) *1-szeresen kontravariáns tenzor* minden $\underline{x} \in V$ koordinátavektora. Ha $\underline{x} = x^i \underline{e}_i$, és $\underline{\tilde{x}} = \tilde{x}^i \underline{e}'_i$ $\underline{x}$ felírása a régi és új bázisokban, $[T] = (t_j^i)$ a báziscsere transzformáció mátrixa és $[T]^{-1} = (t^{*i}_j)$, akkor $\tilde{x}^i = t^{*i}_j x^j$.

(ii) *1-szeresen kovariáns tenzor* minden $\varphi \in V^*$ -beli lineáris funkcionál koordinátamátrixa.

Legyen $\varphi_i = \varphi(\underline{e}_i)$ $\tilde{\varphi}_i = \varphi(\underline{e}'_i)$ a mátrix komponensei a régi és az új bázisban, $[T] = (t_j^i)$ a báziscsere transzformáció mátrixa.

Ekkor $\tilde{\varphi}_i = \varphi_j t_i^j$

(A tenzortérben φ -t felírva $\varphi = \varphi_j E^j = \tilde{\varphi}_j E'^j$)

(iii) *1-szeresen kontravariáns és 1-szeresen kovariáns tenzor* minden lineáris operátor mátrixa. Ez sorindexben kontravariáns és oszlopindexben kovariáns tenzor. Legyen $\varphi \in L(V, V)$ $[\varphi] = (a_j^i) = \underline{A}$, $[\tilde{\varphi}] = [T]^{-1} \underline{A} [T] = (\tilde{a}_j^i)$, ahol $[T] = (t_j^i)$ a báziscsere transzformáció mátrixa $[T]^{-1} = (t^{*i}_j)$.

Ekkor

$$\tilde{a}_j^i = t^{*i}_k a_l^k t_j^l = a_l^k t_k^{*i} t_j^l$$

A φ lineáris transzformációnak az $a_j^i \underline{e}_i \otimes E^j$ tenzor felel meg.

15.12 Definíció:

Legyen V egy F test feletti vektortér $\varphi : V \times V \rightarrow F$ leképezés, melyre

$$(i) \quad \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}_2, \underline{w}) \quad \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w} \in W$$

$$(ii) \quad \varphi(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V, \forall \lambda \in F$$

$$(iv) \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}_2) \quad \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w} \in V$$

$$(iv) \varphi(\underline{v}, \lambda \underline{w}) = \lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \forall \lambda \in F.$$

(Azaz, φ rögzített második változó esetén az első változóban lineáris, rögzített első változó esetén a második változóban lineáris). Ekkor φ -t a V -n értelmezett *bilineáris függvénynek* nevezzük. Ha $F = \mathbf{R}$ akkor φ -t V -n értelmezett *valós bilineáris függvénynek* nevezzük.

15.13 Példa:

(i) Ha $a(\cdot, \cdot) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ leképezés a valós skaláris szorzás, azaz $(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, akkor ez valós bilineáris függvény.

(ii) $\varphi : \mathbf{R}[x] \times \mathbf{R}[x] \rightarrow \mathbf{R}$ melyre $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$, valós bilineáris függvény.

15.14 Definíció: Legyen V egy F test feletti vektortér, $\varphi : V \times V \rightarrow F$ bilineáris függvény, $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \subset V$ bázis. φ *mátrixának* nevezzük az $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázisban azt az $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_n[F]$ mátrixot, amelyre $a_{ij} = f(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$.

15.15 Példa: Egy $\varphi : V \times V \rightarrow F$ bilineáris függvény mátrixa *kétszeresen kovariáns tenzor*. Legyenek $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ bázisok V -ben, $T : V \rightarrow V$ báziscsere transzformáció, melyre $T(\underline{e}_i) = \underline{e}'_i$ $i = 1, \dots, n$. T mátrixa $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázisban $[T] = (t^i_j)$. Ekkor, ha $\underline{A} = (a_{ij})$ φ mátrixa az első, $\underline{\tilde{A}} = (\tilde{a}_{ij})$ φ mátrixa a második bázisban, akkor

$$\tilde{a}_{ij} = \varphi(\underline{e}'_i, \underline{e}'_j) = \varphi(t^k_i \underline{e}_k, t^l_j \underline{e}_l) = t^k_i t^l_j \varphi(\underline{e}_k, \underline{e}_l) = t^k_i t^l_j a_{kl}$$

A φ bilineáris függvénynek a tenzortér $a_{ij} E^i \otimes E^j$ eleme felel meg, ahol $\{E^1, \dots, E^n\}$ az $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ -hez tartozó duális bázis V^* -ban.

15.16 Definíció Legyen V egy F test feletti vektortér. Egy $\varphi : \underbrace{V \times \dots \times V}_n \rightarrow F$ leképezést *multilineáris függvénynek* nevezünk, ha

$$(i) \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i + \underline{a}'_i, \dots, \underline{a}_n) = \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n) + \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}'_i, \dots, \underline{a}_n)$$

$$(ii) \varphi(\underline{a}_1, \dots, \lambda \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n) = \lambda \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n)$$

teljesül $\forall \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in V$, $\forall \lambda \in F$ és $\forall \underline{a}'_i \in V$ $i = 1, \dots, n$ esetén.

15.17 Példa: $\varphi : \mathbf{R}^n \times \dots \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, melyre

$$(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \mapsto \det([\underline{a}_1 | \dots | \underline{a}_n])$$

multilineáris függvény.

15.18 Példa: Legyen V egy F test feletti vektortér $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázissal,

$$\varphi : \underbrace{V \times \dots \times V}_n \rightarrow F$$

multilineáris függvény.

$a_{i_1 \dots i_n} = \varphi(\underline{e}_{i_1}, \dots, \underline{e}_{i_n})$ a hozzátartozó tenzor komponensei. Ez a tenzor n -szeresen kovariáns tenzor

$$a'_{i_1 \dots i_n} = t^{\alpha_1}_{i_1} t^{\alpha_2}_{i_2} \dots t^{\alpha_n}_{i_n} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$$

φ -nek a tenzortér $a_{i_1 \dots i_n} E^{i_1} \otimes \dots \otimes E^{i_n}$ eleme felel meg.

A további fejezetekben nem használjuk az Einstein-féle konvenciót.

16. Bilineáris függvények valós és komplex terekben

A valós bilineáris függvényt definiáltuk már az előző fejezetben. A komplex bilineáris függvény definíciója egy kicsit eltér ettől.

16.1 Definíció: Legyen V $\mathbb{C}$ feletti vektortér. Egy $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ leképezést *komplex bilineáris függvénynek* nevezzük, ha

- (i) $\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}_2, \underline{w}) \quad \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w} \in V$
- (ii) $\varphi(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \overline{\lambda} \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$
- (iii) $\varphi(\underline{w}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}_2) \quad \forall \underline{w}, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$
- (iv) $\varphi(\underline{w}, \lambda \underline{v}) = \lambda \varphi(\underline{w}, \underline{v}) \quad \forall \underline{w}, \underline{v} \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Tehát komplex bilineáris függvény rögzített első változó esetén a másodikban lineáris, rögzített második változó esetén az elsőben konjugáltlineáris.

16.2 Példa: $A(\cdot, \cdot) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ leképezés komplex skaláris szorzás, ha $(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i$. Ez komplex bilineáris függvény.

16.3 Megjegyzés: Egy komplex bilineáris függvény mátrixát analóg módon értelmezzük, mint a 15.14 Definícióban.

16.4 Tétel: Legyen V valós (illetve komplex) számtest feletti vektortér φ V -n értelmezett valós (illetve komplex) bilineáris függvény. Legyen $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ V -ben egy bázis, legyen φ mátrixa ebben a bázisban $\underline{A}$. Legyen $\underline{u}, \underline{v} \in V$. Ekkor $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]$ (illetve a komplex esetben $[\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]$), ahol $[\underline{u}], [\underline{v}]$, az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ koordinátavektorai az adott bázisban. Megfordítva, minden $\underline{A} \in M_n[\mathbb{R}]$ (illetve $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$) esetén az $[\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]$ (illetve az $[\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]$) V -n értelmezett valós (illetve komplex) bilineáris függvény, melynek mátrixa $\underline{A}$. A $\varphi \mapsto \underline{A} = (a_{ij})$, $a_{ij} = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$ leképezés bijekció a valós (illetve komplex) bilineáris függvénynek és $M_n[\mathbb{R}]$ (illetve $M_n[\mathbb{C}]$) mátrixai között.

Bizonyítás: A valós esetet bizonyítjuk csak, a komplex eset hasonlóan igazolható.

Legyen $\underline{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i$, $\underline{v} = \sum_{j=1}^n \beta_j \underline{e}_j$. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{u}, \underline{v}) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \underline{e}_j\right) = \\ &= \sum_{ij} \alpha_i \beta_j \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}^T \underline{A} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]. \end{aligned}$$

Megfordítva, könnyen ellenőrizhető, hogy $[\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]$ valós bilineáris függvény $\forall \underline{A} \in M_n[\mathbf{R}]$ mátrix esetén.

$[\underline{e}_i]^T \underline{A} [\underline{e}_j] = a_{ij}$, tehát ennek a bilineáris függvénynek a mátrixa $\underline{A}$.

A $\varphi \rightarrow \underline{A} = (a_{ij})$, $a_{ij} = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$ leképezés injektív, hiszen mivel $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]$, ha egy ψ bilineáris függvény mátrixa $\underline{A}$, akkor $\psi(\underline{u}, \underline{v}) = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]$, tehát $\varphi = \psi$.

A szűrjektivitás abból következik, hogy $\forall \underline{A} \in M_n[\mathbf{R}]$ esetén $[\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]$ olyan bilineáris függvény, amelynek a mátrixa $\underline{A}$.

Bár a 13.15 példában már levezettük, most egy kicsit más formában ismét megmutatjuk, hogy hogyan változik egy bilineáris függvény mátrixa báziscsere esetén.

16.5 Tétel: Legyen V valós (illetve komplex számtest feletti) vektortér. Legyen $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \subset V$ bázis, $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\} \subset V$ egy másik bázis. Legyen $M : V \rightarrow V$ báziscsere transzformáció, melyre $M(\underline{e}_i) = \underline{e}'_i$, $i = 1, \dots, n$. Legyen a φ V n értelmezett valós (illetve komplex) bilineáris függvény mátrixa $\underline{A}$ az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bázisban. Ekkor φ mátrixa az $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ bázisban $[M]^T \underline{A} [M]$ (illetve $[\overline{M}]^T \underline{A} [M]$), ahol $[M]$ az M báziscsere transzformáció mátrixa.

Bizonyítás A valós esetet bizonyítjuk, a komplex eset bizonyítása hasonló. Legyen $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $[\underline{u}], [\underline{v}], [\underline{\tilde{u}}], [\underline{\tilde{v}}]$ ezek koordinátavektorai a régi és az új bázisban. Ekkor, mivel $[\underline{u}] = [M][\underline{\tilde{u}}]$, $[\underline{v}] = [M][\underline{\tilde{v}}]$, így $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}]$, $([M][\underline{\tilde{u}}])^T \underline{A} [M][\underline{\tilde{v}}] = [\underline{\tilde{u}}]^T [M]^T \underline{A} [M][\underline{\tilde{v}}]$.

Most a bilineáris függvények leggyakoribb típusait ismerjük meg.

16.6 Definíció: Legyen V egy a valós számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow \mathbf{R}$ valós bilineáris függvény. Azt mondjuk, hogy φ

(i) *szimmetrikus*, ha $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ esetén.

(ii) *szimplektikus*, ha $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = -\varphi(\underline{w}, \underline{v}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ esetén.

Legyen V egy a komplex számtest feletti vektortér és $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ komplex bilineáris függvény. Azt mondjuk, hogy φ

(iii) *Hermite-féle*, ha $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ esetén.

16.7 Példa:

(i) A valós skaláris szorzás $(\cdot) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, amelyre $(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, szimmetrikus bilineáris függvény

(ii) A determinánsképzés $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, amelyre $\varphi(\underline{a}, \underline{b}) = \det[\underline{a}, \underline{b}]$, szimplektikus bilineáris függvény.

(iii) A komplex skaláris szorzás $(\cdot) : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$, amelyre $(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i$, Hermite-féle bilineáris függvény.

16.8 Tétel: Egy bilineáris függvény pontosan akkor szimmetrikus (szimplektikus illetve, Hermite-féle), ha a bilineáris függvény mátrixa szimmetrikus (antiszimmetrikus illetve önadjungált).

Bizonyítás: Csak a szimmetrikus alesetet bizonyítjuk, a többi bizonyítása hasonló. Legyen $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ szimmetrikus bilineáris függvény. Legyen $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ a V -ben egy bázis. Ekkor $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(\underline{e}_j, \underline{e}_i)$ tehát φ mátrixa szimmetrikus mátrix. Ha φ mátrixa szimmetrikus matrix, akkor $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}] = ([\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}])^T = [\underline{v}]^T \underline{A}^T [\underline{u}] = [\underline{v}]^T \underline{A} [\underline{u}] = \varphi(\underline{v}, \underline{u})$, tehát φ szimmetrikus bilineáris függvény.

16.9 Definíció: Legyen φ egy valós (illetve komplex) bilineáris függvény a V vektortéren. A φ -hez tartozó *kvadratikus alak*-nak nevezzük azt a $g : V \rightarrow \mathbf{R}$ (illetve $V \rightarrow \mathbf{C}$) leképezést, amelyre $g(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \forall \underline{v} \in V$ esetén.

16.10 Példa:

A valós skaláris szorzás, $(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ esetén, a hozzá tartozó kvadratikus alak $(\underline{a}, \underline{a}) = \sum_{i=1}^n a_i^2$.

(iv) A komplex skaláris szorzás $(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i$ esetén a hozzá tartozó kvadratikus alak: $(\underline{a}, \underline{a}) = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$.

(iv) A $\det[\underline{a}, \underline{b}]$ $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbf{R}^2$ bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak $\det[\underline{a}, \underline{a}]$, azaz nulla.

(iv) A $\sum_{i,j} a_{ij} u_i u_j = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{u}]$ valós bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak $\sum_{i,j} a_{ij} u_i u_j = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{u}]$

(iv) A $\sum_{i,j} a_{ij} \bar{u}_i u_j = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{u}]$ komplex bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak $\sum_{i,j} a_{ij} \bar{u}_i u_j = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{u}]$.

16.11 Tétel: A komplex bilineáris függvények és a komplex kvadratikus alakok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \varphi(\underline{u}, \underline{u})$ leképezés.

Egy komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak valós értékű. Valós bilineáris függvények és kvadratikus alakjaik között a fenti leképezés nem kölcsönösen egyértelmű. De minden kvadratikus alakhoz létezik egyetlen olyan szimmetrikus bilineáris függvény, amelyhez épp a megadott kvadratikus alak tartozik.

Bizonyítás: Legyen φ komplex bilineáris függvény a V vektortéren. Ekkor írjuk fel a következő azonosságokat

$$\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{w}, \underline{w})$$

$$\varphi(i\underline{v} + \underline{w}, i\underline{v} + \underline{w}) = -\varphi(\underline{v}, \underline{v}) - i\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + i\varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{w}, \underline{w})$$

$$-\varphi(\underline{v} + \underline{w}, -\underline{v} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) - \varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{w}, \underline{w})$$

$$\varphi(-i\underline{v} + \underline{w}, -i\underline{v} + \underline{w}) = -\varphi(\underline{v}, \underline{v}) + i\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - i\varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{w}, \underline{w})$$

Szorozzuk be (i)-et +1-gyel, (ii)-t i -vel (ii)-at (-1)-gyel (iv)-et (-i)-vel és adjuk össze az egyenleteket. Ekkor a jobboldalon minden kiesik kivéve a $\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ -ket tartalmazó tagok. Így megkapjuk a következő ú.n. "polarizációs formulát"

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{1}{4} [\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w}) + i\varphi(i\underline{v} + \underline{w}, i\underline{v} + \underline{w}) + (-1)\varphi(-\underline{v} + \underline{w}, -\underline{v} + \underline{w}) + (-i) \cdot \varphi(-i\underline{v} + \underline{w}, -i\underline{v} + \underline{w})]$$

Tehát, ha két komplex bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak azonos, akkor a fenti polarizációs formula jobboldala a két bilineáris függvényre azonos, így a két bilineáris függvény is azonos.

Szorozzuk be most (i)-et 1-gyel, (ii)-t $(-i)$ -vel, (iii)-at (-1) -gyel (iv)-et i -vel és adjuk össze az egyenleteket. Ekkor a jobboldalon a $\varphi(\underline{w}, \underline{v})$ -ket tartalmazó tagokon kívül minden kiesik, így

$$\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \frac{1}{4} [\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w}) + (-i)\varphi(i\underline{v} + \underline{w}, i\underline{v} + \underline{w}) + (-1)\varphi(-\underline{v} + \underline{w}, -\underline{v} + \underline{w}) + (+i) \cdot \varphi(-i\underline{v} + \underline{w}, -i\underline{v} + \underline{w})]$$

Ha a φ -hez tartozó kvadratikus alak valós értékű, akkor $\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w})$, $\varphi(i\underline{v} + \underline{w}, i\underline{v} + \underline{w})$, $\varphi(-\underline{v} + \underline{w}, -\underline{v} + \underline{w})$, $\varphi(-i\underline{v} + \underline{w}, -i\underline{v} + \underline{w})$ valósak és így a fenti formulákból látszik, hogy $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})}$.

Ha φ Hermite-féle bilineáris függvény, akkor $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$ azaz a φ -hez tartozó kvadratikus alak valós értékű.

Valós bilineáris függvények esetén előfordulhat, hogy több bilineáris függvényhez ugyanaz a kvadratikus alak tartozik. Például, ha φ szimplektikus, akkor $\varphi(\underline{u}, \underline{u}) = -\varphi(\underline{u}, \underline{u})$, tehát $\varphi(\underline{u}, \underline{u}) = 0$. Tehát hozzá ugyanaz a kvadratikus alak tartozik, mint az azonosan nulla bilineáris függvényhez. Ha $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ szimmetrikus bilineáris függvény, akkor

$$\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}),$$

azaz

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{1}{2} (\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w}) - \varphi(\underline{v}, \underline{v}) - \varphi(\underline{w}, \underline{w})).$$

Tehát ha két szimmetrikus bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak azonos, akkor a fenti formula jobboldala a két bilineáris függvényre azonos, tehát a két bilineáris függvény azonos.

16.12 Definíció: Egy valós értékű kvadratikus alak mátrixának nevezzük a hozzá tartozó egyetlen Hermite-féle vagy szimmetrikus bilineáris függvény mátrixát.

16.13 Példa:

(i) Adott $[\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{u}]$ bilineáris függvény, a hozzá tartozó kvadratikus alak $[\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{u}] = \sum_{i,j} a_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j} \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} u_i u_j = [\underline{u}]^T \frac{\underline{A} + \underline{A}^T}{2} [\underline{u}]$. Az az egyértelműen létező szimmetrikus bilineáris függvény, amelyhez ugyanez a kvadratikus alak tartozik, éppen $[\underline{u}]^T \frac{\underline{A} + \underline{A}^T}{2} [\underline{u}]$. Ezt az eredeti bilineáris függvény szimmetrizáltjának nevezzük. Mátrixa $\frac{\underline{A} + \underline{A}^T}{2}$.

(ii) $\sum_{i,j} a_{ij} \bar{u}_i u_j$ komplex téren értelmezett kvadratikus alakhoz tartozó egyértelműen létező komplex bilineáris függvény éppen $\sum_{i,j} a_{ij} \bar{u}_i u_j$.

(iii) A kvadratikus alakok az analízisben is előfordulnak.

A $df(\underline{a}) = f'_x(\underline{a})dx + f'_y(\underline{a})dy$ első differenciál differenciáljaként kapott

$$d^2 f(\underline{a}) = f''_{xx}(\underline{a})(dx)^2 + f''_{xy}(\underline{a})dxdy + f''_{yx}(\underline{a})dydx + f''_{yy}(\underline{a})(dy)^2$$

második differenciál egy kvadratikus alak.

$$d^2 f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f''_{xx}(\underline{a}) & f''_{xy}(\underline{a}) \\ f''_{yx}(\underline{a}) & f''_{yy}(\underline{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f''_{xx}(\underline{a}) & \frac{f''_{xy}(\underline{a}) + f''_{yx}(\underline{a})}{2} \\ \frac{f''_{xy}(\underline{a}) + f''_{yx}(\underline{a})}{2} & f''_{yy}(\underline{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Valós értékű kvadratikus alakok *jellegét* fogjuk most definiálni.

16.14 Definíció: Legyen $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ valós értékű kvadratikus alak. Azt mondjuk, hogy g (illetve a hozzá tartozó egyetlen Hermite-féle vagy szimmetrikus bilineáris függvény) *jellege*

- (i) pozitív definit, ha minden $\underline{v} \in V \setminus \{0\}$ esetén $g(\underline{v}) > 0$
- (ii) pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{v} \in V$ esetén $g(\underline{v}) \geq 0$ és létezik olyan $\underline{v} \in V \setminus \{0\}$, amelyre $g(\underline{v}) = 0$
- (iii) negatív definit, ha minden $\underline{v} \in V \setminus \{0\}$ esetén $g(\underline{v}) < 0$
- (iv) negatív szemidefinit, ha minden $\underline{v} \in V$ esetén $g(\underline{v}) \leq 0$ és létezik olyan $\underline{v} \in V \setminus \{0\}$, amelyre $g(\underline{v}) = 0$
- (v) indefinit, ha g felvesz pozitív és negatív értékeket is.

16.15 Megjegyzés: Az f többváltozós függvénynek egy $\underline{a}$ stacionárius pontjában, a szélsőérték levezetésének elegendő feltétele, hogy a $d^2 f(\underline{a})$ második differenciál, mint kvadratikus alak definit legyen. Ha pozitív definit, akkor $\underline{a}$ -ban minimum, ha negatív definit, akkor $\underline{a}$ -ban maximum van. Ha $d^2 f(\underline{a})$ indefinit, akkor $\underline{a}$ -ban nincs szélsőérték.

16.16 Példa: Legyen $\underline{a} \in \mathbb{R}^n \geq 2$. Ekkor a

- (i) $g(\underline{a}) = \sum_{i=1}^n a_i^2$ kvadratikus alak pozitív definit.
- (ii) $g(\underline{a}) = -\sum_{i=1}^n a_i^2$ kvadratikus alak negatív definit.

(iii) $g(\underline{a}) = a_1^2$ kvadratikus alak pozitív szemidefinit.

(iv) $g(\underline{a}) = a_1^2 - a_2^2$ kvadratikus alak indefinit.

Két kritériumot mutatunk kvadratikus alak jellegének meghatározására, melyek bizonyítása 18. fejezet végén található meg.

16.17 Tétel (1. definitési kritérium): Egy V valós (vagy komplex) számtest feletti vektortéren értelmezett valós értékű kvadratikus alak pontosan akkor

- (i) pozitív definit, ha mátrixának minden sajátértéke pozitív.
- (ii) pozitív szemidefinit, ha mátrixának minden sajátértéke nem negatív és létezik nulla sajátértéke.
- (iii) negatív definit, ha mátrixának minden sajátértéke negatív
- (iv) negatív szemidefinit, ha mátrixának minden sajátértéke nem pozitív és létezik nulla sajátértéke.
- (v) indefinit, ha mátrixának van pozitív és negatív sajátértéke is.

16.18 Megjegyzés: Egy valós értékű kvadratikus alak mátrixa, a hozzá tartozó egyetlen Hermite-féle illetve szimmetrikus bilineáris függvény mátrixa. Ez a mátrix önadjungált illetve szimmetrikus. Később látni fogjuk hogy a komplex és valós "főtengely tétel" szerint ezen mátrixok minden sajátértéke valós. Másrészt a következő példa azt mutatja, hogy helytelen eredményt kaphatunk, ha a kvadratikus alak mátrixa helyett egy olyan nemszimmetrikus bilineáris függvény mátrixát tekintjük, amely ugyanezt a kvadratikus alakot definiálja. Legyen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $[\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{v}] = u_1 v_1 + 4u_1 v_2 + u_2 v_1 + 5u_2 v_2$ bilineáris függvény, $[\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{u}] = u_1^2 + 5u_1 u_2 + 5u_2^2$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

A kvadratikus alak mátrixa:

$$\underline{B} = \frac{\underline{A} + \underline{A}^T}{2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix}, \quad \det(\underline{B} - \lambda \underline{I}) = \lambda^2 - 6\lambda - \frac{5}{4} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 5}}{2},$$

tehát $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$, azaz a fenti kvadratikus alak indefinit.

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2},$$

azaz

$$\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0.$$

A fenti kritériumnak az a hátránya, hogy ki kell számítani hozzá a mátrix sajátértékeit. A második kritérium ennél kényelmesebb, bár csak a pozitív és a negatív definit esetre ad pontos kritériumot.

16.19 Definíció: Egy $\underline{A} = a_{ij} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix sarokaldeterminánsainak vagy főaldeterminánsainak nevezzük a

$$D_1 = \det[a_{11}], \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots, \quad D_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}, \dots, \quad D_n = \det \underline{A}$$

sorozatot.

16.20 Tétel (2. definitésgkritérium) Egy valós (illetve komplex) számtest feletti vektortéren értelmezett valós értékű kvadratikuss alak pontosan akkor

(i) pozitív definit, ha a sarokaldeterminánsok sorozata pozitív.

(ii) negatív definit, ha a sarokaldeterminánsok sorozata jelváltó és $D_1 < 0$.

17. Euklideszi terek

17.1 Definíció:

- (i) Legyen V egy a valós számtest feletti vektortér, $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvény. Ekkor f -et valós skaláris szorzásnak nevezzük.
- (ii) Legyen V egy a komplex számtest feletti vektortér, $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ pozitív definit Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor f -et komplex skaláris szorzásnak nevezzük.

17.2 Példa:

- (i) $(,): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \underline{u}^T \underline{I} \underline{v}$.
 Ez $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett valós skaláris szorzás, mátrixa $\underline{I}$.
- (ii) $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T \underline{A} \underline{v}$, ahol $\underline{A}$ szimmetrikus mátrix, melynek sajátértékei pozitívak.
 Ekkor f $\mathbb{R}^n$ -en valós skaláris szorzás.
- (iii) $(,): \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$
 $(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i = \underline{\bar{u}}^T \underline{I} \underline{v}$.
 Ez $\mathbb{C}^n$ -en komplex skaláris szorzás, mátrixa $\underline{I}$.
- (iv) $f: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$
 $f(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\bar{u}} \underline{A} \underline{v}$, ahol $\underline{A}$ önadjungált mátrix, melynek sajátértékei pozitívak.
 Ekkor f $\mathbb{C}^n$ -en komplex skaláris szorzás.

17.3 Definíció: Legyen V egy a valós (illetve komplex) számtest feletti vektortér. Ha f V -n valós (illetve komplex) skaláris szorzás. Ekkor a (V, f) párt valós (illetve komplex) euklideszi térnek nevezzük.

17.4 Definíció: Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér. A $\sqrt{f(\underline{u}, \underline{u})}$ vektor hosszának, vagy normájának nevezzük és $\|\underline{u}\|$ -vel jelöljük a $\sqrt{f(\underline{u}, \underline{u})}$ nemnegatív valós számot.

17.5 Példa:

$(\mathbf{R}^n, \cdot)$ euklideszi térben $\|\underline{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$

$(\mathbf{R}[x], \varphi)$ euklideszi tér, ahol φ a 15.13 példában van definiálva.

Ekkor $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ esetén $\|p(x)\| = \sqrt{\int_a^b p(x)^2 dx}$

17.6 Definíció: Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér. Azt mondjuk, hogy az $\underline{u}, \underline{v} \in V$ vektorok *merőlegesek* vagy *ortogonálisak*, ha $f(\underline{u}, \underline{v}) = 0$. Ezt a tényt $\underline{u} \perp \underline{v}$ -vel jelöljük. $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\} \subset V$ *ortonormált* vektorrendszer, ha $f(\underline{u}_i, \underline{u}_j) = \delta_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$.

17.7 Tétel (Bessel-egyenlőtlenség):

Egy (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi térben ha $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ ortonormált vektorrendszer, akkor

$$(i) \sum_{i=1}^n |f(\underline{u}_i, \underline{u})|^2 \leq \|\underline{u}\|^2.$$

(ii) Az $\underline{u}' = \underline{u} - \sum_{i=1}^n f(\underline{u}_i, \underline{u})\underline{u}_i$ vektor merőleges $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ vektorokra, így az általuk generált altér összes vektorára is.

Bizonyítás: A komplex esetre bizonyítunk, a valós eset hasonlóan bizonyítható.

(i) Legyen $\underline{u}'$ a (ii) pontban definiált vektor. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 \leq f(\underline{u}', \underline{u}') &= f(\underline{u} - \sum_{i=1}^n f(\underline{u}_i, \underline{u})\underline{u}_i, \underline{u} - \sum_{i=1}^n f(\underline{u}_i, \underline{u})\underline{u}_i) = \\ &= f(\underline{u}, \underline{u}) - \sum_{i=1}^n \overline{f(\underline{u}_i, \underline{u})} f(\underline{u}_i, \underline{u}) - \sum_{i=1}^n f(\underline{u}_i, \underline{u}) f(\underline{u}, \underline{u}_i) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |f(\underline{u}_i, \underline{u})|^2 = f(\underline{u}, \underline{u}) - \sum_{i=1}^n |f(\underline{u}_i, \underline{u})|^2, \end{aligned}$$

amiből átrendezéssel a kívánt egyenlőtlenség következik.

(ii) $f(\underline{u}', \underline{u}_i) = f(\underline{u}, \underline{u}_i) - \overline{f(\underline{u}_i, \underline{u})} = 0$ $i = 1, \dots, n$. f bilinearitása miatt az $\langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n \rangle$ altér összes elemére is merőleges $\underline{u}'$.

17.8 Következmény (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség)

Egy (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi térben minden $\underline{a}, \underline{b} \in V$ vektorra az

$$|f(\underline{a}, \underline{b})| \leq \|\underline{a}\| \|\underline{b}\|$$

egyenlőtlenség.

Itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ összefüggő vektorrendszer.

Bizonyítás: Ha $\underline{a} = \underline{0}$, akkor nyilván mindkét oldalon nulla áll. Egyébként az $\left\{ \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|} \right\}$ egyelemű ortonormált vektorrendszerre és $\underline{u} = \underline{b}$ vektorra a Bessel-egyenlőtlenség

$$\left| f\left(\frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|}, \underline{b}\right) \right|^2 \leq \|\underline{b}\|^2$$

tehát $|f(\underline{a}, \underline{b})|^2 \leq \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2$, amelyből az állítás gyökvonással kapható.

Az előző tétel bizonyításából következik, hogy egyenlőség $\underline{a} \neq \underline{0}$ esetben pontosan akkor áll, ha

$$\underline{b} = f\left(\frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|}, \underline{b}\right) \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|}.$$

Ekkor $\underline{b}$ $\underline{a}$ -nak skalárszorosa. Ha $\underline{b} = \lambda \underline{a}$, akkor

$$\lambda \underline{a} = f\left(\frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|}, \lambda \underline{a}\right) \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|}$$

teljesül, tehát egyenlőség áll.

17.9 Következmény

$$|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Egy (V, f) valós euklideszi térben értelmezhető a vektorok szöge.

Ha $\underline{a}, \underline{b} \in V \setminus \{\underline{0}\}$, akkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által bezárt φ szög cosinusát a

$$\cos \varphi = \frac{f(\underline{a}, \underline{b})}{\|\underline{a}\| \|\underline{b}\|}$$

képlettel értelmezzük.

Ez a definíció értelmes, hiszen $-1 \leq \frac{f(\underline{a}, \underline{b})}{\|\underline{a}\| \|\underline{b}\|} \leq 1$

mátrixa felső háromszögmátrix.

Bizonyítás: $\|\underline{e}_1\| = 1$ és $\langle \underline{e}_1 \rangle = \langle \underline{v}_1 \rangle$ triviálisan teljesül.

Tegyük fel, hogy $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i$ ortonormált vektorrendszer és $\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_j \rangle = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_j \rangle$ $j = 1, \dots, i$ esetén teljesül.

Ekkor $\underline{e}'_{i+1} = \underline{v}_{i+1} - \sum_{j=1}^i f(\underline{e}_j, \underline{v}_{i+1}) \underline{e}_j$ a 17.7 Tétel (ii) pontja szerint merőleges az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i$ vektorokra.

Mivel $\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i \rangle = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i \rangle$, $\underline{v}_{i+1} \notin \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i \rangle$, tehát $\underline{e}'_{i+1} \neq \underline{0}$. Így $\underline{e}_{i+1} = \frac{\underline{e}'_{i+1}}{\|\underline{e}'_{i+1}\|}$ értelmes és egységnyi normájú.

Az eljárás tehát nem szakadhat meg csak az n -edik lépésben és akkor a kívánt tulajdonságokkal rendelkező $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ ortonormált bázishoz jutunk.

Könnyen látható, hogy (V, f) euklideszi tér esetén, ha $W \leq V$ altér, akkor (W, f) is euklideszi tér. A következő tételben belátjuk, hogy (W, f) minden ortonormált bázisa kiegészíthető a (V, f) tér ortonormált bázisává.

17.15 Tétel: Egy (V, f) n -dimenziós valós (illetve komplex) euklideszi térben minden $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$ ortonormált vektorrendszer kiegészíthető ortonormált $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázissá.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$ kiegészíthető a V vektortér egy $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ bázisává. Alkalmazzuk erre a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást.

Ekkor $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$ helyben marad és egy $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{e}_{k+1}, \dots, \underline{e}_n\}$ ortonormált bázishoz jutunk.

17.16 Definíció: Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér, $U \leq V$ altér. $U^\perp$ -sel jelöljük V -ben az U elemeire merőleges vektorok halmazát, azaz $U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}, \underline{u}) = 0 \ \forall \underline{u} \in U\}$.

17.18 Megjegyzés: $U^\perp$ szintén altér V -ben, hiszen $\underline{0} \in U^\perp$, ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in U^\perp$, akkor $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{u}) = f(\underline{v}_1, \underline{u}) + f(\underline{v}_2, \underline{u}) = 0 \ \forall \underline{u} \in U$ esetén, és $f(\lambda \underline{v}_1, \underline{u}) = \lambda f(\underline{v}_1, \underline{u}) = 0 \ \forall \lambda$ skalárra és $\forall \underline{u} \in U$ -ra. Könnyű ellenőrizni, hogy $U^\perp$ -re a többi vektortéraxiómák is teljesülnek.

17.19 Tétel: Legyen (V, f) véges dimenziós valós (vagy komplex) euklideszi tér. Ekkor minden $U \leq V$ altérre

17.10 Megjegyzés: A 17.7 Tételben szereplő $f(\underline{u}_i, \underline{u})$ együtthatót az $\underline{u}$ vektor $\underline{u}_i$ irányú skalárvetületének vagy Fourier-együtthatójának nevezzük. A $\sum_{i=1}^n f(\underline{u}_i, \underline{u}) \underline{u}_i$ vektort az $\underline{u}$ vektor $\langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n \rangle$ altérre való ortogonális vetületének nevezzük.

17.11 Definíció: Ha a (V, f) euklideszi térben egy $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázist veszünk fel, akkor az f bilineáris függvénynek $\underline{A} = (f(\underline{e}_i, \underline{e}_j))$ mátrixát a (V, f) euklideszi tér metrikus tenzorának nevezzük.

17.12 Megjegyzés: Az ún. Riemann-terekben, amelyek lokálisan euklideszi terek (például gömb, tórusz) a metrikus tenzor pontról pontra változik.

Az ortogonalítás és a függetlenség kapcsolatára utal a következő tétel.

17.13 Tétel: Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér, $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ páronként ortogonális nem nulla vektorok. Ekkor $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ független vektorrendszer. Speciálisan ortonormált vektorrendszer független.

Bizonyítás: Ha $\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i = \underline{0}$, akkor $0 = f(\underline{e}_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i) = \alpha_j f(\underline{e}_j, \underline{e}_j)$ $j = 1, \dots, n$. f pozitív definitése miatt ebből $\alpha_j = 0$ $j = 1, \dots, n$, azaz $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ független.

Most algoritmust adunk arra, hogy egy euklideszi tér egy tetszőleges $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ bázisából kiindulva egy olyan $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ ortonormált bázist kapjunk, amelyre $\langle \underline{v}_1 \rangle = \langle \underline{e}_1 \rangle, \dots, \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i \rangle = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i \rangle, \dots, \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle$ is teljesül.

17.14 Tétel (Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció):

Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér, $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ egy bázis V -ben. Ekkor indukcióval definiáljuk $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ -et:

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|}$$

Ha $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i$ már ismert, akkor

$$\underline{e}'_{i+1} = \underline{v}_{i+1} - \sum_{j=1}^i f(\underline{e}_j, \underline{v}_{i+1}) \underline{e}_j \quad \text{és} \quad \underline{e}_{i+1} = \frac{\underline{e}'_{i+1}}{\|\underline{e}'_{i+1}\|}$$

Ekkor $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ V -ben ortonormált bázis, amelyre $\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i \rangle = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$ esetén. Azaz a $T(\underline{v}_i) = \underline{e}_i$, $i = 1, \dots, n$ báziscsere transzformáció

(i) $U \oplus U^\perp = V$ és így $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

(ii) $(U^\perp)^\perp = U$

Bizonyítás:

(i) Láttuk, hogy (U, f) is euklideszi tér. Legyen $\{e_1, \dots, e_k\}$ U -ban ortonormált bázis. Egészítsük ki ezt V egy $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ ortonormált bázisává.

Nyilvánvaló, hogy $U^\perp \supseteq \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$, így $\langle U, U^\perp \rangle = V$. Ha $\underline{x} \in U \cap U^\perp$, akkor $f(\underline{x}, \underline{x}) = 0$, tehát $\underline{x} = \underline{0}$, így $V = U \oplus U^\perp$.

(ii) Nyilvánvaló, hogy $(U^\perp)^\perp \supseteq U$. Irjuk fel az (i)-beli összefüggést az $U^\perp$ altérre. Ebből $\dim(U^\perp) + \dim(U^\perp)^\perp = \dim V$, tehát azt az (i)-beli eredménnyel összevetve kapjuk, hogy $\dim(U^\perp)^\perp = \dim U$. Mivel U véges dimenziós, azt kapjuk, hogy $(U^\perp)^\perp = U$.

17.20 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy a fenti tétel feltételei mellett, ha egy $\underline{v} \in V$ vektorra $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$, ahol $\underline{u}_1 \in U$ és $\underline{u}_2 \in U^\perp$, akkor $\underline{u}_1$ éppen $\underline{v}$ -nek az $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ altérre vonatkozó ortogonális vetülete. Lássuk be azt is, hogy $\|\underline{v} - \underline{u}_1\| = \min_{\underline{u} \in U} \|\underline{v} - \underline{u}\|$.

17.21 Definíció: Legyenek (V_1, f_1) (V_2, f_2) valós (illetve komplex) euklideszi terek. Azt mondjuk, hogy egy $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezés *izometria*, ha

(i) $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ vektortérizomorfizmus

(ii) $f_1(\underline{u}, \underline{v}) = f_2(\varphi(\underline{u}), \varphi(\underline{v})) \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V_1$ esetén.

Ha (V_1, f_1) és (V_2, f_2) euklideszi terek között létezik egy φ izometria, akkor a (V_1, f_1) és (V_2, f_2) euklideszi tereket *izomorfaknak* nevezzük, és ezt a tényt $(V_1, f_1) \cong (V_2, f_2)$ -vel jelöljük.

Láttuk, hogy azonos test feletti véges dimenziós vektorterek pontosan akkor izomorfak, ha azonos a dimenziójuk. Most ezt belátjuk euklideszi terekre is.

17.22 Tétel: Legyenek (V_1, f_1) , (V_2, f_2) azonos test feletti valós (illetve komplex), véges dimenziós euklideszi terek.

Ekkor $(V_1, f_1) \cong (V_2, f_2)$ pontosan akkor, ha $\dim V_1 = \dim V_2$.

Bizonyítás: A komplex esetre bizonyítunk, valósra a bizonyítás hasonló. Ha $(V_1, f_1) \cong (V_2, f_2)$, akkor $V_1 \cong V_2$, és így $\dim V_1 = \dim V_2$. Ha $\dim V_1 = \dim V_2 = n$ akkor válasszunk V_1 -ben egy $\{e_1, \dots, e_n\}$ V_2 -ben egy $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ ortonormált bázist.

Ekkor létezik *egyetlen* olyan $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor, amelyre $\varphi(e_i) = e'_i$, $i = 1, \dots, n$. Hasonlóan mint a 13.18 Megjegyzés bizonyításában itt is belátható, hogy ez vektortérizomorfizmus.

Belátjuk, hogy φ izometria is. Legyen $\underline{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $\underline{v} = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$. Ekkor $f_1(\underline{u}, \underline{v}) = f_1(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f_1(e_i, e_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f_2(e'_i, e'_j) = f_2(\sum_{i=1}^n \alpha_i e'_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e'_j) = f_2(\varphi(\underline{u}), \varphi(\underline{v}))$.

17.23 Következmény: Minden n dimenziós valós euklideszi tér az $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ -nel minden n dimenziós komplex euklideszi tér $(\mathbb{C}^n, (\cdot, \cdot))$ -nel izomorf.

18. Lineáris transzformációk euklideszi terekben

Célunk a főtengelytétel és az ahhoz kapcsolódó tételek bizonyítása lesz. Ennek egy absztraktabb változatát bizonyítjuk be, amelyből aztán több más eredmény is következni fog. Először néhány fogalmat vezetünk be.

18.1 Definíció: Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér. Egy $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció *adjungáltjának* nevezzük és A^* -gal jelöljük a $B : V \rightarrow V$ lineáris transzformációt, ha $f(A\underline{u}, \underline{v}) = f(\underline{u}, B\underline{v})$ teljesül minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén.

18.2 Tétel: Legyen (V, f) véges dimenziós valós (illetve komplex) euklideszi tér, $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Ekkor A^* létezik és egyértelmű, A^* mátrixa ortonormált bázisban éppen $[A]^T$ (a komplex esetben $\overline{[A]^T}$).

Bizonyítás: A komplex esetet bizonyítjuk, a valós eset hasonlóan látható be. Vegyünk fel V -ben egy ortonormált bázist. Ebben a bázisban f mátrixa egységmátrix, így $f(A\underline{u}, \underline{v}) = \overline{[A\underline{u}]^T} [v] = \overline{[\underline{u}]^T [A]^T} [v]$. Ha A -nak létezik egy B adjungáltja, akkor $f(A\underline{u}, \underline{v}) = f(\underline{u}, B\underline{v}) = \overline{[\underline{u}]^T} [B] [v]$. Így $\overline{[\underline{u}]^T} [A]^T [v] = \overline{[\underline{u}]^T} [B] [v]$ $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén. Ez utóbbi egyenlőség bal és jobb oldala egy-egy bilineáris függvényt definiál, melyek egyenlőek. Tehát a 16.4 Tétel szerint mátrixaik is egyenlőek, azaz $\overline{[A]^T} = [B]$. Tehát A adjungáltja, ha létezik akkor egyértelmű és épp az a lineáris transzformáció, melynek mátrixa a rögzített ortonormált bázisban $\overline{[A]^T}$. Az így definiált $B : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció viszont a fentiek szerint eleget tesz az adjungáltra tett feltételeknek.

Most az adjungált transzformáció tulajdonságait vesszük sorba.

18.3 Tétel: Legyen (V, f) véges dimenziós valós (illetve komplex) euklideszi tér. $A, B : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, A^*, B^* ezek adjungáltjai.

Ekkor

(i) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(A^*)^* = A$

$$(iv) (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$$

$$(v) (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

$$(vi) (AB)^* = B^* A^*$$

$$(vii) id_V^* = id_V$$

$$(viii) 0^* = 0$$

Bizonyítás: Csak (v)-öt bizonyítjuk, a többi hasonlóan kapható. A komplex esetet tárgyaljuk, a valós eset hasonlóan látható be. Vegyünk egy ortonormált bázist. Ebben az $[(AB)^*] = \overline{[AB]}^T = \overline{([A][B])}^T = \overline{[B]}^T \overline{[A]}^T = [B^*][A^*] = [B^* A^*]$ egyenlőség teljesül a koordinátamátrixokra. Tehát $(AB)^* = B^* A^*$.

18.4 Definíció: Legyen (V, f) komplex euklideszi tér. Egy $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció

(i) önadjungált, ha $A^* = A$

(ii) ferdén önadjungált, ha $A^* = -A$

(iii) unitér, ha $A^* = A^{-1}$

(iv) normális, ha $A^* A = A A^*$

18.5 Definíció: Legyen (V, f) valós euklideszi tér. Egy $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció

(i) szimmetrikus, ha $A^* = A$

(ii) antiszimmetrikus, ha $A^* = -A$

(iii) ortogonális, ha $A^* = A^{-1}$

(iv) normális, ha $A^* A = A A^*$

18.6 Megjegyzés: Könnyen látható, hogy komplex euklideszi tér önadjungált, ferdén önadjungált és unitér lineáris transzformációja normális, valamint valós euklideszi tér szimmetrikus, antiszimmetrikus és ortogonális lineáris transzformációja normális.

18.7 Példa: $A \in M_n(\mathbb{C})$ komplex euklideszi térben egy $\underline{A} \in M_n(\mathbb{C})$

(i) önadjungált mátrixszal való szorzás önadjungált

(ii) ferdén önadjungált mátrixszal való szorzás ferdén önadjungált

(iii) unitér mátrixszal való szorzás unitér

(iv) normális mátrixszal való szorzás normális lineáris transzformáció.

Az $(\mathbb{R}^n, (,))$ valós euklideszi térben egy $\underline{A} \in M_n(\mathbb{R})$

(i) szimmetrikus mátrixszal való szorzás szimmetrikus

(ii) antiszimmetrikus mátrixszal való szorzás antiszimmetrikus

(iii) ortogonális mátrixszal való szorzás ortogonális

(iv) normális mátrixszal való szorzás normális lineáris transzformáció.

Bizonyítás: Csak az önadjungált esetet bizonyítjuk, a többi hasonlóan látható be. Legyen $\underline{A} \in M_n(\mathbb{C})$ önadjungált mátrix. Azt kell belátni, hogy $(\underline{A}u, v) = (u, \underline{A}v)$ $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$ esetén. De $(\underline{A}u, v) = \overline{(\underline{A}u)}^T v = \overline{u}^T \overline{\underline{A}}^T v = \overline{u}^T \underline{A} v = (u, \underline{A}v)$, így az állítás igaz.

18.8 Tétel: Egy (V, f) véges dimenziós komplex euklideszi térben egy $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformációra a következő állítások ekvivalensek:

(i) A önadjungált lineáris transzformáció

(ii) minden ortonormált bázisban A mátrixa önadjungált mátrix

(iii) létezik V -ben olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa önadjungált mátrix.

Analóg állítások igazak ferdén önadjungált, unitér, normális transzformációkra, illetve valós euklideszi tér esetében szimmetrikus, ferdén szimmetrikus, ortogonális és normális transzformációkra.

Bizonyítás:

(i) $\rightarrow$ (ii) $A = A^*$ vegyünk egy ortonormált bázist V -ben. Ebben a koordinátamátrixokra teljesül $[A] = [\overline{A}^*]^T = [\overline{A}]^T$, tehát $[A]$ önadjungált mátrix.

(ii) $\rightarrow$ (iii) A 17.14 tétel szerint van V -ben ortonormált bázis, tehát ebben A mátrixa (ii) szerint önadjungált mátrix.

(iii) $\rightarrow$ (i) A feltevés szerint van V -ben olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa önadjungált mátrix, azaz $[A] = [\bar{A}]^T$. De $[\bar{A}]^T = [A^*]$ így $[A] = [A^*]$, és ebből $A = A^*$ következik.

18.9 Tétel: Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér. Legyen $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Ha $U \leq V$ A -nak invariáns altere, akkor $U^\perp$ A^* -nak invariáns altere.

Bizonyítás: Legyen $\underline{v} \in U^\perp$, belátjuk, hogy $A^*\underline{v} \in U^\perp$, azaz $f(\underline{u}, A^*\underline{v}) = 0 \forall \underline{u} \in U$ esetén. De $f(\underline{u}, A^*\underline{v}) = f(A\underline{u}, \underline{v}) = 0$, hiszen $A\underline{u} \in U$ és $\underline{v} \in U^\perp$.

18.10 Tétel: Legyen (V, f) komplex euklideszi tér. Ekkor minden

(i) önadjungált lineáris transzformáció sajátértékei valósak.

(ii) ferdén önadjungált lineáris transzformáció nem 0 sajátértékei tiszta képzetesek

(iii) unitér lineáris transzformáció sajátértékei egységnyi abszolút értékűek.

Bizonyítás:

(i) Legyen $A\underline{s} = \lambda\underline{s}$, $\underline{s} \neq \underline{0}$. Ekkor $\bar{\lambda}f(\underline{s}, \underline{s}) = f(\lambda\underline{s}, \underline{s}) = f(A\underline{s}, \underline{s}) = f(\underline{s}, A\underline{s}) = f(\underline{s}, \lambda\underline{s}) = \lambda f(\underline{s}, \underline{s})$. Mivel $f(\underline{s}, \underline{s}) \neq 0$, ezért $\lambda = \bar{\lambda}$, tehát λ valós.

(ii) Legyen $A\underline{s} = \lambda\underline{s}$, $\underline{s} \neq \underline{0}$. Ekkor $\bar{\lambda}f(\underline{s}, \underline{s}) = f(\lambda\underline{s}, \underline{s}) = f(A\underline{s}, \underline{s}) = f(\underline{s}, -A\underline{s}) = f(\underline{s}, -\lambda\underline{s}) = -\lambda f(\underline{s}, \underline{s})$. Tehát $\bar{\lambda} = -\lambda$, azaz λ tiszta képzetes vagy nulla.

(iii) Legyen $A\underline{s} = \lambda\underline{s}$, $\underline{s} \neq \underline{0}$. Ekkor $\bar{\lambda}f(\underline{s}, \underline{s}) = f(\lambda\underline{s}, \underline{s}) = f(A\underline{s}, \underline{s}) = f(\underline{s}, A^{-1}\underline{s}) = f(\underline{s}, \frac{1}{\lambda}\underline{s}) = \frac{1}{\lambda}f(\underline{s}, \underline{s})$. Tehát $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$, azaz $|\lambda| = 1$.

18.11 Tétel (Komplex főtengelytétel vagy spektráltétel): Ha (V, f) véges dimenziós komplex euklideszi tér és $A : V \rightarrow V$ önadjungált lineáris transzformáció, akkor V -ben van olyan ortonormált bázis, amely A sajátvektoraiból áll. Ebben a bázisban A mátrixa diagonális mátrix, a diagonális elemek A sajátértékei, amelyek valósak.

Bizonyítás: A bizonyítást $\dim V = n$ -re vonatkozó indukcióval végezzük. Ha $n = 1$, akkor nincs mit bizonyítanunk.

Tegyük fel, hogy $n - 1$ dimenziós térre igaz az állítás. Legyen $\underline{s}_1$ A -nak egy egységnyi normájú sajátvektora. Ekkor $V = \langle \underline{s}_1 \rangle \oplus \langle \underline{s}_1 \rangle^\perp$, ahol $\langle \underline{s}_1 \rangle$ A -ra invariáns 1 dimenziós altér, tehát $\langle \underline{s}_1 \rangle^\perp$ $A^* = A$ -ra invariáns $n - 1$ dimenziós altér. Tehát $A|_{\langle \underline{s}_1 \rangle^\perp}$ -nek is önadjungált lineáris transzformációja, így az indukció szerint van $\langle \underline{s}_1 \rangle^\perp$ -ben olyan ortonormált bázis, amely A sajátvektoraiból áll. Ez $\underline{s}_1$ -gyel együtt V -nek ortonormált bázisát adja, amely A sajátvektoraiból áll. A 18.10 Tétel szerint A sajátértékei valósak. A sajátvektorok bázisában A mátrixa diagonális mátrix, ahol a diagonálisban a sajátértékek állnak.

A fenti bizonyításhoz hasonlóan látható be a következő tétel is.

18.12 Tétel: Ha (V, f) véges dimenziós komplex euklideszi tér, és $A : V \rightarrow V$ unitér lineáris transzformáció, akkor V -ben van olyan ortonormált bázis, amely A sajátvektoraiból áll. Ebben a bázisban A mátrixa diagonális mátrix, a diagonális elemek A sajátértékei, melyek egységnyi abszolútértékűek.

Analóg tétel igaz normális lineáris transzformációra is, ehhez szükségünk van előbb a következő eredményre.

18.13 Tétel: Legyen (V, f) komplex euklideszi tér. Ha $A : V \rightarrow V$ normális lineáris transzformáció, akkor A -nak minden sajátvektora A^* -nak is sajátvektora. Ha $A\underline{s} = \lambda\underline{s}$, $\underline{s} \neq \underline{0}$, akkor $A^*\underline{s} = \bar{\lambda}\underline{s}$. A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai ortogonálisak.

Legyen most (V, f) valós euklideszi téren, A normális lineáris transzformáció. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ A -nak sajátértéke és $A\underline{s} = \lambda\underline{s}$ $\underline{s} \neq \underline{0}$, akkor $A^*\underline{s} = \lambda\underline{s}$ is teljesül.

Bizonyítás: A komplex esetre bizonyítunk, a valós esetre vonatkozó állítás hasonlóan látható be.

Ha $A\underline{s} = \lambda\underline{s}$ és $\underline{s} \neq \underline{0}$, akkor $(A - \lambda \text{id}_V)\underline{s} = \underline{0}$. Így $0 = f((A - \lambda \text{id}_V)\underline{s}, (A - \lambda \text{id}_V)\underline{s}) = f(\underline{s}, (A - \lambda \text{id}_V)^*(A - \lambda \text{id}_V)\underline{s}) = f(\underline{s}, (A^* - \bar{\lambda} \text{id}_V)(A - \lambda \text{id}_V)\underline{s}) = f(\underline{s}, (A - \lambda \text{id}_V)(A^* - \bar{\lambda} \text{id}_V)\underline{s}) = f(\underline{s}, ((A - \lambda \text{id}_V)^*)^*(A^* - \bar{\lambda} \text{id}_V)\underline{s}) = f((A - \lambda \text{id}_V)^*\underline{s}, (A^* - \bar{\lambda} \text{id}_V)\underline{s}) = f((A^* - \bar{\lambda} \text{id}_V)\underline{s}, (A^* - \bar{\lambda} \text{id}_V)\underline{s})$. Mivel f pozitív definit, így $(A^* - \bar{\lambda} \text{id}_V)\underline{s} = \underline{0}$ azaz $A^*\underline{s} = \bar{\lambda}\underline{s}$.

Legyen $A\underline{s} = \lambda\underline{s}$, $A\underline{u} = \mu\underline{u}$ $\mu \neq \lambda$. Ekkor $\lambda f(\underline{s}, \underline{u}) = f(A^*\underline{s}, \underline{u}) = f(\underline{s}, A\underline{u}) = \mu f(\underline{s}, \underline{u})$. Tehát $f(\underline{s}, \underline{u}) = 0$.

Most bebizonyítjuk a normális transzformációkra vonatkozó tételt. Mivel minden önadjungált és unitér transzformáció normális, ezért így módon ez és a 18.10 Tétel bizonyítást ad a 18.11 és a 18.12 tételekre is.

18.14 Tétel: Legyen (V, f) véges dimenziós komplex euklideszi tér, $A : V \rightarrow V$ normális lineáris transzformáció. Ekkor V -ben van olyan ortonormált bázis, amely A -sajátvektoraiból áll. Ebben a bázisban A mátrixa diagonális mátrix, ahol a diagonális elemek A sajátértékei.

Bizonyítás: $\dim V = n$ -re vonatkozó indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ -re az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $n - 1$ dimenziós térre igaz az állítás. Legyen $\underline{s}_1$ A -nak egy egységnyi normájú sajátvektora. Ekkor $V = \langle \underline{s}_1 \rangle \oplus \langle \underline{s}_1 \rangle^\perp$. Az előző tétel szerint $\langle \underline{s}_1 \rangle^\perp$ A -nak és A^* -nak közös invariáns altére, tehát $\langle \underline{s}_1 \rangle^\perp$ A^* -ra és $(A^*)^* = A$ -ra is invariáns altér a 18.9 Tétel szerint. Tehát $A|_{\langle \underline{s}_1 \rangle^\perp}$ -nek is normális lineáris transzformációja. $\dim \langle \underline{s}_1 \rangle^\perp = n - 1$, így az indukció szerint van $\langle \underline{s}_1 \rangle^\perp$ -ben olyan ortonormált bázis, amely A sajátvektoraiból áll. Ez $\underline{s}_1$ -gyel együtt V -nek ortonormált bázisát adja. Ebben a bázisban A mátrixa diagonális mátrix, ahol a diagonálisban A sajátértékei állnak.

18.15 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy (V, f) komplex euklideszi téren egy $A : V \rightarrow V$ ferdén önadjungált lineáris transzformációhoz létezik V -ben olyan ortonormált bázis, amely A sajátvektoraiból áll. Ebben a bázisban A mátrixa diagonális mátrix, a diagonális elemek A sajátértékei, melyek tiszta képzetesek vagy nullák.

18.16 Feladat: Bizonyítsuk be a 18.11, 18.12, 18.13 és 18.14 tételek megfordítását, azaz lássuk be, hogy ha létezik V -ben olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális, akkor A normális, ha még ezen kívül tudjuk, hogy a diagonális elemek valósak (egységnyi abszolút értékűek illetve tiszta képzetesek), akkor A önadjungált (unitér, ferdén önadjungált) lineáris transzformáció.

18.17 Megjegyzés: Könnyen látható, hogy a 13.28 Tétel analógja unitér mátrixokra is igaz. Itt az ortonormáltság a $(\mathbb{C}^n, (,))$ térben értendő.

18.18 Következmény: Egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix pontosan akkor

(i) normális mátrix

(ii) önadjungált mátrix

(iii) ferdén önadjungált mátrix

(iv) unitér mátrix

ha létezik olyan $\underline{U} \in M_n[\mathbb{C}]$ unitér mátrix, hogy $\underline{U}^{-1} \underline{A} \underline{U}$

(i) diagonális mátrix.

(ii) diagonális mátrix és a diagonális elemek valósak.

(iii) diagonális mátrix és a diagonális elemek tiszta képzetesek vagy nullák.

(iv) diagonális mátrix és a diagonális elemek egységnyi abszolút értékűek.

Bizonyítás: Csak az önadjungált esetet bizonyítjuk a többi hasonló módon látható be.

Ha $\underline{A}$ önadjungált mátrix, akkor a $(\mathbb{C}^n, (,))$ komplex euklideszi téren a vele való szorzás önadjungált lineáris transzformáció. Tehát $\underline{A}$ sajátértékei valósak és létezik a $(\mathbb{C}^n, (,))$ térben olyan ortonormált $\{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n\}$ bázis, amely $\underline{A}$ sajátvektoraiból áll. Tehát $\underline{A}$ egyszerű struktúrájú mátrix. Legyen $\underline{U}$ az a mátrix, amelynek oszlopvektorai $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$. Ekkor a 18.17 Megjegyzés szerint $\underline{U}$ unitér mátrix és

$$\underline{U}^{-1} \underline{A} \underline{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, n$ az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei. Ha egy $\underline{U}$ unitér mátrixra $\underline{U}^{-1} \underline{A} \underline{U} = \underline{D}$, ahol $\underline{D}$ valós diagonális mátrix, akkor $\underline{A} = \underline{U} \underline{D} \underline{U}^{-1}$ mátrix önadjungált, hiszen $\underline{A}^T = \underline{U} \underline{D}^T \underline{U}^T = \underline{U} \underline{D} \underline{U}^{-1} = \underline{A}$.

18.19 Következmény (Valós főtengety tétel mátrixokra): Ha $\underline{A} \in M_n[\mathbb{R}]$ szimmetrikus mátrix, akkor $\underline{A}$ sajátértékei valósak és létezik $\mathbb{R}^n$ -ben $\underline{A}$ -nak ortonormált sajátvektorrendszere $\{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n\}$. Legyen $\underline{M} \in M_n[\mathbb{R}]$ az az ortogonális mátrix, melynek oszlopvektorai $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$. Ekkor

$$\underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek.

Bizonyítás: $\underline{A} \in M_n[\mathbf{R}]$ így $\underline{A} \in M_n[\mathbf{C}]$ és $\underline{A}$ önadjungált mátrix. Így az előzőek szerint $\underline{A}$ sajátértékei valósak.

Most megismételhetjük a 18.11 Tétel bizonyítását az $(\mathbf{R}^n, (,))$ euklideszi térre és az $\underline{A}$ -val való szorzásra, mint lineáris transzformációra, amely mint tudjuk szimmetrikus lineáris transzformáció. A sajátvektorok azért lesznek $\mathbf{R}^n$ -beli vektorok, mert egy valós együtthatós egyenletrendszer megoldásai.

Így egy $\{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n\} \subset \mathbf{R}^n$ ortonormált sajátvektorrendszerhez jutunk. Ha $\underline{M} \in M_n[\mathbf{R}]$ az ezekből mint oszlopvektorokból álló mátrix, akkor erre az ortogonális mátrixra a fenti állítások teljesülnek.

18.20 Következmény: (Valós főtengetyítétel) Legyen (V, f) véges dimenziós valós euklideszi tér, $A : V \rightarrow V$ szimmetrikus lineáris transzformáció. Ekkor A sajátértékei valósak és van V -ben olyan ortonormált bázis, amely A sajátvektoraiból áll. Ebben a bázisban A mátrixa valós diagonális mátrix.

Bizonyítás: Vegyünk V -ben egy tetszőleges ortonormált bázist. Ebben A mátrixa $[A]$, a 18.8 Tétel szerint szimmetrikus mátrix, f mátrixa $\underline{I}$, így $f(\underline{u}, \underline{v}) = [\underline{u}]^T [\underline{v}]$, azaz f hatásának éppen az $\mathbf{R}^n$ -beli skaláris szorzás felel meg a koordinátavektorokon. Az előző következmény szerint $[A]$ sajátértékei valósak és létezik $\mathbf{R}^n$ -ben olyan ortonormált bázis, amely $[A]$ sajátvektoraiból áll. Ennek ösképe a (V, f) téren egy olyan ortonormált bázis, amely A sajátvektoraiból áll. Ebben a bázisban A mátrixa a sajátértékeiből álló diagonális mátrix.

A fenti tételt úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a tér bizonyos egymásra ortogonális invariáns elterekre való felbontásáról mondunk ki tételt. Például az önadjungált illetve szimmetrikus transzformációkra ez így szól.

18.21 Tétel: Legyen (V, f) n dimenziós valós (illetve komplex) euklideszi tér, $A : V \rightarrow V$ szimmetrikus (önadjungált) lineáris transzformáció. Legyen $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ A -nak az előzőekben garantált ortonormált sajátvektorrendszere, amely bázis V -ben. Legyen $V_i = \langle \underline{s}_i \rangle$ $i = 1, \dots, n$. Ekkor $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ egymásra páronként ortogonális 1 dimenziós A -invariáns alterek direkt összege. Legyenek $\pi_i : V \rightarrow V_i$ $i = 1, \dots, n$ azok a leképezések, amelyekre $\underline{v} = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_n$ $\underline{v}_i \in V_i$ $i = 1, \dots, n$ $\underline{v} \in V$ esetén $\pi_i(\underline{v}) = \underline{v}_i$, $i = 1, \dots, n$. π_i -t a V_i -re való projekciónak nevezzük. Ezekre a következő tulajdonságok teljesülnek.

A π_i $i = 1, \dots, n$ leképezések lineáris operátorok, amelyekre

$$\pi_i^2 = \pi_i \quad \pi_i \pi_j = 0 \quad \text{ha } i \neq j$$

$$\text{id}_V = \pi_1 + \dots + \pi_n$$

és

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i,$$

ahol $\lambda_i \in \mathbf{R}$ az $\underline{s}_i$ -hez tartozó sajátértékek, $i = 1, \dots, n$.

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy $V_i = \langle \underline{s}_i \rangle$ $i = 1, \dots, n$ 1-dimenziós A -ra invariáns altér és $i \neq j$ -re V_i minden vektora ortogonális V_j minden vektorára.

Legyen $\underline{v} \in V$, ekkor $\underline{v} \in \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \rangle = V_1 + \dots + V_n$, tehát $V = V_1 + \dots + V_n$.

Ha $\underline{x} \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j$, akkor $f(\underline{x}, \underline{x}) = 0$, tehát $\underline{x} = \underline{0}$.

Így $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \underline{0}$, tehát $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$.

Nyilvánvaló, hogy $\pi_i^2 = \pi_i$, $\pi_i \pi_j = 0$, ha $i \neq j$, $\text{id}_V = \pi_1 + \dots + \pi_n$ és π_i lineáris operátor $i = 1, \dots, n$ esetén.

$A \underline{s}_i = \lambda_i \underline{s}_i$ $i = 1, \dots, n$ és $(\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i)(\underline{s}_i) = \lambda_i \underline{s}_i$ $i = 1, \dots, n$.

Tehát A és $\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i$ lineáris operátorok az $\{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n\}$ bázison megegyeznek. Így egyenlők is a 13.8 Tétel szerint.

18.22 Feladat. Fogalmazzunk meg az előzőkhöz hasonló tételt normális, unitér- és ferdén önadjungált lineáris transzformációra.

A főtengety tétel alkalmazható kvadratikus alakok négyzetösszegge transzformálására.

18.23 Tétel: (kvadratikus alakokra vonatkozó főtengetyítétel)

Legyen V egy valós (illetve komplex) számtest feletti vektortér $g : V \rightarrow \mathbf{R}$ valós értékű kvadratikus alak. Ekkor van V -ben olyan bázis, amelyben g mátrixa diagonális mátrix és $\underline{u} \in V$ esetén $g(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2$ (illetve $g(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |u_i|^2$).

Ha eredetileg egy (V, f) euklideszi térből indultunk ki akkor a fenti bázis választható ortonormálnak is.

Bizonyítás: A komplex esetre bizonyítunk. Hasonló módon látható be a valós eset is. Rögzítsük V -nek egy bázisát. g valós értékű kvadratikus alak, így a 16.11 Tétel szerint a hozzá tartozó bilineáris függvény Hermite-féle, és ennek a V -beli bázisban mátrixa egy $\underline{A}$ önadjungált mátrix.

Tehát $g(\underline{u}) = [\underline{u}]^T \underline{A} [\underline{u}]$. Legyen $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ $\underline{A}$ -nak a $(\mathbf{C}^n, (,))$ térben ortonormált sajátvektorrendszere. Ez bázis $\mathbf{C}^n$ -ben. Ha ennek a bázisnak a V -beli ösképe

térünk át, akkor a báziscseretranszformáció mátrixa $\underline{M} \in M_n[\mathbb{C}]$, melynek oszlopvektorai $[\underline{s}_1], \dots, [\underline{s}_n]$. $\underline{M}$ tehát unitér mátrix. Ha $[\underline{u}]$ az $\underline{u}$ koordinátavektora az új bázisban, akkor $\underline{M}[\underline{u}] = [\underline{u}]$, ezért

$$g(\underline{u}) = (\underline{M}[\underline{u}])^T \underline{A} \underline{M}[\underline{u}] = [\underline{u}]^T \underline{M}^T \underline{A} \underline{M}[\underline{u}] = \\ = [\underline{u}]^T \underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M}[\underline{u}] = [\underline{u}]^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} [\underline{u}] = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\underline{u}_i|^2.$$

Ha eleve egy (V, f) euklideszi térből indulunk ki, akkor a rögzített bázist f -re nézve ortonormálnak választjuk. Ebben a bázisban f mátrixa $\underline{I}$, tehát $[\underline{s}_1], \dots, [\underline{s}_n]$ ösképei f -re ortonormáltak lesznek, mivel $f(\underline{s}_i, \underline{s}_j) = [\underline{s}_i]^T \underline{I} [\underline{s}_j] = \delta_{ij}$.

18.24 Következmény (Két kvadratikus alak egyidejű négyzetösszegé transzformálása)

Legyen adott V valós (illetve komplex) számtest feletti vektortéren egy f pozitív definit és egy g valós értékű kvadratikus alak. Ekkor létezik V -ben olyan bázis, amelyben f mátrixa egységmátrix és g mátrixa valós diagonális mátrix. Ekkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n u_i^2$ (illetve $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n |u_i|^2$) és $g(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i^2$ (illetve $g(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |u_i|^2$).

Bizonyítás: Az előző tételt alkalmazzuk a (V, f) euklideszi térre.

18.25 Példa: Pontrendszer rezgése esetén a $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$ pozitív definit, a $V = \frac{1}{2} \sum_{i,k} b_{ik} q_i q_k$ potenciális energia valós értékű kvadratikus alak. Alkalmas bázisban $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i^2$, $V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i^2$ alakú lesz. Ezeket hívják a rendszer *normálkoordinátáinak* vagy Rayleigh-féle koordinátáknak.

18.26 Feladat: Legyen V, f és g mint a 18.24 Következményben. Rögzítsük V -nek egy bázisát. Legyen ebben f mátrixa F g mátrixa G . Bizonyítsuk be, hogy ekkor a fenti q_i $i = 1, \dots, n$ együtthatók éppen $\det[G - \lambda F]$ polinom gyökei.

18.27 Megjegyzés: Egy kvadratikus alak négyzetösszegé transzformálásánál az együtthatók nem egyértelműek.

Például $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i^2$ -nál, ha u_i helyett olyan $\tilde{u}_i$ koordinátákra térek át, amelyekre $u_i = \frac{\tilde{u}_i}{\sqrt{|\alpha_i|}}$, ha $\alpha_i \neq 0$, akkor elérhető, hogy minden együttható ± 1 vagy 0 legyen.

Viszont igaz a következő tétel.

18.28 Tétel (Sylvester-féle tehetetlenségi tétel): Egy V valós (illetve komplex) számtest feletti vektortéren értelmezett valós értékű kvadratikus alak négyzetösszegé transzformált alakjában egyértelmű, hogy hány együttható pozitív, nulla illetve negatív.

Bizonyítás: A valós esetet bizonyítjuk. Hasonlóan látható be a komplex eset is.

Legyen $g(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i^2$ kvadratikus alak az $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázisban felírva. Ebben a bázisban g mátrixa

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

A 16.11 Tétel szerint ehhez a kvadratikus alakhoz az

$$f(\underline{u}, \underline{v}) = [\underline{u}]^T \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} [\underline{v}]$$

szimmetrikus bilineáris függvény tartozik.

Tehát $f(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \delta_{ij} \alpha_i$

Sorszámozzuk át szükség szerint az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bázisvektorokat úgy, hogy

$$1 \leq i \leq p \text{ esetén } \alpha_i = f(\underline{e}_i, \underline{e}_i) > 0,$$

$$p+1 \leq i \leq p+s \text{ esetén } \alpha_i = f(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 0,$$

és

$$p+s+1 \leq i \leq n \text{ esetén } \alpha_i = f(\underline{e}_i, \underline{e}_i) < 0.$$

Legyen $E_1 = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_p \rangle$, $E_2 = \langle \underline{e}_{p+1}, \dots, \underline{e}_n \rangle$. Ekkor $V = E_1 \oplus E_2$. Az $f : E_1 \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris függvény pozitív definit, hiszen $\underline{0} \neq \underline{v} \in E_2$ esetén, ha $\underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{e}_i$, akkor $f(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i,j} v_i v_j f(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \sum_{i=1}^n v_i^2 \alpha_i > 0$.

Viszont $f : E_2 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris függvény negatív szemidefinit, hiszen $\underline{0} \neq \underline{v} \in E_2$ esetén, ha $\underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{e}_i$ akkor $f(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i,j} v_i v_j \alpha_i \leq 0$.

Tegyük fel, hogy egy másik $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ bázisban $g(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{u}_i^2$ és q darab $\beta_i > 0$. Sorszámozzuk át az $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ vektorokat is a fenti módon: $1 \leq i \leq q$ esetén legyen $f(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0$ és $q+1 \leq i \leq n$ esetén legyen $f(\underline{v}_i, \underline{v}_i) \leq 0$. Ekkor $\tilde{E}_1 = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q \rangle$, $\tilde{E}_2 = \langle \underline{v}_{q+1}, \dots, \underline{v}_n \rangle$ esetén szintén $V = \tilde{E}_1 \oplus \tilde{E}_2$ és az

$f : \tilde{E}_1 \times \tilde{E}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris függvény pozitív definit az,

$f : \tilde{E}_2 \times \tilde{E}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris függvény negatív szemidefinit.

Ha $p > q$ lenne, akkor $\dim E_1 + \dim \tilde{E}_2 > n$ miatt $E_1 \cap \tilde{E}_2 \neq \{0\}$, hiszen ellenkező esetben $E_1 + \tilde{E}_2 = E_1 \oplus \tilde{E}_2 \leq V$ lenne és $\dim E_1 + \dim \tilde{E}_2 > n$ miatt ez lehetetlen. Tehát létezik egy $0 \neq \underline{x} \in E_1 \cap \tilde{E}_2$ és erre $0 < f(\underline{x}, \underline{x}) \leq 0$, ami ellentmondás.

A kvadratikus alakok négyzetösszeggé transzformálhatóságából könnyen leolvasható a 1. definitési kritérium, amelyet a 16.17 Tételben fogalmazunk meg.

16.17 Tétel (1. definitési kritérium) bizonyítása: A komplex esetet bizonyítjuk, hasonlóan látható be a valós eset is. Legyen $g : V \rightarrow \mathbf{R}$ kvadratikus alak, legyen f a hozzá egyértelműen tartozó Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor $f(\underline{u}, \underline{v}) = [\underline{u}]^T \underline{A}[\underline{v}]$, ahol $\underline{A}$ a g kvadratikus alak mátrixa. $\underline{A}$ Hermite-féle, tehát sajátértékei valósak. A 18.23 Tételben láttuk, hogy van egy olyan $\underline{M} \in M_n[\mathbf{C}]$ unitér mátrix, amelyre

$$\underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\underline{A}$ sajátértékei és, ha a térben egy olyan báziscserét hajtunk végre, ahol az új bázis elemei az $\underline{M}$ oszlopvektorainak mint koordinátavektoroknak megfelelő vektorok, akkor

$$f(\underline{u}, \underline{v}) = [\tilde{\underline{u}}]^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} [\tilde{\underline{v}}],$$

$$g(\underline{u}, \underline{v}) = [\tilde{\underline{u}}]^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} [\tilde{\underline{v}}],$$

azaz $g(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\tilde{u}_i|^2$. Ebből pedig nyilvánvaló, hogy g pontosan akkor pozitív definit, ha minden $\lambda_i > 0$. Hasonlóan látható be a többi eset is.

A 16.20 Tétel (2. definitési kritérium) bizonyítása: A komplex esetet bizonyítjuk. A valós eset is hasonlóan látható be. Először az (i) esettel foglalkozunk. Legyen $g : V \rightarrow \mathbf{R}$ kvadratikus alak. Legyen $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ egy bázis V -ben. Legyen f a g -hez egyértelműen tartozó Hermite-féle bilineáris függvény. A fenti bázisban $f(\underline{u}, \underline{v}) = [\underline{u}]^T \underline{A}[\underline{v}]$, ahol $\underline{A} = (a_{ij})$ g mátrixa az $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ bázisban. Legyen $V_i = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i \rangle$. Ekkor az $f : V_i \times V_i \rightarrow \mathbf{C}$ szintén Hermite-féle bilineáris függvény és $g : V_i \rightarrow \mathbf{R}$ a hozzá tartozó valós értékű kvadratikus alak, melynek mátrixa az $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i\}$ bázisban éppen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel először, hogy $g : V \rightarrow \mathbf{R}$ pozitív definit kvadratikus alak. Ekkor $g : V_i \rightarrow \mathbf{R}$ szintén pozitív definit kvadratikus alak minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Pozitív definit kvadratikus alak mátrixának sajátértékei az 1. definitési kritérium alapján pozitívak. Ezért mátrixának determinánsa, amely a sajátértékei szorzata, szintén pozitív. Így beláttuk, hogy a sarokaldeterminánsok sorozata pozitív, azaz $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$.

Tegyük fel most, hogy $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$. Megmutatjuk, hogy g pozitív definit kvadratikus alak. Ha g mátrixa diagonális, akkor a diagonálisban a mátrix sajátértékei állnak. A $D_1 = \lambda_1 > 0, D_2 = \lambda_1 \lambda_2 > 0, \dots, D_n = \lambda_1 \dots \lambda_n > 0$ feltételekből $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$ következik, amely az 1. definitési kritérium alapján azt adja, hogy g pozitív definit.

Ha g mátrixa nem diagonális mátrix, akkor sorozatos báziscserét hajtunk végre úgy, hogy közben a $D_1, \dots, D_n$ determinánsok ne változzanak és végül g mátrixa diagonális legyen. Ha ezt sikerül elvégeznünk akkor az előzőek szerint már tudjuk, hogy g pozitív definit.

Legyen $\underline{E}_{ij}(\lambda)$ az a mátrix, amelynek fődiagonálisában minden elem 1, i -edik sorának j -edik eleme λ és az összes többi eleme nulla. Könnyen látható, hogy $\underline{E}_{ij}(\lambda)$ -val egy mátrixot jobbról szorozva, a mátrix i -edik oszlopának λ -szorosa a j -edik oszlophoz adódik, balról szorzás esetén pedig a j -edik sor λ -szorosa az i -edik sorhoz adódik.

Mivel $a_{11} = D_1 > 0$, ezért képezhető az

$$\underline{M} = \underline{E}_{12} \left(\frac{-a_{12}}{a_{11}} \right).$$

Legyen ez a báziscseretranszformáció mátrixa.

Ekkor g mátrixa az új bázisban $\underline{M}^T \underline{A} \underline{M}$. Mivel $\underline{A}$ önadjungált mátrix $a_{21} = \bar{a}_{12}$, így

$$\underline{M}^T = \underline{E}_{21} \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}} \right).$$

Igy a transzformáció elvégzése során $\underline{A}$ -nak első sorának második eleme és második sorának első eleme kinullázódik. Hasonló módon alkalmas $\underline{E}_{ij}(\lambda)$ mátrixokkal, mint báziscsere transzformációkkal elérhető, hogy g -nek az új bázisbeli mátrixának az első sor első elemén kívül mindegyik eleme nulla. A sarokaldeterminánsok sorozata változatlan, mert egy determináns értéke nem változik, ha a mátrix egyik sorának (illetve oszlopának) skalárszorosát egy másik sorához (illetve oszlopához) adjuk.

Igy $D_2 > 0$ és ezért a transzformált $\tilde{\underline{A}} = (\tilde{a}_{ij})$ mátrixra $\tilde{a}_{22} > 0$.

Hasonlóan mint előbb kinullázható a 2. sor és a 2. oszlop többi eleme.

Tegyük fel, hogy már i sorban és i oszlopban csak a diagonális elem maradt meg és az eddigi lépéseknél a sarokaldeterminánsok sorozata változatlan. Ekkor $D_{i+1} > 0$ miatt az $i+1$ -edik sor $i+1$ -edik eleme pozitív, tehát az eljárás folytatható. Végül g mátrixa diagonális lesz és mivel a sarokaldeterminánsok sorozata változatlan visszavezettük a feladatot a már megoldott esetre, így g pozitív definit.

(ii) Ha g negatív definit, akkor $-g$ pozitív definit és ennek mátrixa $-\underline{A}$. $-\underline{A}$ sarokaldeterminánsai pozitívak, ezért $\underline{A}$ sarokaldeterminánsai jelváltóak és az első negatív. Ha $\underline{A}$ sarokaldeterminánsai jelváltóak és az első negatív, akkor $-\underline{A}$ sarokaldeterminánsai pozitívak, tehát $-g$ pozitív definit, azaz g negatív definit.

18.29 Megjegyzés: A bizonyításból az is kitűnik, hogy ha a sarokaldeterminánsok sorozata pozitív és negatív értékeket is felvesz, de g nem negatív definit, akkor g indefinit. Ez természetesen az indefinitésnek nem szükséges feltétele.

19. Unitér, ortogonális és normális transzformációk további tulajdonságai

Most az unitér transzformációkat fogjuk jellemezni

19.1 Tétel: Legyen (V, f) n dimenziós komplex euklideszi tér. Egy $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformációra a következő állítások ekvivalensek

- (i) A unitér lineáris transzformáció.
- (ii) $A : V \rightarrow V$ izometria.
- (iii) $A : V \rightarrow V$ távolságtartó transzformáció, azaz $\|A\underline{u}\| = \|\underline{u}\| \forall \underline{u} \in V$ esetén.
- (iv) A minden V -beli ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.
- (v) létezik V -ben ortonormált bázis, amelyet A ortonormált bázisba visz.
- (vi) létezik V -ben olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális mátrix és a diagonális elemek 1 abszolút értékűek.

Bizonyítás: (i) $\rightarrow$ (ii) Mivel A unitér transzformáció, ezért A^{-1} is létezik, így A vektortérizomorfizmus. De $A^* = A^{-1}$, így $f(A\underline{u}, A\underline{v}) = f(\underline{u}, A^*A\underline{v}) = f(\underline{u}, \underline{v})$, tehát A izometria.

(ii) $\rightarrow$ (iii) Mivel A izometria, így $f(A\underline{u}, A\underline{u}) = f(\underline{u}, \underline{u})$ tehát $\|A\underline{u}\| = \|\underline{u}\| \forall \underline{u} \in V$ esetén, azaz A távolságtartó

(iii) $\rightarrow$ (ii) $\|A\underline{u}\| = \|\underline{u}\|$ -ből $f(A\underline{u}, A\underline{u}) = f(\underline{u}, \underline{u})$ következik. Ez egy kvadratikus alak, amely az $f(A\underline{u}, A\underline{v})$ és az $f(\underline{u}, \underline{v})$ Hermite-féle komplex bilineáris függvényekhez tartozik, tehát $f(A\underline{u}, A\underline{v}) = f(\underline{u}, \underline{v})$ a 16.11 Tétel szerint.

(ii) $\rightarrow$ (iv) Mivel A izometria, ortonormált vektorrendszer képe ortonormált vektorrendszer. De minden n -elemű ortonormált vektorrendszer bázis, így ortonormált bázis képe ortonormált bázis.

(iv) $\rightarrow$ (v) A Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció szerint van a (V, f) térben ortonormált bázis. Ezt (iv) szerint A ortonormált bázisba viszi.

(v) $\rightarrow$ (ii) Legyen $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ V -ben ortonormált bázis és $A\underline{e}_1, \dots, A\underline{e}_n$ szintén legyen V -ben ortonormált bázis. Legyen $\underline{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_i$, $\underline{v} = \sum_{j=1}^n \beta_j \underline{e}_j$. Ekkor $f(A\underline{u}, A\underline{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A\underline{e}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j A\underline{e}_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(A\underline{e}_i, A\underline{e}_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = f(\underline{u}, \underline{v})$. Tehát A skalárszorozattartó.

A 13.18 Megjegyzés szerint A vektortérizomorfizmus, tehát A izometria is.

(ii) $\rightarrow$ (i) A izometria, így A^{-1} létezik és $f(A\underline{u}, A\underline{v}) = f(\underline{u}, \underline{v}) \forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén. Ezért $f(\underline{u}, A^*A\underline{v}) = f(\underline{u}, \underline{v}) \forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén. Tehát A^*A eleget tesz az id_V^* -ot definiáló egyenlőtlenségnek. Így $A^*A = \text{id}_V^* = \text{id}_V$ a 18.3 Tétel szerint. Azaz A unitér lineáris transzformáció.

(i) $\rightarrow$ (vi) Ez következik a 18.12 Tételből.

(vi) $\rightarrow$ (i) A mátrixa a (vi)-beli ortonormált bázisban unitér mátrix, tehát $\overline{[A]}^T = [A]^{-1}$, azaz $[A^*] = [A^{-1}]$ és így $A^* = A^{-1}$.

Valós terekben ennek a tételnek a következő analogonja igaz ortogonális transzformációkra:

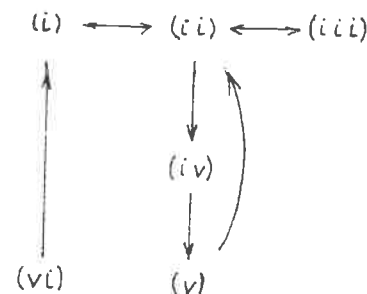
19.2 Tétel: Legyen (V, f) valós euklideszi tér. Egy $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformációra a következő állítások ekvivalensek

- (i) A ortogonális lineáris transzformáció.
- (ii) $A : V \rightarrow V$ izometria.
- (iii) $A : V \rightarrow V$ távolságtartó lineáris transzformáció, azaz $\|A\underline{u}\| = \|\underline{u}\| \forall \underline{u} \in V$ esetén.
- (iv) A minden V -beli ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.
- (v) létezik V -ben olyan ortonormált bázis, amelyet A ortonormált bázisba visz.
- (vi) létezik V -ben olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa egy-és kétdimenziós blokkokból álló blokkdiagonális mátrix. Az egydimenziós blokkokban $+1$ vagy -1 áll, a 2 dimenziós blokkokban pedig

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

valamely φ -re.

Bizonyítás:



18. ábra

Az itt jelzett következtetések bizonyításai analóg módon történhetnek, mint az előző tételben.

Az (i) $\rightarrow$ (vi) bizonyításához szükségünk van a következő tételekre:

19.3 Tétel: Legyen (V, f) a valós számtest feletti n -dimenziós euklideszi tér,

- (i) $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Ekkor A -nak van egy nemtriviális legfeljebb kétdimenziós minimális invariáns altere és abban egy olyan bázis, amelyben A leszűkítésének mátrixa egydimenziós altér esetén $[\lambda]$, a kétdimenziós altér esetén

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix},$$

ahol λ A -nak valós sajátértéke, $\mu + i\nu$ pedig komplex sajátértéke.

- ii) $A : V \rightarrow V$ normális lineáris transzformáció. Ekkor A -nak és A^* -nak van egy közös, nemtriviális, legfeljebb kétdimenziós minimális altere és abban egy olyan ortonormált bázis, amelyben A leszűkítésének mátrixa az egydimenziós altér esetén $[\lambda]$ a kétdimenziós altér esetén

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix},$$

ahol λ A -nak valós sajátértéke, $\mu + i\nu$ pedig komplex sajátértéke.

Bizonyítás: (i) Rögzítsük V -nek egy bázisát. Belátjuk, hogy A mátrixának, $[A]$ -nak van $\mathbb{R}^n$ -ben egy nemtriviális legfeljebb kétdimenziós minimális invariáns altere.

Ha $[A]$ -nak λ valós sajátértéke, akkor vegyünk egy $[\underline{s}] \in \mathbb{R}^n$ λ -hoz tartozó sajátvektort. Legyen $\underline{s}$ ennek ősképe V -ben. Ekkor $[\underline{s}]$ A -nak egydimenziós invariáns

altér, amelyben A leszűkítésének mátrixa $[\lambda]$. Ha $[A]$ -nak csak komplex sajátértékei vannak, akkor tekintsük $[A]$ -nak egy $[\underline{s}]$ sajátvektorát $\lambda = \mu + i\nu$ sajátértékkel. Ekkor $[\underline{s}] = [\underline{u}] + i[\underline{v}]$, ahol $[\underline{u}], [\underline{v}] \in \mathbf{R}^n$ és $[A]([\underline{u}] + i[\underline{v}]) = (\mu + i\nu)([\underline{u}] + i[\underline{v}])$, amelyből $[A][\underline{u}] + i[A][\underline{v}] = (\mu[\underline{u}] - \nu[\underline{v}]) + i(\nu[\underline{u}] + \mu[\underline{v}])$. Így $[A][\underline{u}] = \mu[\underline{u}] - \nu[\underline{v}]$ és $[A][\underline{v}] = \nu[\underline{u}] + \mu[\underline{v}]$.

Tehát $\langle [\underline{u}], [\underline{v}] \rangle$ $[A]$ -nak kétdimenziós minimális invariáns altér $\mathbf{R}^n$ -ben, így ennek ösképe $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \leq V$ A -nak kétdimenziós invariáns altér. Az $\underline{u}, \underline{v}$ bázisban az $A|_{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}$ leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$$

(ii) Ha A normális lineáris transzformáció, akkor legyen $[A]$ A -nak mátrixa egy V -beli ortonormált bázisban. A 18.8 Tétel szerint $[A] \in M_n[\mathbf{R}]$ normális mátrix és így $[A]$ $M_n[\mathbf{C}]$ -beli normális mátrixnak tekinthető. A 18.7 Példa szerint az $[A]$ -val való szorzás normális lineáris transzformáció az $(\mathbf{R}^n, (,))$ és a $(\mathbf{C}^n, (,))$ téren is.

Ha $[A]$ -nak van egy λ valós sajátértéke, akkor van $\mathbf{R}^n$ -ben hozzá tartozó $[\underline{s}]$ egységsajátvektor.

A 18.13 Tétel miatt $[\underline{s}] [A^*] = [A]^T$ -nak is λ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Így $\langle \underline{s} \rangle$ A -nak és A^* -nak is egydimenziós invariáns altér, melynek $\{\underline{s}\}$ ortonormált bázisában $A|_{\langle \underline{s} \rangle}$ mátrixa $[\lambda]$.

Ha $[A]$ -nak csak komplex sajátértékei vannak, akkor válasszuk $[A]$ -nak egy $[\underline{s}] = [\underline{u}] + i[\underline{v}]$ sajátvektorát $\lambda = \mu + i\nu$ sajátértékkel. Hasonlóan, mint az (i) pontban belátható, hogy ekkor $\langle [\underline{u}], [\underline{v}] \rangle \leq \mathbf{R}^n$ $[A]$ -nak kétdimenziós invariáns altér, melynek bázisa $\{[\underline{u}], [\underline{v}]\}$. A 18.13 Tétel szerint $[\underline{s}] [A^*] = [A]^T$ -nak is sajátvektora $\bar{\lambda}$ sajátértékkel. Így hasonlóan, mint $[A]$ -ra $[A]^T$ -ra is beláthatjuk, hogy $\langle [\underline{u}], [\underline{v}] \rangle \leq \mathbf{R}^n$ $[A]^T$ -nak is invariáns altér. Viszont $[\overline{A}][\underline{s}] = \bar{\lambda}[\underline{s}]$ és mivel $[A] \in M_n[\mathbf{R}]$ $[\overline{A}][\underline{s}] = \bar{\lambda}[\underline{s}]$ is teljesül. A 18.13 Tétel szerint normális transzformáció különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorai ortogonálisak, úgy $([\underline{s}], [\overline{s}]) = 0$ a $(\mathbf{C}^n, (,))$ téren. Ebből $0 = ([\underline{u}] + i[\underline{v}], [\underline{u}] - i[\underline{v}]) = ([\underline{u}], [\underline{u}]) - ([\underline{v}], [\underline{v}]) - i([\underline{v}], [\underline{u}]) + i([\underline{u}], [\underline{v}])$. Tehát $([\underline{u}], [\underline{v}]) = 0$ és $([\underline{u}], [\underline{u}]) = ([\underline{v}], [\underline{v}])$. Így $[\underline{u}]$ és $[\underline{v}]$ helyett véve az $[\underline{u}]$ és $[\underline{v}]$ -irányú egységvektorokat, ezek az $\langle [\underline{u}], [\underline{v}] \rangle$ altér ortonormált bázisát alkotják, melyek ösképe V -ben A -nak és A^* -nak egy kétdimenziós minimális invariáns altérét generálja, melyben A leszűkítésének mátrixa

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$$

19.4 Tétel: Legyen (V, f) a valós számtest felett n -dimenziós euklideszi tér,

(i) $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, amelynek mátrixa a komplex számtest felett egyszerű struktúrájú mátrix.

Ekkor létezik V -ben egy olyan bázis, amelyben A mátrixa egy és kétdimenziós blokkokból álló blokkdiagonális mátrix. Az egydimenziós blokkokban A valós sajátértékei állnak a kétdimenziós blokkok

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$$

alakúak, ahol $\mu + i\nu$ A -nak komplex sajátértéke.

(ii) $A : V \rightarrow V$ normális transzformáció, ekkor van V -ben olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa az (i)-pontban leírt alakú.

Bizonyítás:

(i) Az állítást most nem bizonyítjuk. Következik a valós Jordan-féle normálalokból, melyet a Függelékben bizonyítottunk az F.1.16 Tételben.

(ii) $\dim V = n$ -re vonatkozó indukcióval bizonyítottunk. Ha $\dim V = 1$, akkor az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $\dim V \leq n - 1$ -re az állítás igaz. A 19.3 Tétel szerint A -nak és A^* -nak van egy közös legfeljebb kétdimenziós W invariáns altér és abban egy olyan ortonormált bázis, amelyben $A|_W$ mátrixa a kívánt alakú.

Ekkor $V = W \oplus W^\perp$, ahol a 18.9 Tétel szerint $W^\perp$ A -ra és A^* -ra is invariáns altér. Tehát $A|_{W^\perp}$ is normális transzformáció, így $W^\perp$ -ben van a feltételeknek eleget tevő ortonormált bázis és ez W bázisával együtt V -nek egy megfelelő bázisát adja.

19.5 Következmény: A 19.2 Tétel bizonyításának (i) $\rightarrow$ (vi) implikációját az előző tétel segítségével be tudjuk látni.

Bizonyítás: Ha A egy ortogonális lineáris transzformáció a (V, f) valós euklideszi téren, akkor A normális, így a 19.4 Tétel szerint van V -ben olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa egy és kétdimenziós blokkokból álló blokkdiagonális mátrix ahol a blokkok az idézett tételbeli alakúak. A 18.8 Tétel szerint ez a mátrix ortogonális mátrix, így az egydimenziós blokkokban $+1$ vagy -1 állhat csak. Egy

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$$

mátrix ortogonalitása $\mu^2 + \nu^2 = 1$ esetén áll fenn. Tehát $\mu = \cos \varphi$ $\nu = \sin \varphi$ alkalmas φ szögre.

19.6 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy egy (V, f) valós euklideszi térben egy antiszimmetrikus lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben annak mátrixa egy E s két dimenziós blokkokból álló blokkdiagonális mátrix. Az egydimenziós blokkokban nulla áll, a kétdimenziós blokkok

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{pmatrix}$$

alakúak, ahol $i\nu$ A sajátértéke, $\nu \in \mathbf{R}$.

19.7 Feladat: Fogalmazzuk meg a 18.18 Következmény analogonját valós normális, szimmetrikus, antiszimmetrikus és ortogonális mátrixokra. Bizonyítsuk is be!

20. Felbontási tételek

20.1 Definíció Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér $A : V \rightarrow V$ önadjungált (illetve szimmetrikus) lineáris transzformáció. Azt mondjuk, hogy A pozitív definit, ha A -nak minden sajátértéke pozitív. A pozitív szemidefinit, ha A minden sajátértéke nemnegatív.

20.2 Példa: Ha a (V, f) euklideszi térben az $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, akkor AA^* és A^*A pozitív szemidefinit, ha A invertálható, akkor pozitív definit.

Bizonyítás: AA^* -ra bizonyítjuk csak (A^*A -ra hasonlóan látható be). A komplex esetet bizonyítjuk csak, valósra hasonló a bizonyítás.

$(AA^*)^* = AA^*$, tehát AA^* önadjungált. Legyen $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ AA^* sajátvektoraiból álló ortonormált bázis. Ekkor $AA^*\underline{e}_i = \lambda_i \underline{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, ahol $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $i = 1, \dots, n$.

$$\lambda_i = \lambda_i f(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = f(\lambda_i \underline{e}_i, \underline{e}_i) = f(AA^*\underline{e}_i, \underline{e}_i) = f(A^*\underline{e}_i, A^*\underline{e}_i) \geq 0$$

Tehát AA^* pozitív szemidefinit lineáris transzformáció. Ha A invertálható, akkor A^* is az (hiszen alkalmas bázisban mátrixa A mátrixának transzponáltjának konjugáltja). De ekkor $A^*\underline{e}_i \neq \underline{0}$, így $\lambda_i = f(A^*\underline{e}_i, A^*\underline{e}_i) > 0$, azaz AA^* pozitív definit.

20.3 Tétel: Legyen (V, f) euklideszi tér, $A : V \rightarrow V$ pozitív definit (illetve pozitív szemidefinit) lineáris transzformáció. Ekkor létezik egyetlen olyan $B : V \rightarrow V$ pozitív definit (illetve pozitív szemidefinit) lineáris transzformáció, amelyre $B^2 = A$. Ezt az A transzformáció gyökének nevezzük és $\sqrt{A}$ -val jelöljük.

Bizonyítás: Komplex tér esetre bizonyítunk, valósra hasonlóan látható be.

Legyen $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ V -beli ortonormált bázis, melyben A mátrixa

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Mivel $\lambda_i > 0$ (illetve $\lambda_i \geq 0$), $\sqrt{\lambda_i} > 0$ (illetve $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$)

Legyen $B : V \rightarrow V$ az a lineáris transzformáció, melyre $B\underline{e}_i = \sqrt{\lambda_i} \underline{e}_i$. Mivel

lineáris transzformáció bázison előírható és $B^2 \underline{e}_i = \lambda_i \underline{e}_i$, tehát $A = B^2$. Mivel az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ ortonormált bázisban B mátrixa diagonális és a diagonális elemek valósak, a 18.8 Tétel szerint B önadjungált lineáris transzformáció. B sajátértékei $\sqrt{\lambda_i} > 0$ (illetve $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$), tehát B pozitív definit (illetve pozitív szemidefinit).

Ha B_1 egy másik pozitív definit (pozitív szemidefinit) lineáris transzformáció, melyre $A = B_1^2$, akkor egy $\{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ ortonormált bázisban B_1 mátrixa diagonális mátrix

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Ebben a bázisban A mátrixa

$$\begin{pmatrix} \beta_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n^2 \end{pmatrix}$$

tehát $\beta_1, \dots, \beta_n, \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ egy permutációja.

Legyen $p(x)$ az a legalacsonyabb fokú Lagrange-féle interpolációs polinom, amely $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ helyen $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ -et vesz fel.

Jelölje $[A]_{\{\underline{e}\}}$ az A lineáris transzformáció mátrixát az $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, $[A]_{\{\underline{e}'\}}$ az A lineáris transzformáció mátrixát az $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ ortonormált bázisban.

Ekkor

$$\begin{aligned} [p(A)]_{\{\underline{e}'\}} &= p([A]_{\{\underline{e}'\}}) = p\left(\begin{pmatrix} \beta_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n^2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} p(\beta_1^2) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\beta_n^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = [B_1]_{\{\underline{e}'\}}. \end{aligned}$$

Tehát $p(A) = B_1$.

Viszont

$$[p(A)]_{\{\underline{e}\}} = p([A]_{\{\underline{e}\}}) = p\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = [B]_{\{\underline{e}\}}$$

Tehát $p(A) = B$. Így $B = B_1$.

20.4 Tétel (Poláris felbontási tétel) Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér. Ekkor minden $A : V \rightarrow V$ invertálható lineáris transzformációhoz léteznek S_1, S_2 pozitív definit és O_1, O_2 ortogonális (illetve unitér) lineáris

transzformációk, hogy $A = S_1 O_1 = O_2 S_2$. Ezek a felbontások egyértelműek.

Bizonyítás: (A valós esetet bizonyítjuk a komplex eset hasonló). Tegyük fel először, hogy A invertálható. Ekkor AA^* és A^*A pozitív definit lineáris transzformációk és létezik $\sqrt{AA^*}$ és $\sqrt{A^*A}$. Legyen $S_1 = \sqrt{AA^*}$ és $S_2 = \sqrt{A^*A}$. $O_1 = (\sqrt{AA^*})^{-1}A$, $O_2 = (\sqrt{A^*A})^{-1}A$.

Ekkor $O_1 O_1^* = (\sqrt{AA^*})^{-1}A((\sqrt{AA^*})^{-1}A)^* = (\sqrt{AA^*})^{-1}AA^*(\sqrt{AA^*})^{-1} = \text{id}_V$, tehát O_1 ortogonális transzformáció. Hasonlóan látható be, hogy O_2 is ortogonális transzformáció.

$A = S_1 O_1 = O_2 S_2$ is nyilván teljesül.

Mivel $AA^* = S_1 O_1 O_1^* S_1 = S_1^2$ és $\sqrt{AA^*}$ egyértelmű S_1 egyértelmű. Hasonlóan látható be, hogy S_2 is egyértelmű.

Mivel A^{-1} létezik O_1 és O_2 is egyértelmű.

20.3 Megjegyzés: A fenti tétel szerinti $A = S_1 O_1 = O_2 S_2$ poláris felbontás akkor is létezik, ha A nem invertálható. S_1 és S_2 ekkor pozitív szemidefinit és szintén egyértelmű, O_1, O_2 nem egyértelmű. Ennek az esetnek a bizonyítása megtalálható például $[H]$ -ban.

A poláris felbontási tétel a komplex számok $z = re^{i\varphi}$ exponenciális alakjának analogonja. A komplex számok algebrai alakjának analogonja a következő tétel.

20.6 Tétel: Legyen (V, f) valós (illetve komplex) euklideszi tér $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Ekkor A egyértelműen írható egy szimmetrikus (illetve önadjungált) és egy antiszimmetrikus (ferdén önadjungált) lineáris transzformáció összegeként.

Bizonyítás: A valós esetet bizonyítjuk, a komplex eset hasonlóan látható be.

$\frac{A+A^*}{2}$ szimmetrikus, $\frac{A-A^*}{2}$ antiszimmetrikus lineáris transzformáció és $A = \frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2}$.

Belátjuk, hogy ez az előállítás egyértelmű.

Ha $A = S_1 + F_1 = S_2 + F_2$ ahol S_1, S_2 szimmetrikus és F_1, F_2 antiszimmetrikus lineáris transzformációk, akkor $S_1 - S_2 = F_2 - F_1$ $S_1 - S_2 = (S_1 - S_2)^*(F_2 - F_1)^* = F_1 - F_2 = -(S_1 - S_2)$ tehát $S_1 - S_2 = 0$ azaz $S_1 = S_2$ és $F_1 = F_2$.

20.7 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy $M_n(\mathbf{R})$ mint $\mathbf{R}$ feletti vektortér a szimmetrikus $n \times n$ -es mátrixok és az antiszimmetrikus $n \times n$ -es mátrixok altereinek

direkt összege.

Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be ennek $M_n[\mathbb{C}]$ -re való analogonját.

Láttuk, hogy van bizonyos analógia a komplex számok és egy (V, f) euklideszi tér lineáris transzformációi között. Most ezeket a tulajdonságokat táblázatba foglaljuk.

$z \in \mathbb{C}$	(V, f) euklideszi térben $A : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció	A sajátértéke λ
$\bar{z}$	A^*	$\bar{\lambda}$
$\bar{z} = z$ ($z \in \mathbb{R}$)	$A^* = A$ (A önadjungált vagy szimmetrikus)	$\lambda \in \mathbb{R}$
$\bar{z} = -z$ ($\text{Re } z = 0$)	$A^* = -A$ (A ferdén önadjungált vagy antiszimmetrikus)	$\text{Re } \lambda = 0$
$z\bar{z} \in \mathbb{R}$ ha $z \neq 0$ akkor $z\bar{z} > 0$	AA^* önadjungált vagy szimmetrikus, ha A^{-1} létezik, akkor AA^* pozitív definit	$\lambda \geq 0$ ha A^{-1} létezik, akkor $\lambda > 0$
$z\bar{z} = 1$ ($ z = 1$)	$AA^* = 1$ (A unitér vagy ortogonális)	$ \lambda = 1$
$z = \frac{z+\bar{z}}{2} + i\frac{z-\bar{z}}{2i}$ $z = re^{i\varphi}$	$A = \frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2}i$ $A = S_1U_1 = U_2S_2$	

21. Függelék

Jordan-féle normálalak

Célunk a mátrixok Jordan-féle normálalakjáról szóló azon tételek bizonyítása, amelyeket a 11. fejezetben mondtunk ki.

Először felbontjuk a teret olyan invariáns alterek direkt összegére, amelyeken a transzformációnak csak egy sajátértéke van, majd ezeken a altereken belül választunk megfelelő, ún. Jordan-bázist, amelyben a transzformációk mátrix. Jordan-féle normálalakú. A tér felbontásához szükségünk van polinomok néhány tulajdonságára.

F.1.1 Tétel:

a.) Legyenek $p(x), q(x) \in F[x]$ polinomok, ahol F tetszőleges test. Ekkor léteznek olyan $\alpha(x), \beta(x) \in F[x]$ polinomok, amelyre l.n.k.o. $(p(x), q(x)) = \alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)$

b.) Ha $p_1(x), \dots, p_k(x) \in F[x]$ polinomok, akkor léteznek olyan $\alpha_1(x), \dots, \alpha_k(x) \in F[x]$ polinomok, melyekre l.n.k.o. $(p_1(x), \dots, p_k(x)) = \alpha_1(x)p_1(x) + \dots + \alpha_k(x)p_k(x)$

Bizonyítás:

a.) Könnyen következik az állítás a 3.9 Tételből, ugyanis az euklideszi algoritmus során minden $r_i(x)$ maradék $r_i(x) = \alpha_i(x)p(x) + \beta_i(x)q(x)$ alkalmas $\alpha_i(x), \beta_i(x) \in F[x]$ polinomokkal. Így az utolsó nem nulla maradékra, a legnagyobb közös osztóra is teljesül ez a tulajdonság.

b.) Mivel l.n.k.o. $(p_1(x), \dots, p_k(x)) = \text{l.n.k.o.}(\text{l.n.k.o.}(p_1(x), \dots, p_{k-1}(x)), p_k(x))$ az eredmény indukcióval következik az a)-beli állításból.

F1.2 Következmény: Legyen V a komplex számtest feletti vektortér $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Ha $m(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$ φ minimálpolinomja, akkor minden V -beli λ_i -hez tartozó általánosított sajátvektor legfeljebb m_i -indexű. A λ_i -hez tartozó általánosított sajátalteret V_{λ_i} -vel jelölve tehát azt kapjuk, hogy $V_{\lambda_i} = \text{Ker } ((\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i})$.

Bizonyítás: Legyen v φ -nek λ_i -hez tartozó általánosított sajátvektora. Ekkor

14.10 Definíció szerint létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\underline{v} \in \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k$. Ha $k \leq m_i$, akkor $\underline{v}$ legfeljebb m_i indexű általánosított sajátvektor. Ha $k > m_i$, akkor l.n.k.o. $((x - \lambda_i)^k, m(x)) = (x - \lambda_i)^{m_i}$. Így az előző tétel szerint $(x - \lambda_i)^{m_i} = \alpha(x)(x - \lambda_i)^k + \beta(x)m(x)$, tehát $(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i} = \alpha(\varphi)(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k + \beta(\varphi)m(\varphi) = \alpha(\varphi)(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k$ tehát, mivel $\underline{v}$ benne van $\alpha(\varphi)(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k$ magterében, így $(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i} \underline{v} = 0$, ezért $\underline{v}$ legfeljebb m_i indexű általánosított sajátvektor.

F1.3 Tétel (Primér felbontási tétel) Legyen V a komplex számtest feletti vektortér $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, melynek

$$m(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$$

a minimálpolinomja, V_{λ_i} pedig λ_i -hez tartozó általánosított sajátaltér.

Ekkor

$$V = \oplus_{i=1}^s V_{\lambda_i},$$

ahol V_{λ_i} φ -re invariáns altér és a $\varphi|_{V_{\lambda_i}}$ transzformációnak $(x - \lambda_i)^{m_i}$ a minimálpolinomja.

Bizonyítás:

$$\text{l.n.k.o.} \quad \left(\frac{m(x)}{(x - \lambda_1)^{m_1}}, \dots, \frac{m(x)}{(x - \lambda_s)^{m_s}} \right) = 1,$$

tehát az F1.1 Tétel szerint léteznek olyan $\alpha_1(x), \dots, \alpha_s(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomok, hogy

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i(x) \frac{m(x)}{(x - \lambda_i)^{m_i}} = 1.$$

φ -t behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i(\varphi) \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j \text{id}_V)^{m_j} = \text{id}_V.$$

Tehát $\underline{v} \in V$ esetén $\underline{v} = \sum_{i=1}^s \alpha_i(\varphi) \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j \text{id}_V)^{m_j} \underline{v}$. Mivel $\alpha_i(\varphi) \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j \text{id}_V)^{m_j} \underline{v} \in \text{Ker}((\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i}) = V_{\lambda_i}$. Tehát $\sum_{i=1}^s V_{\lambda_i} = V$.

Belátjuk, hogy $V_{\lambda_k} \cap \sum_{j \neq k} V_{\lambda_j} = \{0\}$.

Legyen $\underline{v} \in V_{\lambda_k} \cap \sum_{j \neq k} V_{\lambda_j}$. Ekkor $\sum_{i=1}^s \alpha_i(\varphi) \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j \text{id}_V)^{m_j} = \text{id}_V$ $\underline{v}$ -t annihilálja, másrészt önmagába viszi, tehát $\underline{v} = 0$. (A bizonyítás során többször felhasználtuk, hogy φ a saját polinomjával felcserélhető).

A 14.9 Példa szerint V_{λ_i} φ -re invariáns altér.

$(x - \lambda_i)^{m_i} \varphi|_{V_{\lambda_i}}$ -nek annihiláló polinomja $i = 1, \dots, s$ -re. $\varphi|_{V_{\lambda_i}}$ minimálpolinomja a 10.17 Tétel szerint $(x - \lambda_i)^{k_i}$ alakú, ahol $k_i \leq m_i$.

Ha $k_i < m_i$ lenne valamely $1 \leq i \leq s$ esetén, akkor $\prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{k_i}$ -be φ -t behelyettesítve ez minden V_{λ_i} -n nulla, tehát V -n nulla. Ez ellentmond annak, hogy $\prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$ φ minimálpolinomja volt. Tehát $\varphi|_{V_{\lambda_i}}$ minimálpolinomja $(x - \lambda_i)^{m_i}$.

F.1.4 Tétel: Legyen V a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, melynek minimálpolinomja $m(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$. Legyen $K_j = \text{Ker}((\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^j)$ $j = 0, \dots, m_i$. Ekkor $K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_{m_i}$, és ha a K_j altérben veszünk egy a K_j/K_{j-1} faktortérben független vektorrendszert $\{\underline{s}_j^{(1)}, \dots, \underline{s}_j^{(t)}\}$ -t, akkor $k < j$ esetén

$$\{(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k \underline{s}_j^{(1)}, \dots, (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k \underline{s}_j^{(t)}\} \leq K_{j-k}$$

és ez a K_{j-k}/K_{j-k-1} faktortérben egy független vektorrendszert ad.

Bizonyítás:

$$(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{j-k} (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k \underline{s}_j^{(1)} = 0, \dots$$

$$(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{j-k} (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k \underline{s}_j^{(t)} = 0,$$

a feltétel szerint. Tehát

$$\{(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k \underline{s}_j^{(1)}, \dots, (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k \underline{s}_j^{(t)}\} \leq K_{j-k}.$$

Tegyük fel, hogy

$$\sum_{r=1}^t \alpha_i (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k \underline{s}_j^{(r)} \in K_{j-k-1},$$

valamely $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ komplex számokra. Ekkor

$$0 = (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{j-k-1} \sum_{r=1}^t \alpha_i (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^k \underline{s}_j^{(r)} = (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{j-1} \sum_{r=1}^t \alpha_i \underline{s}_j^{(r)}.$$

Ezért $\sum_{r=1}^t \alpha_i \underline{s}_j^{(r)} \in K_{j-1}$. De $\{\underline{s}_j^{(1)}, \dots, \underline{s}_j^{(t)}\}$ a K_j/K_{j-1} faktortérnek egy független vektorrendszere volt, így $\alpha_1 = \dots = \alpha_t = 0$.

Algoritmus a Jordan-bázis konstruálására

Tegyük fel, hogy V -re, φ -re az előző tétel feltételei teljesülnek, $K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_m = V$ alterek a tételben definiáltak. Válasszunk a K_m altérben egy $\underline{s}_1^{(m)}, \dots, \underline{s}_t^{(m)}$ vektorrendszert, melyek $(\text{mod } K_m)$ egy maximális független vektorrendszert, azaz K_m/K_{m-1} -ben egy bázist adnak.

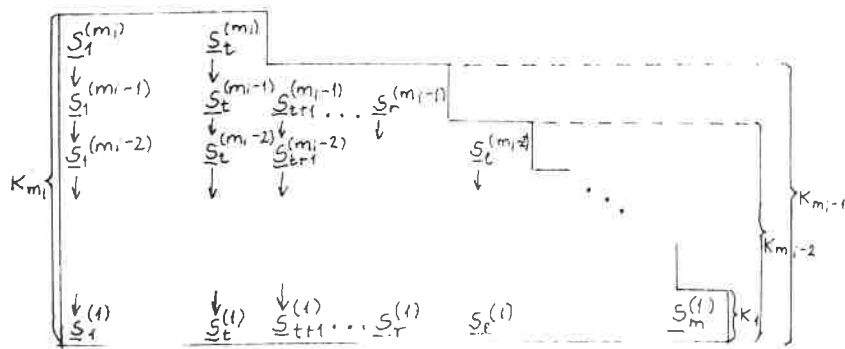
Vegyük ezek képeit a $(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)$ leképezésnél. Ekkor

$$\{(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)\underline{s}_1^{(m)}, \dots, (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)\underline{s}_t^{(m)}\} \subset K_{m-1}$$

és ez $(\text{mod } K_{m-2})$ egy független vektorrendszert ad.

Egészítsük ki ezt a vektorrendszert a K_{m-1} térben úgy, hogy $(\text{mod } K_{m-2})$ maximális független vektorrendszer, azaz bázis legyen. Ennek a vektorrendszernek a képe a $(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)$ leképezésnél K_{m-2} -ben egy $(\text{mod } K_{m-3})$ független vektorrendszer, amelyet kiegészíthetünk $(\text{mod } K_{m-3})$ bázissá. És így tovább.

Írjuk ezeket a vektorokat egy "lépcsős táblázatba"



19. ábra

(A legfelső szinten K_m -nek $(\text{mod } K_{m-1})$ egy bázisa áll, alatta K_{m-1} -nek $(\text{mod } K_{m-2})$ egy bázisa áll stb. Az egymás alatti vektorok egymásból a $(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)$ leképezéssel kaphatók.)

F.1.5 Tétel: Legyen V a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$

lineáris transzformáció, melynek minimálpolinomja $m(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$. Ekkor a fenti algoritmussal kapott, a fenti táblázatbeli vektorok V -nek egy bázisát alkotják. Az egymás alatt lévő vektorok, az ún. Jordan-láncok, V -nek egy-egy φ -re invariáns alterét generálják, melyek direkt összege V . Ha V -nek ezt a bázisát a Jordan-láncokon alulról felfelé menve soroljuk fel, akkor ebben a bázisban φ mátrixa λ_i -hez tartozó felső Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix. A λ_i -hez tartozó Jordan-blokkok száma a λ_i -hez tartozó Jordan-láncok számával egyenlő, amely a λ_i -hez tartozó sajátaltér dimenziója. A Jordan-blokkok dimenziói éppen a Jordan-láncok hosszai. Tehát a λ_i -hez tartozó maximális méretű Jordan-blokk dimenziója m_i .

Bizonyítás: j -re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk, hogy a K_j -be eső táblázatbeli vektorok K_j -nek bázisa.

$j = 1$ -re ez nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $j - 1$ -re igaz az állítás és

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{s}_i^{(j)} + \sum_{h < j} \beta_h \underline{s}_h^{(j)} = \underline{0}.$$

Mivel az $\{\underline{s}_i^{(j)}\}_{i=1, \dots, k}$ K_j -ben $(\text{mod } K_{j-1})$ bázis, így $\alpha_i = 0$ $i = 1, \dots, k$. Az indukció szerint $\forall \beta_h = 0$ is teljesül, azaz a K_j -be eső táblázatbeli vektorok függetlenek.

Legyen $\underline{v} \in K_j$, ekkor mivel $\{\underline{s}_i^{(j)}\}_{i=1, \dots, k} (\text{mod } K_{j-1})$ bázis, ezért $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{s}_i^{(j)} + \underline{w}$, ahol $\underline{w} \in K_{j-1}$. Az indukció szerint $\underline{w}$ K_{j-1} -beli táblázatbeli vektorokkal kifejezhető, tehát a K_j -beli, táblázatbeli A vektorok generátorrendszert alkotnak K_j -ben azaz bázis K_j -ben. Így a táblázat összes vektorai $K_m = V$ -nek bázisát alkotják.

A $V_1 = \langle \underline{s}_1^{(m)}, (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)\underline{s}_1^{(m)}, \dots, (\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{(m-1)}\underline{s}_1^{(m)} \rangle$ altér $(\varphi - \lambda_i \text{id}_V)$ -re

invariáns. Mivel id_V -re is invariáns, ezért φ -re is. Hasonlóan, a többi Jordan-lánc által generált altér is φ -re invariáns altér. Legyenek ezek az alterek $V_1, V_2, \dots, V_m$. Belátjuk, hogy minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen áll elő $\underline{v} = \sum_{k=1}^m \underline{v}_k$ alakban, ahol $\underline{v}_k \in V_k$. Mivel a táblázatbeli vektorok bázist alkotnak, ilyen előállítás létezik. Mivel $\underline{v}_k \in V_k$ és a k -adik Jordan-lánc elemei V_k -nak egy bázisát alkotják, tehát $\underline{v}_k$ ezekkel kifejezhető. De $\underline{v}$ -nek táblázatbeli vektorokkal való előállítása egyértelmű, tehát a k -adik Jordan-lánchoz tartozó vektorok együttlatói is egyértelműek, azaz $\underline{v}_k$ is egyértelmű.

Ezzel beláttuk, hogy $V = \bigoplus_{k=1}^n V_k$.

Vegyük most egy Jordan-láncot, például

$$\underline{s}_1^{(m_i)} \rightarrow \underline{s}_1^{(m_i-1)} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{s}_1^{(2)} \rightarrow \underline{s}_1^{(1)}$$

$$\varphi \underline{s}_1^{(1)} = \lambda_i \underline{s}_1^{(1)}$$

$$(\varphi - \lambda_i \text{id}_V) \underline{s}_1^{(2)} = \underline{s}_1^{(1)}, \text{ azaz } \varphi \underline{s}_1^{(2)} = \underline{s}_1^{(1)} + \lambda_i \underline{s}_1^{(2)}$$

$\vdots$

$$(\varphi - \lambda_i \text{id}_V) \underline{s}_1^{(j)} = \underline{s}_1^{(j-1)}, \text{ azaz } \varphi \underline{s}_1^{(j)} = \underline{s}_1^{(j-1)} + \lambda_i \underline{s}_1^{(j)}$$

$\vdots$

Tehát az $\underline{s}_1^{(1)}, \dots, \underline{s}_1^{(m_i)}$ bázisban a $\varphi|_{V_i}$ mátrixa

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

20. ábra

azaz λ_i -hez tartozó felső Jordan-blokk, melynek dimenziója épp a Jordan-lánc hossza.

F 1.6 Következmény: Legyen V a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi: V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, melynek $m(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$ a minimálpolinomja. Ekkor létezik V -ben olyan bázis, amelyben φ mátrixa φ sajátértékeihez tartozó felső Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix és minden λ_i sajátértékhez annyi blokk tartozik, amennyi a λ_i -hez tartozó, sajátaltér dimenziója. A λ_i -hez tartozó maximális blokkméret m_i .

Bizonyítás: A Primér felbontási tétel szerint $V = \bigoplus_{i=1}^s V_{\lambda_i}$, ahol V_{λ_i} a λ_i -hez tartozó általánosított sajátaltér és $\varphi|_{V_{\lambda_i}}$ minimálpolinomja $(x - \lambda_i)^{m_i}$. V_{λ_i} -re és $\varphi|_{V_{\lambda_i}}$ -re alkalmazható az előző tétel, így V_{λ_i} -ben van olyan bázis, amelyben $\varphi|_{V_{\lambda_i}}$

mátrixa λ_i -hez tartozó felső Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix és λ_i blokkok számára a maximális méretű blokk dimenziójára a fenti feltétel teljesül. Mivel V_{λ_i} -k φ -re invariáns alterek, a V_{λ_i} alterek Jordan-bázisának uniójára V -ben kívánt tulajdonságú bázist adja.

F 1.7 Következmény: A Primér felbontási tételben $\dim V_{\lambda_i} = n_i$, ahol $p(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{n_i}$ φ karakterisztikus polinomja.

Bizonyítás: φ mátrixának Jordan-féle normálalakjából leolvasható az állítás. Ugyanis φ λ_i -hez tartozó általánosított sajátaltér éppen az az altér, amelyet a Jordan-bázis azon elemei generáltak, amelyekhez tartozó Jordan-blokkokban a diagonálisban λ_i áll. λ_i pedig n_i -szeres gyöke φ karakterisztikus polinomjának.

F 1.8 Következmény: A Jordan-féle normálalak a blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Azaz, ha egy φ lineáris transzformáció mátrixa egy bázisban felső Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor egyértelműen meghatározott, az egyes sajátértékekhez tartozó Jordan-blokkok száma és dimenziói.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy φ minimálpolinomjában az $x - \lambda_i$ multiplicitása m_i . Az F 1.2 Következmény szerint $\text{Ker}((\varphi - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i})$ éppen φ -nek a λ_i -hez tartozó általánosított sajátaltér, azaz V_{λ_i} . Ha φ koordinátamátrixa egy bázisban egy $\underline{J}$ Jordan-féle normálalakú mátrix, akkor ez a bázis φ általánosított sajátvektoraiból áll. Egy ilyen bázisnak egy eleméről a következő módon lehet megtudni, hogy hány indexű általánosított sajátvektor: ha a báziselemhez tartozó oszlopvektorban a diagonálisban λ_i áll, akkor tekintsük azt a blokkot, amely ehhez az oszlopvektorhoz tartozik. Ha az oszlopvektor a bloknak j -edik oszlopa, akkor a báziselem λ_i -hez tartozó pontosan j -indexű általánosított sajátvektor.

Igy ha $K_j(\lambda_i)$ jelöli φ λ_i -hez tartozó legfeljebb j -indexű általánosított sajátvektorai halmazát, akkor $\{0\} = K_0(\lambda_i) \leq K_1(\lambda_i) \leq \dots \leq K_{m_i}(\lambda_i) = V_{\lambda_i}$. Tegyük fel, hogy $\underline{J}$ -ben $k_{m_i}(\lambda_i)$ darab m_i dimenziós, $k_{m_i-1}(\lambda_i)$ darab $m_i - 1$ dimenziós, $\dots$, $k_1(\lambda_i)$ darab 1 dimenziós λ_i -hez tartozó blokk van.

Ekkor

$$\dim V_{\lambda_i} = \dim K_{m_i}(\lambda_i) = k_{m_i}(\lambda_i) + k_{m_i-1}(\lambda_i) + \dots + k_1(\lambda_i)$$

$$\dim K_{m_i-1}(\lambda_i) = k_{m_i-1}(\lambda_i) + \dots + k_1(\lambda_i)$$

$$\dim K_1(\lambda_i) = k_1(\lambda_i).$$

Tehát

$$k_1(\lambda_i) = \dim K_1(\lambda_i), \quad k_2(\lambda_i) = \dim K_2(\lambda_i) - \dim K_1(\lambda_i), \dots, k_j(\lambda_i) = \dim K_j(\lambda_i) -$$

$$- \sum_{l=1}^{j-1} \dim K_l(\lambda_i).$$

Mivel

$$\varphi \text{ a } K_1(\lambda_i), K_2(\lambda_i), \dots, K_m(\lambda_i)$$

altérket egyértelműen meghatározza, így az egyes sajátértékhez tartozó Jordan-blokkok száma és dimenziói egyértelműen meghatározottak.

F 1.9 Tétel: Hasonló mátrixok determinánsosztói és invariáns faktorai megegyeznek.

Bizonyítás: Legyen $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$, $D_i(\lambda) = \text{l.n.k.ö.}\{\underline{A} - \lambda \underline{I} \text{ } i \times i\text{-es aldeterminánsai}\}$. Ha $\underline{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ reguláris mátrix, akkor

$$\underline{B}^{-1} \underline{A} \underline{B} - \lambda \underline{I} = \underline{B}^{-1} (\underline{A} - \lambda \underline{I}) \underline{B}.$$

Azt állítjuk, hogy

$$D'_i(\lambda) = \text{l.n.k.ö.}\{\underline{B}^{-1} (\underline{A} - \lambda \underline{I}) \underline{B} \text{ } i \times i\text{-es aldeterminánsai}\} = D_i(\lambda)$$

Ehelyett azt bizonyítjuk, hogy ha $\underline{C} \in M_i[\mathbb{C}]$ reguláris mátrix és $\underline{X} \in M_n[\mathbb{C}[\lambda]]$ olyan mátrix amelynek elemei $\mathbb{C}$ feletti polinomok, akkor $\underline{X}$ $i \times i$ -es aldeterminánsának minden közös osztója $\underline{C} \underline{X}$ minden $i \times i$ -es aldeterminánsainak osztója. Ekkor $\underline{X} = \underline{C}^{-1} (\underline{C} \underline{X})$ miatt $\underline{C} \cdot \underline{X}$ $i \times i$ -es aldeterminánsainak minden közös osztója osztója lesz $\underline{X}$ minden $i \times i$ -es aldeterminánsának, azaz $\text{l.n.k.ö.}\{\underline{X} \text{ } i \times i\text{-es aldeterminánsai}\} = \text{l.n.k.ö.}\{\underline{C} \underline{X} \text{ } i \times i\text{-es aldeterminánsai}\}.$

Ha ezt sikerül belátnunk, akkor analóg módon látható be, hogy minden $\underline{D} \in M_n[\mathbb{C}]$ invertálható mátrixra $\text{l.n.k.ö.}\{i \times i\text{-es aldeterminánsai}\} = \text{l.n.k.ö.}\{\underline{X} \underline{D} \text{ } i \times i\text{-es aldeterminánsai}\}.$ Tehát speciálisan $D'_i(\lambda) = D_i(\lambda)$ $i = 1, \dots, n$. És így $E'_i(\lambda) = \frac{D'_i(\lambda)}{D'_{i-1}(\lambda)} = E_i(\lambda)$, azaz $\underline{A}$ és $\underline{B}^{-1} \underline{A} \underline{B}$ invariáns faktorai megegyeznek.

Tekintsük a $\underline{C} \underline{X}$ mátrix i sora és i oszlopa által meghatározott $i \times i$ -es részmatricot.

Az egy sorban lévő elemek $c_{p,1}x_{1,q} + \dots + c_{p,n}x_{n,q}$ alakúak azonos p -re és különböző q -kra.

Az 5.10 Segédtelet alkalmazva azt kapjuk, hogy az $i \times i$ -es aldetermináns determinánsok összegére bontható szét. Minden sor n részre, tehát összesen n^i

mátrix determinánsainak összegére bontható. A felbontást úgy végezzük, hogy az új mátrixok egy-egy sorában a c -k oszlopindexe azonos legyen. Így a szétbontás után kapott $i \times i$ -es mátrixok az $\underline{X}$ mátrix egy-egy $i \times i$ -es részmatricából úgy kaphatók, hogy minden soruk meg van szorozva egy $\underline{C}$ -beli elemmel. Tehát ezen aldeterminánsok $\underline{X}$ bizonyos $i \times i$ -es aldeterminánsainak többszörösei. Tehát $\underline{X}$ $i \times i$ -es aldeterminánsainak minden közös osztója osztója $\underline{C} \underline{X}$ minden $i \times i$ -es aldeterminánsának.

F 1.10 Tétel: Egy λ_k -hoz tartozó r_k dimenziós Jordan-blokk determinánsosztói $D_{r_k}(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$ a többi 1. Blokkdiagonális mátrixnak minden $i \times i$ -es aldeterminánsa blokkok aldeterminánsainak szorzata, ahol az egyes aldeterminánsok dimenzióinak összege i .

Igy Jordan-féle normálalakú mátrix $n - i$ -edik determinánsosztója

$$\frac{D_n(\lambda)}{\prod_{i=1}^s (\lambda_i - \lambda)^{k_i}},$$

ahol k_i a λ_i -hez tartozó Jordan blokkok közül az i legnagyobb blokk dimenzióinak összege.

Bizonyítás: A λ_k -hoz tartozó r_k dimenziós $\underline{J}_k$ Jordan blokk esetén $D_{r_k}(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$, a többi determinánsosztó 1, mivel $\underline{J}_k - \lambda \underline{I}$ -ben van egy r_{k-1} dimenziós egységsmátrix, mint almátrix.

Jelöljük ki egy blokkdiagonális mátrixban i sort és i oszlopot. Ha van olyan blokk, amelybe ebből p sor és q oszlop esik és $p > q$, akkor az $i \times i$ -es aldetermináns kifejtésénél a p sorból kiválasztott elemek egyike nem a blokkhoz tartozik, tehát 0. Tehát csak akkor kapunk nem 0 aldeterminánst, ha a kiválasztott i sorból ugyanannyi metsz egy blokkot, mint ahány oszlop a kiválasztott i oszlopból. Tehát az $i \times i$ -es aldetermináns a tételben megadott módon jön létre, mivel a különböző blokkbeli elemek között nem lép fel inverzió.

A Jordan féle normálalakú mátrix determinánsosztóiról szóló állítás $i = n$ -re nyilvánvaló.

Ha $i < n$, akkor $D_{n-i}(\lambda)$ kiszámításához az $n - i$ dimenziós aldeterminánsok kellenek. Mindegyik a $\underline{J} - \lambda \underline{I}$ blokkjainak bizonyos determinánsainak szorzata. Ha egy blokkon belül nem a blokk meretű aldeterminánst veszünk ki, akkor, mivel a blokkon belül van 1 értékű ugyanilyen dimenziós aldetermináns, kicserélhetjük aldeterminánsunkat egy olyanra, ahol csak azok a blokkok adnak 1-től különböző szorzótényezőt, amelynek összes sora és oszlopa az aldeterminánshoz tartozik. Ezzel az eredetileg kiválasztott aldeterminánsunk egy osztójához jutunk. Tehát, ha az

$n - i$ dimenziós aldeterminánsok legnagyobb közös osztóját akarjuk meghatározni, akkor elég az így kapott aldeterminánsok legnagyobb közös osztóját venni. Azt kell megvizsgálni, hogy i sor és oszlop elhagyásával mekkorák azok a teljes Jordan-blokkok, amelyek biztosan bennmaradnak.

Mivel i blokk elhagyásakor elhagyhatunk bármely sajátértékhez tartozó blokkot azok a $(\lambda - \lambda_k)$ tényezők maradnak csak benn, amelyekhez legalább $i + 1$ blokk tartozik.

Ha egy λ_k sajátértékhez l blokk tartozik és $l < i$, akkor $(\lambda - \lambda_k)$ nem fog szerepelni $D_{n-i}(\lambda)$ -ban. Ha $l \geq i$, akkor $D_{n-i}(\lambda)$ -ban $(\lambda - \lambda_k)$ annyszor fog szerepelni, ahány $(\lambda - \lambda_k)$ multiplicitása $\underline{J} - \lambda \underline{I}$ -ben az i darab legnagyobb méretű blokk elhagyása után. Ezzel az állítást beláttuk.

F 1.11 Következmény: Ha V a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció és φ egy koordinátamátrixának determinánsosztói $D_n(\lambda), D_{n-1}(\lambda), \dots, D_1(\lambda), D_0(\lambda)$, akkor az $E_n(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, \dots, E_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}, \dots, E_1(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}$ invariáns faktorokból φ Jordan-féle normálalakú koordinátamátrixa leolvasható, nevezetesen a λ_i -hez tartozó j -edik maximális méretű Jordan-blokk dimenziója, $E_{n-j+1}(\lambda)$ -ban a $\lambda_i - \lambda$ gyöktényező kitevője.

Bizonyítás: Az F 1.9 Tétel szerint hasonló mátrixok determinánsosztói és invariáns faktorai megegyeznek. Így ezek φ minden koordinátamátrixára azonosak a Jordan-féle normálalakú koordinátamátrixának determinánsosztóival. Az invariáns faktorokra való állítás az előző tételbeli determinánsosztókra vonatkozó formulából leolvasható.

F 1.12 Következmény: Legyen V egy a komplex számtest feletti vektortér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Ekkor φ minimálpolinomja éppen $E_n(\lambda)$.

Bizonyítás: Az F 1.6 Következmény szerint φ minimálpolinomjában a $(\lambda - \lambda_i)$ gyöktényező kitevője a λ_i -hez tartozó maximális méretű Jordan-blokk dimenziója. Az F.11 Következmény szerint tehát ez a polinom éppen $E_n(\lambda)$.

F 1.13 Következmény: Ha a fenti tételeket egy $\underline{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixszal való szorzásra, mint lineáris transzformációra alkalmazzuk, akkor azonnal adódnak a 10.21, 11.17, 11.21 Tételek.

F 1.14 Példa: Hozzuk Jordan-féle normalakra az alábbi mátrixokat.

a.)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b.)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c.)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg $e^{\underline{A}t}$!

a.)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = (1 - \lambda)^2(1 + \lambda)^2 =$$

$= \underline{A}$ karakterisztikus polinomja.

Tehát $\underline{A}$ minimálpolinomja lehet $(1 - \lambda)^2(1 + \lambda)$, $(1 - \lambda)(1 + \lambda)^2$, $(1 - \lambda)(1 + \lambda)$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy $(1 - \lambda)^2(1 + \lambda)$ annihilálopolinom, de $(1 - \lambda)(1 + \lambda)$ nem, tehát $\underline{A}$ minimálpolinomja $(1 - \lambda)^2(1 + \lambda)$.

Tehát

$$D_4(\lambda) = (1 - \lambda)^2(1 + \lambda)^2 \quad E_4(\lambda) = (1 - \lambda)^2(1 + \lambda)$$

$$D_3(\lambda) = 1 + \lambda \quad E_3(\lambda) = 1 + \lambda$$

$$D_2(\lambda) = 1 \quad E_2(\lambda) = 1$$

$$D_1(\lambda) = 1 \quad E_1(\lambda) = 1$$

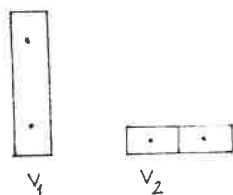
$$D_0(\lambda) = 1$$

Tehát

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}^4 = V_1 \oplus V_{-1}$, ahol $V_1 = \text{Ker}(\underline{A} - \underline{I})^2$, $V_{-1} = \text{Ker}(\underline{A} + \underline{I})$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_{-1} = 2$.

A Jordan-láncok



21. x ábra

$$(\underline{A} - \underline{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

V_1 elemei az

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Azaz olyan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektorok, ahol $x, y \in \mathbb{C}$ tetszőleges. $\text{Ker}(\underline{A} - \underline{I})^2$ -ben (mod $\text{Ker}(\underline{A} - \underline{I})$) bázist választunk.

Ez egyelemű.

$$\underline{A} - \underline{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

tehát például

$$\underline{s}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jó.

Igy

$$\underline{s}_1^{(1)} = (\underline{A} - \underline{I})\underline{s}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

V_2 -ben Jordan-bázist kapunk, ha vesszük $\text{Ker}(\underline{A} + \underline{I})$ egy bázisát, azaz $\underline{A}$ -nak két független (-1) -hez tartozó sajátvektorát.

$$\underline{A} + \underline{I} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásai

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \\ v \end{pmatrix}$$

alakúak.

Tehát például

$$\underline{u}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

két független megoldás.

Tehát $\underline{s}_1^1, \underline{s}_1^2, \underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_2^{(1)}$ Jordan-bázis.

Igy

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ha $f(x) = e^{xt}$, akkor $f'(x) = te^{xt}$

$$f(\underline{\underline{J}}) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \underline{\underline{C}} e^{\underline{\underline{J}}t} \underline{\underline{C}}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

b.)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = (1 - \lambda)^3 = D_3(\lambda) = \underline{\underline{A}}$ karakterisztikus polinomja.

$\underline{\underline{A}}$ minimálpolinomja lehet $(1 - \lambda)$, $(1 - \lambda)^2$ vagy $(1 - \lambda)^3$. Ezek közül csak $(1 - \lambda)^3$ annihilálópolinomja $\underline{\underline{A}}$ -nak, így ez a minimálpolinom.

Ekkor

$$D_3(\lambda) = (1 - \lambda)^3$$

$$D_2(\lambda) = 1$$

$$D_1(\lambda) = 1$$

$$D_0(\lambda) = 1$$

Tehát

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}^3 = V_1 = \text{Ker}(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}})^3$. 1 darab Jordan-lánc van.

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}} \begin{array}{l} s_1^{(3)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(1)} \end{array} \\ V_1 \end{array}$$

22. ábra

$s_1^{(3)} \in \text{Ker}(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}})^3 = \mathbb{C}^3$ -nak bázisa (mod $\text{Ker}(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}})^2$).

$$(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Például

$$\underline{s}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lehet.

$$s_1^{(2)} = (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}}) \underline{s}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_1^{(1)} = (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}}) \underline{s}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tehát

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Jordan-bázis és

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = e^{xt} \cdot \text{re } f'(x) = te^{xt} \quad f''(x) = t^2 e^{xt}$$

$$f(\underline{\underline{J}}) = e^{\underline{\underline{J}}t} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2 e^t}{2} \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2 e^t}{2} \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

c.)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = (2 - \lambda)^4 = D_4(\lambda) = \underline{\underline{A}}$ karakterisztikus polinomja,

$\underline{\underline{A}}$ minimálpolinomja lehet $(2 - \lambda)$, $(2 - \lambda)^2$, $(2 - \lambda)^3$, $(2 - \lambda)^4$.

$(2 - \lambda)^2$ a minimális fokú anullálópolinom, így

$$D_4(\lambda) = (2 - \lambda)^4$$

$$E_4(\lambda) = (2 - \lambda)^2$$

$$D_3(\lambda) = (2 - \lambda)^2$$

$$E_3(\lambda) = (2 - \lambda)^2$$

$$D_2(\lambda) = 1$$

$$E_2(\lambda) = 1$$

$$D_1(\lambda) = 1$$

$$E_1(\lambda) = 1$$

$$D_0(\lambda) = 1$$

és

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$C_4 = \text{Ker}(\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{I}})^2 = V_2 =$ a 2 sajátértékhez tartozó általánosított sajátaltér,
2 db 2 dimenziós Jordan-blokk van, így 2 db 2 hosszúságú Jordan lánc van.

$$\begin{array}{cc} \underline{\underline{s}}_1^{(2)} & \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} & \underline{\underline{s}}_2^{(1)} \\ \underline{\underline{s}}_1^{(1)} & \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} & \underline{\underline{s}}_2^{(2)} \end{array}$$

23. ábra

$\underline{\underline{s}}_1^{(2)}, \underline{\underline{s}}_2^{(2)} C_4 = \text{Ker}(\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{I}})^2$ -nek bázisa (mod $\text{Ker}(\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{I}})$)

$$\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Például

$$\underline{\underline{s}}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{s}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jó bázis a faktortérben. Így

$$\underline{\underline{s}}_1^{(1)} = (\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{I}})\underline{\underline{s}}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{\underline{s}}_2^{(1)} = (\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{I}})\underline{\underline{s}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tehát

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esetén

$$\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

és

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F 1.15 Megjegyzés: A Jordan-féle normálalakról szóló tétel igaz marad tetszőleges algebrailag zárt test feletti vektortér lineáris transzformációjára is.

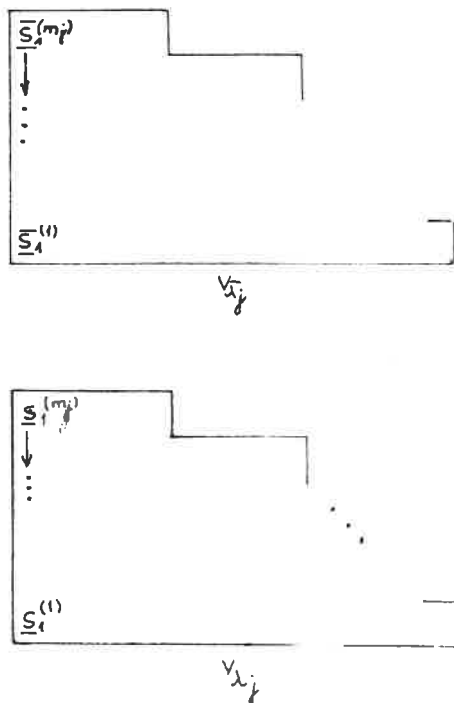
A valós számtest felett is lehet értelmezni az ú.n. valós Jordan-féle normálalakot. Erről szól a következő tétel:

F 1.16 Tétel: Legyen $\underline{\underline{A}} \in M_n[\mathbf{R}]$. Ekkor $\underline{\underline{A}}$ hasonló egy blokkdiagonális mátrixhoz, ahol a blokkok az $\underline{\underline{A}}$ valós sajátértékeihez tartozó szokásos értelemben vett Jordan-blokkok és a komplex konjugált sajátértékpárokhöz tartozó "blokkosított" Jordan-blokkok.

Ha $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ $\underline{\underline{A}}$ -nak egy komplex sajátértéke, akkor $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ $\underline{\underline{A}}$ -nak szintén sajátértéke és ugyanannyi ugyanolyan méretű Jordan-blokk tartozik hozzájuk. Ha egy ilyen blokk dimenziója k_j , akkor a blokkosított Jordan-blokk $2k_j$ dimenziós (például $k_j = 3$ esetben a blokkosított Jordan-blokk)

α_j	β_j	1	
$-\beta_j$	α_j	1	
	α_j	β_j	1
	$-\beta_j$	α_j	1
		α_j	β_j
		$-\beta_j$	α_j

Bizonyítás: A bizonyítás alapgondolata, hogy ha $\underline{\underline{A}} \in M_n[\mathbf{R}]$ valós és λ_j valós, akkor a λ_j -hez tartozó sajátaltérben valós elemű vektorokból konstruálunk meg Jordan-láncot. Ha λ_j komplex és $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, akkor $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ szintén gyöke $\underline{\underline{A}}$ karakterisztikus polinomjának és ugyanolyan multiplicitású. Sőt $\underline{\underline{A}}$ összes determinánsosztója is valós együtthatós polinom, így λ_j -hez és $\bar{\lambda}_j$ -hez ugyanannyi ugyanolyan méretű Jordan-blokk tartozik a komplex Jordan-féle normálalakban. Tehát a V_{λ_j} és $V_{\bar{\lambda}_j}$ általánosított sajátaltérek azonos struktúrájúak. V_{λ_j} minden Jordan-láncahoz található $V_{\bar{\lambda}_j}$ -ben egy neki megfelelő Jordan-lánc, ha a V_{λ_j} -beli Jordan-lánc vektorait megkonjugáljuk.



24. ábra

Az $\underline{s}_1^{(m_i)}, \dots, \underline{s}_1^{(1)}, \overline{s}_1^{(m_i)}, \dots, \overline{s}_1^{(1)}$ Jordan-lánccok helyett vegyük

$$\underline{x}_1^{(m_i)} = \frac{\underline{s}_1^{(m_i)} + \overline{s}_1^{(m_i)}}{2}, \dots, \underline{x}_1^{(1)} = \frac{\underline{s}_1^{(1)} + \overline{s}_1^{(1)}}{2}$$

valós részeket és az

$$\underline{y}_1^{(m_i)} = \frac{\underline{s}_1^{(m_i)} - \overline{s}_1^{(m_i)}}{2i}, \dots, \underline{y}_1^{(1)} = \frac{\underline{s}_1^{(1)} - \overline{s}_1^{(1)}}{2i}$$

képzetes részeket.

Hasonlóan járunk el a többi V_{λ_i} -ben található Jordan-lánccal is. Az így kapott vektorok száma épp egy bázis elemszáma $V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_i}$ -ban, tehát ez is bázis. Vegyük a báziselemeket a következő sorrendben: $\underline{x}_1^{(1)}, \underline{y}_1^{(1)}, \underline{x}_1^{(2)}, \underline{y}_1^{(2)}, \dots, \underline{x}_1^{(m_i)}, \underline{y}_1^{(m_i)}$, stb. Ekkor

$$\underline{A}\underline{x}_1^{(1)} + i\underline{A}\underline{y}_1^{(1)} = \underline{A}\underline{s}_1^{(1)} = (\alpha_j + i\beta_j) = (\underline{x}_1^{(1)} + i\underline{y}_1^{(1)}) =$$

$$= (\alpha_j \underline{x}_1^{(1)} - \beta_j \underline{y}_1^{(1)}) + i(\alpha_j \underline{y}_1^{(1)} + \beta_j \underline{x}_1^{(1)})$$

Igy

$$\underline{A}\underline{x}_1^{(1)} = (\alpha_j \underline{x}_1^{(1)} - \beta_j \underline{y}_1^{(1)})$$

és

$$\underline{A}\underline{y}_1^{(1)} = (\alpha_j \underline{y}_1^{(1)} + \beta_j \underline{x}_1^{(1)})$$

$$\underline{A}\underline{s}_1^{(2)} = \underline{x}_1^{(2)} + \underline{s}_1^{(1)}$$

azaz

$$\underline{A}(\underline{x}_1^{(2)} + i\underline{y}_1^{(2)}) = (\alpha_j + i\beta_j)(\underline{x}_1^{(2)} + i\underline{y}_1^{(2)}) + (\underline{x}_1^{(1)} + i\underline{y}_1^{(1)})$$

Tehát

$$\underline{A}\underline{x}_1^{(2)} + i\underline{A}\underline{y}_1^{(2)} = (\alpha_j \underline{x}_1^{(2)} - \beta_j \underline{y}_1^{(2)}) + i(\beta_j \underline{x}_1^{(2)} + \alpha_j \underline{y}_1^{(2)}) + (\underline{x}_1^{(1)} + i\underline{y}_1^{(1)})$$

Igy

$$\underline{A}\underline{x}_1^{(2)} = \alpha_j \underline{x}_1^{(2)} - \beta_j \underline{y}_1^{(2)} + \underline{x}_1^{(1)}$$

és

$$\underline{A}\underline{y}_1^{(2)} = \beta_j \underline{x}_1^{(2)} + \alpha_j \underline{y}_1^{(2)} + \underline{y}_1^{(1)}$$

stb.

Tehát a fenti bázisban az $\underline{A}$ -val való szorzás mátrixa a kívánt alakú.

	$\underline{x}_1^{(1)}$	$\underline{y}_1^{(1)}$	$\underline{x}_1^{(2)}$	$\underline{y}_1^{(2)}$	...
$\underline{x}_1^{(1)}$	α_j	β_j	1		
$\underline{y}_1^{(1)}$	$-\beta_j$	α_j		1	
$\underline{x}_1^{(2)}$			α_j	β_j	
$\underline{y}_1^{(2)}$			$-\beta_j$	α_j	

25. ábra

F 1.17 Példa: Hozzuk valós Jordan-féle normálakra az $\underline{A}$ mátrixot

a.)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b.)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a.)

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = (6 - \lambda)(\lambda^2 + 4)$$

$$\lambda_1 = 6 \quad \lambda_2 = 2i \quad \lambda_3 = -2i$$

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2i & \\ & & -2i \end{pmatrix}$$

a komplex normálalak

$$\underline{J}' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a valós normálalak.

Jordan-láncok

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline v_1 & v_{2i} & v_{-2i} \\ \hline \end{array}$$

26. ábra

Jordan-bázis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{s_1 + \bar{s}_1}{2}, \quad \frac{s_1 - \bar{s}_1}{2i}$$

ahol s_1 $2i$ -hez tartozó sajátvektor

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 & 0 \\ -2 & -2i & 0 \\ 2 & 0 & 6 - 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-2i)m_1 + 2m_2 = 0$$

$$-2m_1 + (-2i)m_2 = 0$$

$$2m_1 + (6 - 2i)m_3 = 0$$

ebből

$$s_1 = \begin{pmatrix} i - 3 \\ -1 - 3i \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_1 = \underline{u} + i\underline{v},$$

ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Igy a Jordan bázis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b.)

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 14\lambda^2 - 16\lambda + 8 =$$

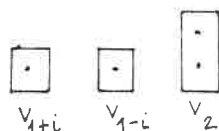
$$= (\lambda - (1 + i))(\lambda - (1 - i)) \cdot (\lambda - 2)^2 =$$

$$= A \text{ karakterisztikus polinomja} = \underline{A} \text{ minimálpolinomja}$$

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} 1 + i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a komplex Jordan-féle normálalak}$$

$$\underline{J}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a valós Jordan-féle normálalak}$$

Jordan-láncok



27. ábra

Legyen $\underline{s}_1^{(1)}, \underline{s}_2^{(1)}, \underline{s}_3^{(1)}, \underline{s}_3^{(2)}$ a komplex Jordan-bázis, ahol $\underline{s}_3^{(1)}, \underline{s}_3^{(2)}$ valós elemű vektorok ekkor $\text{Re } \underline{s}_1^{(1)}, \text{Im } \underline{s}_1^{(1)}, \underline{s}_2^{(1)}, \underline{s}_3^{(2)}$ valós Jordan-bázis.

Ajánlott irodalom

- [BP] Bajcsay Pál: Matematika II, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- [FE] Fried Ervin, Klasszikus és lineáris algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [FL] Fuchs László, algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974. ELTE J3-3331.
- [FM-I] Farkas Miklós, A matematika alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986, BME J4-796
- [FM-III] Farkas Miklós, Farkas Miklósné, Lineáris algebra III Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. BME J4-798,
- A hozzá tartozó példatárak:* Monostory Iván, Rábai Imre, Lineáris algebra III., Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. BME J4-933.
- és Monostory Iván, Szeredai Erik, Differenciálgeometria és vektoranalízis VI., Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. BME J4-810.
- [FSz] D.K. Fagyejev-I.Sz. Szominszkij; Felsőfokú algebrai feladatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [G] I.M. Gelfand, Előadások lineáris algebrából, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
- [GM] F.R. Gantmacher: Teorija matric, Moszkva 1953.
- [H] P. Halmos, Véges dimenziós vektorterek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.
- [J] N. Jacobson: Linear Algebra II., Springer-Verlag, New York, 1953.
- [L] Lovass-Nagy Viktor, Mátrixszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.
- [P] L. Sz. Pontrjagin: Közönséges differenciálegyenletek, Akadémiai Kiadó, 1972.
- [RP] Rózsa Pál, Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [SzP] Szász Pál: A differenciál-és integrálszámítás elemei I.-II. Közoktatásügyi Kiadó, Budapest, 1951.
- [SzT] Szele Tibor, Bevezetés az algebrába, Tankönyvkiadó, Debrecen, 1973.

*

Index

abszolút érték 18
 adjecencia mátrix 37
 adjungált 165
 alapmegoldás 75
 alaprendszer 75
 aldetermináns 47
 algebra alaptétele 15
 algebrai alak 17
 algebrai lezért 15
 algebrailag zárt 14
 alsó háromszögmátrix 54
 alterek összege 105
 altér kodimenziója 108
 antiszimmetrikus 103, 166
 arcus 18
 azonosan nulla leképezés 111
 általános megoldás 76
 általánosított sajátaltér 137
 általánosított sajátvektor 137
 Bessel-egyenlőtlenség 158
 bijektív 8
 bilineáris függvény szimmetrizáltja 153
 bilineáris függvény 146
 blokkdiagonális mátrix 92
 "blokkosított" Jordan-blokkok 206
 báziscseretranszformáció 123
 báziscsere 126
 bázis 62

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz
 egyenlőtlenség 159
 Cauchy-Hadamard 91
 computer algebra 98
 Cramer-szabály 42
 definitségi kritérium 155, 156
 determinánsok alaptulajdonságai 43
 determinánsok 41
 determinánsosztó 95
 diadikus szorzat 38
 diagonális mátrix 54
 dimenzió 62
 direkt kiegészítő 108
 direkt szorzat 8
 direkt összeg 105
 diád 69
 duális bázis 141
 duális tér 105
 $\mathbb{A}^t$ 101
 egyszerű struktúrájú mátrixnak 102
 egységgyök 20
 egységmátrix 36
 együtthatómátrix 36
 E_{ij} 177
 Einstein-féle konvenció 141
 ekvivalencia reláció 9
 ekvivalenciaosztályok 10
 elemi sorműveletek 77

elforgatás 110
 ellentett 59
 ellipszis 132
 első skalárinvariáns 85
 előjeles aldetermináns 47
 euklideszi algoritmus 25
 euklideszi tér 157
 exponenciális alak 18
 faktortér 105
 felbontási tételek 185
 felső háromszögmátrix 54
 felső háromszög 49
 felület 124
 ferde kifejtés 49
 ferdetest 12
 ferdén önadjungált 104, 166, 170
 Fourier-együttható 160
 főaldetermináns 156
 fődiagonális 77, 92
 főtengetlytétel 131
 függetlenség 59
 függvényssor 91
 függvény 8
 Gauss-elimináció 76
 gazdasági modellek 66
 generátorrendszer 62
 generátum 106
 GF(p) 13
 Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció 160
 gráf 37
 gyöktényezős alak 30
 gyűrű 13
 hasonlósági transzformáció 93
 Hermite interpoláció 99
 Hermite-féle bilineáris függvény 151
 hiperbola 132
 hiperdetermináns 56
 hipermátrix blokkjai 55

hipermátrix determinánsa 56
 hipermátrix inverze 57
 hipermátrix 55
 hipersík 108
 homogén 74
 Horner-séma 28
 identikus leképezés 111
 indefinit 154
 injektív 8
 interpoláció 30
 invariáns altér 136
 invariáns faktor 95
 inverz mátrix 43
 inverzió 41, 42
 inverz 50
 izometria 162
 Jacobi determináns 43
 jobbrendszer 127
 Jordan-blokk 94
 Jordan-láncok 193
 kanonikus alak 131
 karakterisztikus polinom 84
 kibővített mátrix 77
 kicserélési tétel 65
 kiegészítő aldetermináns 52
 kifejtési tag 41
 kifejtési tétel 42
 kinetikai energia 174
 kommutatív gyűrű 13
 kommutatív test 12
 komplex bilineáris függvény 149
 komplex főtengetlytétel 168
 komplex gyöktényezős alak 23
 komplex skaláris szorzás 149, 157
 komplex sorozat 91
 komplex számok 15
 komplex számsor 91
 konjugáltlineáris 149
 konjugált 18

kontravariáns vektorok 142
kontravariáns 125
konvergenciataromány 91
koordinátamátrix 117
koordinátavektor 115
koordinátázás 115
kovariáns vektorok 142
Kronecker-szorzat 140
kvadratikus alak mátrixa 153
kvadratikus alakok jellege 154
kvadratikus alakokra vonatkozó
főtengelytétel 173
kvadratikus alak 151
képtér 120
képzetes rész 17
Lagrange-interpoláció 30
Laplace-kifejtés 52
legkisebb közös többszörös 24
legnagyobb közös osztó 24
lineáris egyenletrendszer 73
lineáris egyenletrendszerek 36
lineáris funkcionálok 112
lineáris kombináció 61
lineáris operátor 105
lineáris operátorok vektortere 112
lineáris operátor 110, 120, 121
lineáris transzformáció 110, 135,
185
lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja 135
lineáris transzformáció polinomba
való behelyettesítése 135
lineáris tér 59
lineárisan független 61
lineárisan összefüggő 61
 $L(V_1, V_2)$ 112
magtér 120
MAPLE 98
maradékos osztás 25

második differenciál 154
másodrendű görbe 132
mátrix 33, 146
mátrix annullálópolinomja 86
mátrix konjugáltja 35
mátrix minimálpolinomja 87
mátrix nyoma 85
mátrix polinomja 96
mátrix rangja 67
mátrix transzponáltja 34
mátrixok szorzata 34
mátrixok összege 33
merőleges 158
metrikus tenzor 160
minormatrix 52
multiplicitás 23
negatív definit 154
negatív szemidefinit 154
nilpotens mátrix 92
normális lineáris transzformáció
169, 170
normális 103, 104, 166, 166
normálkoordináta 174
nullosztó 35
nullvektor 59
nullítás 121
nyújtás 110
ortogonális 103, 158, 166
ortogonális vetület 160
ortonormált 158
ortonormált vektorrendszer 127
oszlopvektor 37
oszlopvektorok tere 67
oszthatóság 24
önadjungált 104, 166
önadjungált lineáris transzformáció
168
parabola 132
parallelepipedon 43

parciális rendezés 10
parciális törtre bontás 32
partikuláris megoldás 76
Peano axiómák 10
permutáció 41
polarizációs formula 152
polinom 13
poláris felbontási tétel 186
pontrendszer rezgése 174
pozitív definit 154, 185
pozitív szemidefinit 154, 185
primér felbontási tétel 190
projekció 172
 p -szeresen kontravariáns tenzor 113
 q -szorosan kovariáns tenzor 113
racionális függvény 32
rang 121
Rang-nullítási tétel 121
Rayleigh-féle koordináta 174
reguláris 43
reláció 8
rendezési reláció 9
Riemann-terek 160
sajátaltér 137
sajátirány 84
sajátvektor 83, 135
sajátérték 83
sakktáblaszabály 47
sarokaldetermináns 156
skalárok 59
skalárvetület 160
sorvektor 37
spektrum 83
spektráltétel 168
Sylvester-féle tehetetlenségi tétel
175
szimmetrikus 103, 151, 166, 172
szimplektikus 151
szinguláris 43

szűrjektív 8
számelmélet alaptétele 23
szélsőérték 154
tenzorok 141
testaxiómák 12
test 59
 $\text{tr}(A)$ 85
trigonometrikus alak 18
triviális megoldás 74
többszörös gyöke 31
tükrözés 110
távolságtartó 179
unitér lineáris transzformáció 169
unitér 104, 166
valós bilineáris függvény 146
valós fő tengelytétel 172
valós Jordan-féle normáalak 206
valós rész 17
valós skaláris szorzás 157
valós számok 10
Vandermonde-determináns 54
vektor hossza 157
vektor normája 157
vektorok 36
vektoriális szorzat 127
vektorok skaláris szorzata 38
vektorok szöge 159
vektorrendszer 61
vektorterek tenzorszorzata 105
vektortér altere 105
vektortérizomorfizmus 111
vektortérkonstrukciók 105
vektortér 59
vetítés 110