NÉV: ______________________________ NEPTUN KÓD: ____________

MSC Lin. alg. **1. vizsga** *2008. január 14.*

I. rész. *Ebben a részben minden helyes válasz* 3 *pontot ér. Indokolni csak akkor kell, ha a feladat ezt kéri. A választ a keretbe írjuk!*

1. Írjunk fel egy olyan testaxiómát, amely NEM vektortéraxióma!

2. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix általánosított inverzét!

3. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix minimálpolinomját!

4. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Jordan-féle normálalakját!

5. Adjuk meg a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix exponenciális függvényét!

6. Mondjuk ki az $n \times n$-es együtthatómátixú, állandó együtthatós homogén lineáris diffegyenlet rendszer általános megoldásáróli szóló tételt!

7. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ spektrálsugarát!

8. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixnak adjuk meg szinguláris értékeit!

9. Írjuk fel a $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ normálvektorú, origón átmenő egyenesre való tükrözés mátrixát!

10. Adjunk meg olyan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixot, amelynek nincs $\mathbf{0}$ sora, és amelyre az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek nincs megoldása $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$-re.

11. Adjunk példát olyan A, B nem nulla 2×2-es mátrixokra, amelyekre $AB = 0$.

12. Konvex-e az $y = -x^2$ függvény?

13. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, és tegyük fel, hogy $\det A = 3$ és $\det B = 2$. Mennyi a $\det(2B^{-1}A^2)$ értéke?

14. Mondjuk el, hogyan történik a titokmegosztás polinomok segítségével!

15. Adjuk meg az A mátrix inverzében a harmadik sor harmadik elemét, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}?$$

16. Legyen $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Jelöljük nyilakkal, hogy az A, B és C állítások közül melyikből melyik másik következik!
   A: M-nek minden 2×2-es aldeterminánsa 0.
   B: M nem invertálható.
   C: M-nek van két egyforma sora.

A B

C

17. Definiáljuk egy $f : V \to W$ lineáris leképezés képterét és magterét!

18. Adjunk meg egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affin leképezést!

$f =$

19. Írjuk föl az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ standard mátrixú lineáris transzformáció mátrixát a $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban!

20. Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix spektrális normáját!

21. Egy valós M mátrix karakterisztikus polinomja $(x-2)^3x$. Az alábbi feltételek közül melyekből következik, hogy M diagonalizálható?
    A: M minimálpolinomja 2-odfokú.
    B: M-nek van három független sajátvektora, de négy nincs.
    C: M szimmetrikus.

22. Hány Jordan-blokkból áll az A mátrix Jordan-normálalakja, ha $k_A(x) = (x+1)^4(x-1)^2$, és $m_A(x) = (x+1)^3(x-1)$?

    A Jordan-blokkok száma:

23. Mekkora egy irreduciblis duplán sztochasztikus mátrix maximális sajátértéke?

    $\lambda =$

24. Milyen jellegű az $x^2 + y^2 - 2yz + 4z^2$ kvadratikus alak?

25. Döntsük el, hogy az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixra melyik teljesül az alábbi tulajdonságok közül, és írjuk a megfelelő betűjel(ek)et a keretbe!
    Ö: önadjungált U: unitér N: normális E: egyik sem

II. rész. *Ebben a részben tételeket kell ismertetni és bizonyítani. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra! A dolgozat hátlapjára írjunk!*

A. Mondjuk el, hogy a Frobenius-norma(=euklideszi norma), hogyan fejezhető ki a mátrix szinguláris értékeivel? Bizonyítsuk is be! (7 *pont*)

B. Mikor nevezünk egy $P : V \to V$ lineáris leképezést projekciónak? Mutassunk példát! Mondjuk ki és bizonyítsuk be a projekciók magteréről és képteréről szóló tételt! (18 *pont*)

Vizsgapontok: A részvizsgapontokat az alábbiak szerint számoljuk ki:

Összpontszám	00 – 36	37 – 52	53 – 68	69 – 76	77 – 100
Részvizsgapont	0 – 9	10 – 13	14 – 16	17 – 19	20 – 25