Vizsgafeladatok Algebra I-ből

1. a) Mutassuk meg, ha G csoport és $a \in G$, akkor $a^N = 1$ pontosan akkor, ha $o(a)|N$.
b) Mutassuk meg, hogy egy G csoportban ha $o(a) = n$, akkor $o(a^k) = \frac{n}{(n,k)}$.

2. Mutassuk meg, hogy ha G_1, G_2 csoportok és ϕ bijektív szorzattartó leképezés, akkor van inverze és az is szorzattartó!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban minden x elemre $x^2 = 1$, akkor a csoport kommutatív!

4. Legyen A, B egy G véges csoport két részcsoportja. Mutassuk meg, hogy $|AB| = \frac{|A|\cdot|B|}{|A\cap B|}$.

5.Legyen G csoport H nem üres részhalmaza. Mutassuk meg, hogy H pontosan akkor részcsoport, ha $H \cdot H = H$ és $H^{-1} = H$.

6. Legyen A és B a G csoport két részcsoportja. Mutassuk meg, hogy az AB komplexusszorzat ponotsan akkor részcsoport, ha $AB = BA$.

7. Mutassuk meg, hogy prímrendű csoport ciklikus.

8.Mutassuk meg, hogy ha $A \leq B \leq C$ részcsoportok G-ben, akkor ha $\{t_i | i \in I\}$ egy teljes jobboldali reprezentánsrendszere A-nak B-ben és $\{s_j | j \in J\}$ egy teljes jobboldali reprezentánsrendszere B-nak C-ben, akkor $\{t_i s_j | i \in I, j \in J\}$ teljes jobboldali reprezentánsrendszere A-nak C-ben! Mutassuk meg, ha $|C : A| < \infty$, akkor
$|C : A| = |C : B||B : A|$.

9. a) Legyen $G = GL(n,p)$, a p elemű test feletti $n \times n$-es invertálható mátrixok csoportja. Adjuk meg G rendjét!
b) Legyen $G = SL(n,p)$, a p-elemű test feletti 1-deteminánsú mátrixok csoportja. Adjuk meg G rendjét! Mutassuk meg, hogy $SL(n,p) \lhd GL(n,p)$.

10. Mutassuk meg, hogy ha $(n,m) = 1$, akkor $C_{nm} \simeq C_n \times C_m$.

11. Mutassuk meg, hogy $Z(G)$ minden részcsoportja normálosztó G-ben!

12.a) Mutassuk meg, hogy egy G csoport minden karakterisztikus részcsoportja normálosztó, de ez fordítva nem igaz!
b) Mutassuk meg, hogy normálosztó karakterisztikus részcsoportja normálosztó G-ben!
c) Mutassuk meg, hogy véges ciklikus csoport minden részcsoportja karakterisztikus!

13.Mutassuk meg, hogy egy G csoport minden másodrendű normálosztója bennevan a csoport centrumában!

14.a) Mutassuk meg, hogy $x, y \in G$ pontosan akkor felcserélhetők, ha $[x,y] = 1$!

b) Mutassuk meg, hogy G pontosan akkor Abel, ha $G' = 1$.
c) Mutassuk meg, hogy G pontosan akkor Abel, ha $Z(G) = G$.

15. Mutassuk meg, hogy ha A és B normálosztók G-ben és metszetük csak az egységelemet tartalmazza, akkor A és B elemei páronként felcserélhetők!

16.a) Mutassuk meg, hogy G' karakterisztikus részcsoportja G-nek, speciálisan $G' \lhd G$!
b) Mutassuk meg, hogy G/G' Abel-csoport!
c) Mutassuk meg, hogy G/N faktorcsoport pontosan akkor Abel, ha $G' \leq N$! (Tehát G' az a legkisebb normálosztó G-ben, amely szerinti faktorcsoport Abel)

17. Mutassuk meg, hogy ha $G/Z(G)$ ciklikus, akkor G Abel!

18.a) Mutassuk meg, hogy egy g csoportelem konjugáltjainak száma $|G : C_G(g)|$.
b) Mutassuk meg, hogy egy H részcsoport különböző $g^{-1}Hg$ konjugáltjainak száma $|G : N_G(H)|$!

19. a)Mutassuk meg, hogy G csoporthatás $\Omega = G$-n a konjugálással. Mi egy elem orbitja? Mi egy elem stabilizátora?
b) Mutassuk meg, hogy G csoporthatás egy H részcsoport G-beli konjugáltjain konjugálással. Mi lesz H orbitja? Mi lesz a H stabilizátora?

20.a) Mutassuk meg, hogy $|Syl_p(G)| = |G : N_G(P)|$ és ez osztója $|G : P|$-nek, ahol $P \in Syl_p(G)$.
b) Mutassuk meg, hogy egy G véges csoport egy p-Sylow részcsoportja pontosan akkor normálosztó, ha G-nek egyetlen p-Sylowja van.

21.a) Mutassuk meg, hogy ha $|G : H| < n$,és $|G| > n!$, akkor G nem egyszerű!
b)Mutassuk meg, hogy nincs 30-adrendű egyszerű csoport!
c)Mutassuk meg, hogy végtelenrendű egyszerű csoportban nincs véges indexű részcsoport!
d)Mutassuk meg, hogy nincs 36-odrendű egyszerű csoport!

22. Mutassuk meg, hogy A_5-ben nincs 15-ödrendű elem és nincs 15-ödrendű részcsoport sem!

23. Mutassuk meg, hogy ekvivalensek G véges csoportra:
a) G Sylowjainak direkt szorzata
b) G-ben minden Sylow-részcsoport normálosztó.

24. Mutassuk meg , hogy minden véges Abel-csoport a különböző prímekhez tartozó Sylowjainak direkt szorzata.

25. Legyen $G = G^{(0)}$, $G^{(i+1)} = {G^{(i)}}'$, a G csoport **kommutátor láncának** szemei. Mutas-

suk meg, hogy $G^{(i)}$ G-nek karakterisztikus részcsoportja! Mutassuk meg, hogy egy véges csoport pontosan akkor feloldható, ha kommutátorlánca véges sok lépésben lemegy az 1-re!

26.a)Mutassuk meg, hogy ha egy G véges csoport nilpotens, akkor minden $H < G$ részcsoportra $H < N_G(H)$.
b)Mutassuk meg, hogy egy véges nilpotens csoportra, minden maximális részcsoport normálosztó.

27. a)Adjuk meg D_6-ot generátorokkal és relációkkal!
b) Todd-Coxeter módszerrel is számítsuk ki a rendjét!

28.Mutassuk meg, hogy feloldható csoport minden részcsoportja és minden homomorf képe is feloldható.

29.a) Mutassuk meg, hogy ha $|G| = pq$, $q > p$ prímek, akkor $Q \in Syl_q(G)$ normálosztó G-ben!
b) Mutassuk meg, hogy ha p nem osztója $q-1$-nek, akkor $P \in Syl_p(G)$ is normálosztó és G ciklikus.
c)Legyen $|G| = pq$ nem Abel csoport, ahol $q > p$ prímek és $p|(q-1)$. Mutassuk meg, hogy $G = \langle a, b | a^q = 1, b^p = 1, b^{-1}ab = a^m$, ahol $m^p \equiv 1 \mod q$ és $m \not\equiv 1 \mod q \rangle$
d)Mutassuk meg, hogy ha $|G| = 2q$ nem Abel és $q > 2$ prím, akkor $G = \langle a, b | a^q = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ és ekkor $G \simeq D_{2q}$.

30. Legyen $|G| = 8$ nem Abel csoport. Mutassuk meg, hogy $G \simeq D_8$ vagy $G \simeq Q_8$.

31. Írjuk le az $1-15$-ödrendű Abel és nem Abel csoportok izomorfiatípusait (kivéve a 12-endrendűeket).

32.Mutassuk meg, hogy ha G p-hatványrendű Abel-csoport, akkor a ciklikus csoportok direkt szorzatára bontásában szereplő ciklikus direkt tényezők izomorfia típusai egyértelműek.

33. Mutasssuk meg, hogy ferdetestnek nincs egyoldali ideálja. Fordítva, ha egy gyűrűben nincs egyoldali ideál, akkor az prímelemű zérógyűrű vagy ferdetest.

34.a) Mutassuk meg, hogy minden integrítási tartományban minden prímelem irreducibilis.
b) Mutassuk meg hogy minden főideáltartományban az irreducibilis és a prímelemek azonosak.

35. Mik ideálok az alábbi gyűrűkben:Z mod n, $R[x]/(x^2 + 1)$, $C[x]/(x^2 + 1)$.

36. Mutassuk meg, hogy $Z[i]$ euklideszi gyűrű.

37.Melyek főideálgyűrűk:Z, R, $Z[x]$, $R[x]$, $Z[i]$ közül?

38. a) Határozzuk meg Z ideáljait és faktorgyűrűit!
b) Határozzuk meg egy F test feletti $F[x]$ polinomgyűrű ideáljait és faktorgyűrűit.

39.a) Mutassuk meg, hogy ha R kommutatív egységelemes gyűrű, akkor P pontosan akkor prímideál R-ben, ha R/P nullosztómentes.
b) Határozzuk meg Z és $F[x]$ prímideáljait!

40. (i)Mutassuk meg, hogy egységelemes gyűrűben mindig van maximális ideál! Használjuk a Zorn-lemmát!
(ii) Mutassuk meg, hogy ha R kommutatív egységelemes gyűrű, akkor M maximális ideál pontosan akkor, ha R/M test! Mutassuk meg, hogy ez nem kommutatív gyűrűkben nem igaz.

41.a) Mutassuk meg, hogy kommutatív egységelemes gyűrűben minden maximális ideál prímideál. Mutassunk példát prímideálra, ami nem maximális.
b)Határozzuk meg Z és $F[x]$ maximális ideáljait!

42.a) Hány eleme van a $GF(2)[x]/(x^2+x+1)$ faktorgyűrűnek? Test-e ez a faktorgyűrű?
b) Határozzuk meg e gyűrű szorzás- és összeadástábláját!

43. a) Legyen $|G| = pq$ nem Abel csoport, ahol $q > p$ prímek. Mutassuk meg, hogy G feloldható és pontosan akkor nilpotens, ha Abel.
b) Mutassuk meg, hogy ha $|G| = p^2q$, ahol $p \neq q$ prímek, akor G feloldható. (Ne használjuk a Burnside-tételt)

44.a) Mutassuk meg, hogy minden olyan véges Abel-féle p-csoport, amelyben minden elem rendje vagy p vagy 1, p-edrendű ciklikus csoportok direkt szorzata. (**Elemi Abel p-csoport**).
b) Mutassuk meg, hogy minden elemi Abel p-csoport $GF(p)$ feletti vektortér is.
c) Mutassuk meg, hogy ha F p^k elemszámú véges test, akkor ennek additív csoportja elemi Abel p-csoport.
d) Mutassuk meg, hogy ha F p^k elemszámú véges test, akkor ennek multiplikatív csoportja ciklikus csoport.