A2 Matematika vizsgazárthelyi 2006.05.31.

1. [15p] Legyen $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ az origó körüli pozitív irányú derékszögű elforgatás operátora. Adjuk meg T mátrixát a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázisban, ahol $\mathbf{b}_1 = (1,3)$, $\mathbf{b}_2 = (-1,-2)$.

2. [15p] Mutassuk meg, hogy bármely véges $[a,b]$, $a \geq 0$ szakaszra

$$\sum_1^\infty \int_a^b x^n e^{-nx} dx = \int_a^b \frac{x}{e^x - x} dx.$$

3. [15p] a. Keressük meg a konvergenciatartományt:

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_1^\infty (x/n)^n$$

b. Adjuk meg $(1-x)^{-2}$ $x_0 = 0$ körüli hatványsorát az $(1-x)^{-1}$ sorából vagy más módon.

4. [15p] Fejtsük Fourier-sorba az $f(x) = \cos(x/2)$, $|x| \leq \pi$ 2π-periodikus függvényt. Előállítja-e a Fourier-sor $f(x)$-et?

5. [15p] Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Folytonos-e f az origóban?
b. Számítsuk ki az f'_x, f'_y parciális deriváltfüggvényeket.
c. Totálisan differenciálható-e f az origóban?

6. [15p] Keressük meg az $x^4 + y^4 + 4xy$ függvény lokális szélsőértékhelyeit.

7 [15p] a. Adjuk meg a $z = 0$, $z = x + y$ és $x^2 + y^2 = x + y$ felületek által határolt test térfogatát.
b.

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy\, dx\, dz = ?$$