A2 Matematika vizsgazárthelyi 2006.06.21.

1. [15p] Legyen $B = \{1, \mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x\}$ és V a B által kifeszített vektortér, továbbá $T : V \to V$, $Tf = f" + 2f'$. Írjuk fel a T operátor mátrixát a B bázisban, és keressük meg T sajátértékeit és sajátvektorait.

2. [15p] a. Definiáljuk a függvénysorozat egyenletes konvergenciáját.
b. Adjuk meg az $f_n(x) = \mathrm{arc\,tg}\, nx$ függvénysorozat konvergenciatartományát és határfüggvényét. Egyenletes-e a konvergencia a $[0, \infty)$ félegyenesen?

3. [15p] Írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciaintervallumát (a végpontokat nem kell vizsgálni).

$$10^x \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$$

4. [15p] Legyen $f(x)$ 2π-periodikus, $f(x) = 0$, ha $-\pi < x < 0$ és $f(x) = 1$, ha $0 < x < \pi$. Írjuk fel $f(x)$ Fourier-sorát és adjuk meg a sor összegfüggvényét.

5. [15p] Mutassuk meg, hogy az $xy - e^{xz} + 3\ln(y+z) = 0$ implicit egyenletnek az $(1, 1)$ pont egy környezetében van egyetlen olyan $z(x, y)$ differenciálható megoldása, melyre $z(1, 1) = 0$. Számítsuk ki a $z'_x(1, 1)$ és $z'_y(1, 1)$ parciális deriváltakat.

6. [15p] Keressük meg az $x^2 + y^2 + xy$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 \le 1$ körlapon.

7 [15p] a. Adjuk meg az $z = 5 - x^2 - y^2$ és $z = 4x^2 + 4y^2$ felületek által határolt test térfogatát.
b.

$$\iint\limits_T \cos x \, dx\, dy = ?$$

ha $T = \{(x, y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi - x\}$.