8. gyakorlat

1. Számoljuk ki l'Hospital szabállyal az alábbi határértékeket.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{a^x}, \quad \text{ha} \quad a>0$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\delta}, \quad \text{ha} \quad \delta>0, \qquad e)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}, \qquad f)\ \lim_{x\to 0+}\frac{2x}{x+7\sqrt{x}}.$$

2. Alakítsuk át az alábbi határértékeket, és alkalmazzuk a l'Hospital szabályt.

$$a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{tg} 2x \qquad b)\ \lim_{x\to 0+} x^x \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \qquad e)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}, \qquad f)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$g)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) \qquad h)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \qquad i)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$j)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \qquad k)\ \lim_{x\to 1}\ln x\cdot\coth(x-1).$$

3. Hol vannak az alábbi függvények konvex iletve konkáv szakaszai illetve az inflexiós pontjai?

$$a)\ e^{-x^2} \qquad b)\ \ln(1+x^2) \qquad c)\ 3x^2-x^3.$$

4. Bizonyítsuk be:

a) $x\ln x$ konvex, ha $x>0$;

b) $x\ln x+y\ln y\geq(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ ha $x,y>0$.

5. Hol vannak az alábbi függvények monoton szakaszai illetve lokális és globális szélsőértékei?

$$a)\ \frac{x}{x^2+1} \qquad b)\ x^2\sqrt{3-x} \qquad c)\ x+\frac{1}{x}, x\in\left[\frac{1}{100},200\right] \qquad d)\ (x+1)^{10}e^{-x}, x\in\mathbb{R}.$$

6. Szélsőértékek alkalmazásokban

a) Hogyan lehet a legkevesebb anyagból előállítani egyenes henger alakú 1 literes zárt tartályt?

b) Milyen nyílásszögű körcikket vágjunk ki a körlemezből, ha maximális térfogatú tölcsért szeretnénk?

c) János cipőboltot tart fenn, a cipőket $c<10^4$ Ft-os áron szerzi be, és $x>c$ áron adja el. A tapasztalat szerint az x áron eladható cipők száma $n=a/(x-c)+b(10^4-x)$, valamilye $a,b>0$ konstansokkal. Milyen x eladási ár mellett lesz a legnagyobb a bolt tiszta nyeresége?