

Disztribúcióelmélet és Green-függvények
Vizsgatematika, 2015 tavasz

- (1) Alapfüggvény többdimenziós tartományon, konvergencia. Disztribúció. Reguláris disztribúció, meghatározza a függvényt. Disztribúció deriváltja, Heaviside függvény, Dirac-delta, $\log(|x|)'$. Disztribúciósorozat konvergenciája, $\sin(nx)$, $\frac{\sin(nx)}{x}$. Disztribúciósorozat és sor tagonkénti deriválása. Disztribúció és függvény szorzata.
- (2) Szoboljev-terek. $W_p^m(\Omega)$ Banach-tér. Nikodym tétele a közönséges derivált és a disztribúció-derivált kapcsolatáról. A $H^m(\Omega)$ Hilbert-tér. A $H^m(\mathbb{R}^d)$ jellemzése Fourier-transzformációval. Kiterjesztési tétel (sima határú tartományról).
- (3) Disztribúció tartója, disztribúciók egyenlősége résztartományon. Reguláris disztribúció tartója. Függvény nyoma a határon, nyomtétel. Klasszikus simaság, a $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ tér. Szoboljev beágyazási tétele.
- (4) Gyorsan csökkenő alapfüggvények, konvergencia. Temperált disztribúció, mérsékelt növekedésű függvény. Közönséges és temperált disztribúciók előállítása függvények deriváltjaként. Temperált disztribúció Fourier-transzformáltja. Azonosságok. Kompakt tartójú disztribúció temperált.
- (5) Függvények konvolúciója. A létezés elégséges feltételei, normabecslés konvolúcióra. Simító konvolúciósorozat konvergenciája. Disztribúciók konvolúciója, a létezés elégséges feltételei. Konvolúció deriválása. Konvolúció Fourier-transzformáltja.
- (6) Lineáris állandó együtthatós differenciáloperátor alapmegoldása, Malgrange-Ehrenpreis tétel. A differenciálegyenlet megoldása: létezés, egyértelműség. Alapmegoldások: közönséges differenciáloperátor, Cauchy-Riemann operátor, Laplace operátor, hővezetési operátor, hullámoperátor. Helmholtz operátor 3 dimenzióban.
- (7) A $H_0^m(\Omega)$ tér. Poincaré egyenlőtlenség. A duális $H^{-m}(\Omega)$ tér, jellemzése. Az $L = -\Delta + q + t : H_0^1 \rightarrow H^{-1}$ operátor. A Green-operátor és tulajdonságai. Rellich kompaktsági tétele. Az L operátor sajátértékei és sajátfüggvényei, a Green-operátor előállítása sajátfüggvényekkel.
- (8) Harmadik Green-formula. A Laplace-operátor Green-függvényének definíciója Dirichlet-peremfeltétellel. A $-\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ feladat megoldása Green-függvénnyel. A Green-függvény szimmetriája. Green-függvény kiszámítása gömbre, féltérre, félgömbre, síknegyedre. Poisson-formula gömbre és féltérre.
- (9) A $-\Delta$ operátorhoz és Dirichlet-peremfeltételhez tartozó Green-operátor egy integráloperátor, melynek magfüggvénye a Green-függvény. A Helmholtz-egyenlet klasszikus megoldása: létezés, egyértelműség, Sommerfeld sugárzási feltétel. Egyszeresen összefüggő síktartományon a Laplace operátor Green-függvénye a konform ekvivalencia tétel alapján.