Kalkulus 2., Matematika BSc
1. Házi feladat

Beadási határidő: 2016.02.29.

Jelölések

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

1. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, skalárszorzat $\mathbb{R}^n$-ben
2. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, metrika $\mathbb{R}^n$-ben
3. $B(x, r) \equiv B_x(r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$, x körüli r sugarú nyílt gömb

I. $\mathbb{R}^n$ topológiája, pontsorozatok

1. Legyen $x, z \in \mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy egy $y \in \mathbb{R}^n$ pontra pontosan akkor teljesül, hogy
$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z),$$
ha y az x-et és z-t összekötő szakaszon fekszik.

2. Igazoljuk, hogy minden $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ esetén
$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

3. Legyen $(x_n), (y_n)$ két sorozat $\mathbb{R}^p$-ben. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_n \to a$ és $y_n \to b$, akkor $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle a, b \rangle$ és $\|x_n\| \to \|a\|$.

4. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-n a következő rekurzív sorozatot! $x_0 = (0, 0)$,
$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + (2^{-n}, 0), & \text{ha } n \text{ páros,} \\ x_n + (0, 2^{-n}), & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$
Bizonyítsuk be, hogy (x_n) konvergens. Mi a határértéke?

5. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat korlátosság és konvergencia szempontjából!

   (a) $x_n = \left((-1)^n \frac{1}{n}, 1 + (-1)^n\right) \in \mathbb{R}^2$
   (b) $x_n = \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}, \frac{1}{n^2}, (1 + \frac{1}{n})^2\right) \in \mathbb{R}^3$
   (c) $x_n = \left((1 + \frac{1}{n})^{n+1}, \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \frac{5n^2+3n-1}{1-2n^2}\right) \in \mathbb{R}^3$,
   (d) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{n^2}{n+2}, \ldots, \frac{n^{p-1}}{n+p-1}\right) \in \mathbb{R}^p$,
   (e) $x_n = \left(n(\sqrt[n]{2} - 1), n(\sqrt[n+1]{2} - 1), \ldots, n(\sqrt[n+p-1]{2} - 1)\right) \in \mathbb{R}^p$.

6. Vizsgálja meg az adott térben az alábbi halmazokat nyíltság, korlátosság és ívszerűen összefüggőség szempontjából!

   (a) $A = \{(x, y) : a < x < b, y = 0\} \in \mathbb{R}^2$,
   (b) $A = \{(x, y) : x^2 - y^2 < 1\} \in \mathbb{R}^2$,
   (c) $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\} \in \mathbb{R}^2$,
   (d) $A = \left\{(x, y) : x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}\right\} \in \mathbb{R}^2$,

II. Többváltozós függvények határértéke, folytonossága

1. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét. A szintvonalak illetve síkmetszetek vizsgálatával ábrázoljuk vázlatosan a függvényeket! (Ha van lehetőségünk, rajzoltassuk ki valamilyen programcsomag segítségével!)

   (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,
   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$,
   (c) $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 3y^2$,
   (d) $f(x, y) = y^2 - x^2$,
   (e) $f(x, y) = \frac{1}{2x^2+3y^2}$.

2. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$,
   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy^3}{2x^2+2y^2}$,
   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,1-0)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$,
   (d) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2}$,

(e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

(f) $\lim_{x\to 3, y\to\infty}\frac{xy-1}{y+1}$.

3. Hol folytonosak az alábbi függvények?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} (2x+3y)\ln(x^2+y^2), & \text{ha } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & \text{ha } y\neq 0, \\ 0, & \text{ha } y=0 \end{cases}$$

További gyakorló példák (kidolgozottak is) találhatók:

- MATEMATIKA FELADATGYÜJTEMÉNY II. (Babcsányi) 14. fejezet 1.-23. feladatok
- „Kónya-féle feladatgyűjtemény” 3.1 és 3.2 fejezet.