Kalkulus 2., Matematika BSc
3. Házi feladat

Beadási határidő: 2016.03.14.

Érintősík

1. Igazoljuk, hogy a $z = x \cos \frac{y}{x}$ felület érintősíkjai egy ponton haladnak keresztül!
2. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2 - 2x$ felület azon pontjait, amelyekben az érintősík normálisa a koordinátarendszer tengelyeivel azonos szöget zár be!

Teljes differenciálok

1. Egy gömb átmérőjét 10 cm-nek mérjük. A mérés pontossága ± 0.1 mm. Becsüljük meg a gömbtérfogat számított értékének pontosságát!
2. Az R_1, R_2, R_3 ellenállásokat párhuzamosan kötve, az eredő ellenállás R értékére
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$
Az ellenállások értékére rendre 25Ω, 40Ω, 50Ω értékeket mérünk legfeljebb 0.5% hibával. Mekkora a maximális hiba R számított értékére? Melyik ellenállás megváltozására a legérzékenyebb az eredő ellenállás?
3. A P nyomású, V térfogatú, T hőmérsékletű ideális gázokat jól írja le a $PV = 8.31T$ egyenlet, ahol a nyomást kilopascal-ban (kPa), a térfogatot literben (l), a hőmérsékletet Kelvinben (K) adjuk meg. Hogyan változik meg közelítően a gáz nyomása, ha a térfogatot 12 l-ről 12.3 l-re növeljük, miközben a hőmérsékletet 310 K-ről, 305 K-re csökkentjük?

Magasabbrendű parciális deriváltak

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi többváltozós függvények kielégítik az adott parciális differenciálegyenletet!

(a) $z(x,y) = e^{-ay}\cos ax, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = a\frac{\partial z}{\partial y},$

(b) $u(x,t) = \sin(x-at) + \ln(x+at), \quad u_{tt} = a^2 u_{xx},$

(c) $u(x,y) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y, \quad u_{xx} + u_{yy} = 0.$

2. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+xy^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0.0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvényre $f_{xy} \neq f_{yx}$.

Szélsőértékszámítás

1. Határozzuk meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

   (a) $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y,$

   (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 6x + 2z.$

2. Határozzuk meg az alábbi f függvények abszolút szélsőértleit a megadott H halmazon!

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$, $H = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 9 - x\}$,

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$, $H = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$,

   (c) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $H = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. A matematikus Charles W. Cobb és a közgazdász Paul H. Douglas 1928-ban empirikus vizsgálatok alapján a következő összefüggést találta egy közgazdasági rendszer teljes F produktuma, a befektetett L munka és a rendszerbe invesztált K tőke között:
$$F(L,K) = L^{3/4}K^{1/4}.$$
Tegyük fel, hogy a befektetett munkára, illetve tőkére nézve a következő megszorítást tehetjük:
$$G(L,K) = L^{3/4} + K^{1/4} = 1.$$
Mikor lesz a produktum maximális ilyen feltételek mellett?

4. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x^2+y^2-x-z$ függvény szélsőértékeit, az $2x+y+z = 0$, $2x^2 - y + z = 0$ feltételek mellett!

5. Felül nyitott téglatest alakú, V térfogatú tartályt szeretnénk készíteni. Mekkorák legyenek a tartály élei, hogy az elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk?

6. Keresük meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ gömbön azon pontokat, melyek távolsága a $P(1, 2, 2)$ ponttól a legnagyobb, illetve legkisebb!

7. Egy adott ponton átmenő síkok közül melyik van legmesszebb az origótól?

További gyakorló példák (kidolgozottak is) találhatók:

- MATEMATIKA FELADATGYÜJTEMÉNY II. (Babcsányi) 15. fejezet 1.-35., 52.-135. feladatok
- „Kónya-féle feladatgyűjtemény" 3.5 fejezet.