

Kalkulus 2., Matematika BSc

4. Házi feladat

Beadási határidő: 2016.03.21.

Minta ZH

1. (10+5 pont)

(a) Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$. Mit értünk azon, hogy

- i. $x \in \mathbb{R}^n$ az A halmaz belső pontja,
- ii. $x \in \mathbb{R}^n$ az A halmaz határpontja,
- iii. $x \in \mathbb{R}^n$ az A halmaz torlódási pontja,
- iv. A korlátos,
- v. A összefüggő?

(b) Vizsgálja meg nyíltság, zártság, összefüggőség és korlátosság szempontjából az

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \neq 1, x^2 + y^2 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

halmazt!

2. (5+5 pont pont) Határozza meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

(a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 5} - 1}{x^2 + y^2 - 4y + 4},$$

(b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

3. (5+5+15 pont)

(a) Definiálja, hogy mit értünk azon, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban differenciálható!

- (b) Mondjon ki egy szükséges és egy elégséges feltételt az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli differenciálhatóságára!
- (c) Hol deriválható és mi a deriváltja ezeken a helyeken az alábbi függvénynek?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. **(10 pont)**

Határozza meg az $f(x, y) = x + \arctan \frac{x}{y^2}$ felület $P(2, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét, valamint a P -beli $\mathbf{v} = (4, 3)$ irányú iránymenti deriváltját!

5. **(10 pont)**

Számítsuk ki közelítőleg az $\lg(1 + 0, 01) \cdot \lg(1 + 0, 001)$ értékét, és becsüljük meg a számításunk hibáját!

6. **(15 pont)**

Az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbnek mely pontja van a legközelebb, illetve legtávolabb a $P(3, 1, -1)$ ponthoz?

7. **(15 pont)**

Egy V térfogatú téglatest alakú ékszertartó ládikát szeretnénk ajándékozni a kedvesünknek. Megnyugtató anyagi helyzetünknek köszönhetően, az alját bronzból (melynek értéke $B \text{ Ft/cm}^2$), oldalait ezüsből (melynek értéke $E \text{ Ft/cm}^2$), fedelét aranyból (melynek értéke $A \text{ Ft/cm}^2$) készítjük. Hogyan válasszuk meg a dobozka méreteit, ha költségünket vonzalmunk dacára minimalizálni szeretnénk?

Megjegyzés: Az 1. ZH szerkezetében nagyon hasonló lesz, tartalmában megjelenhet az abszolút, valamint a feltételes szélsőérték is!