# 1. Hatványsorok (folytatás)

1. Pl.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\ x^{3n} = \frac{1}{2}\, x^3 + \frac{2}{2^2}\ x^6 + \cdots \qquad\qquad R = ?}$$

Megoldás:

$$a_n = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } n \text{ nem osztható 3-mal} \\ \dfrac{n/3}{2^{n/3}}\,, & \text{ha } n \text{ osztható 3-mal} \end{cases}$$

Ezért $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } n \text{ nem osztható 3-mal} \\ \sqrt[n]{\dfrac{n/3}{2^{n/3}}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3}\ \sqrt[3]{2}}\,, & \text{ha } n \text{ osztható 3-mal} \end{cases}$

$\Longrightarrow$ Torlódási pontok: $t_1 = 0\,,\ t_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{R} \quad \longrightarrow \quad R = \sqrt[3]{2}$$

Egy ügyesebb megoldás: $u = x^3$ helyettesítéssel egy egyszerűbb feladatra vezetjük vissza.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, u^n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\ u^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R_b} \quad \longrightarrow \quad R_b = 2$$

Tehát $\quad |u| < 2 \quad \Longrightarrow \quad |x|^3 < 2 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt[3]{2} \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt[3]{2}$

2. Pl.

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}\ (x-2)^{2n}$$

Megoldás:

$u := (x-2)^2$ helyettesítéssel a sor alakja: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}\ u^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\ 9^n}{9^{n+1}\ (n+1)} = \cdots = \frac{1}{9} \quad \Longrightarrow \quad R_1 = 9$$

A végpontokat itt is lehet vizsgálni, de az eredeti sorban is vizsgálhatjuk majd. Most az utóbbi módon járunk el.

Tehát

$$|u| < 9 \quad \Longrightarrow \quad |(x-2)^2| < 9 \quad \Longrightarrow \quad |x-2| < 3 \quad \Longrightarrow \quad R = 3 \quad (-1 < x < 5)$$

A végpontokban:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$ divergens, hiszen nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

Konvergenciatartomány: $(-1\,,\,5)$

EDDIG VAN AZ I. ZH ANYAGA!

# 2. Hatványsorok összegfüggvénye

3. Pl.

Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Megoldás:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\,, \qquad f(0) = 0\,. \text{ Ha } x \neq 0\,:$$

$$f_1(x) := x \cdot f(x) = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\,, = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f_1'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\,, \qquad x \in (-R, R) \text{ esetén szabad tagonként deriválni:}$$

$$f_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$R = 1$, és az eredeti sornak is ugyanennyi, mert tagonkénti deriválásnál nem változik.

$$f_1(x) = \int_0^x f_1'(x)\,\mathrm{d}x (= f_1(x) - f_1(0)) = \int_0^x \frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^x \frac{(1-x)-1}{1-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\left.(x + ln(1-x))\right|_0^x = -x - \ln(1-x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x-\ln(1-x)}{x} = -1 - \dfrac{\ln(1-x)}{x} \quad , & \text{ha } |x| < 1\,,\ x \neq 0 \\ 0\,, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(Hf.: Tudjuk, hogy $f$ folytonos $|x| < 1$-ben.
Ellenőrizzük le, hogy igaz-e: $\lim\limits_{x\to 0} = f(0)(=0)$ ?)

4. Pl.

| |
|---|
| Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét! $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}\ x^n$$ |

Megoldás:

$R = 1$, mert $\cdots$
(Vagy itt mutatjuk meg, vagy az előző gondolatmenettel később indokoljuk.)

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}\ x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\ +1}{n+1}\ x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{1-x} + f(x) = \cdots \quad \text{(L. előző példa!)}$$

5. Pl.

| |
|---|
| Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét! $$\sum_{n=1}^{\infty} (n+3)\ x^n$$ |

Megoldás:

$R = 1$, mert $\cdots$

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)\ x^n\ , \quad f_1(x) := x^2 \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)\ x^{n+2} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x f_1'(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \left(\frac{x^4}{1-x}\right)'$$

Stb.
(Csak beszéljük meg a lényeget, mert nem jut idő a részletes kidolgozásra.)

# 3. Taylor polinom

6. Pl.

a) Definiálja az n-edrendű Taylor polinomot!

b) Írja fel a definíció segítségével az

$$f(x) = x^3 - 3 + \cos 3x$$

függvény $x_0 = 0$ pontbeli negyedrendű Taylor polinomját és a Lagrange-féle hibatagot!

c) Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0,1)$ értékét $T_4(0,1)$ értékével közelítjük?

Megoldás:

a) az $f$ függvény $x_0$ bázispontú $n$-edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ha $f$ legalább $(n+1)$-szer differenciálható $[x_0, x)$-ben (ill. $(x, x_0]$-ban), akkor $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}.$$

b)
$f(x) = x^3 - 3 + \cos 3x \qquad f(0) = -2$
$f'(x) = 3x^2 - 3\sin 3x \qquad f'(0) = 0$
$f''(x) = 6x - 9\cos 3x \qquad f''(0) = -9$
$f'''(x) = 6 + 27\sin 3x \qquad f'''(0) = 6$
$f^{IV}(x) = 81\cos 3x \qquad f^{IV}(0) = 81$
$f^{V}(x) = -243\,\sin 3x$

$$T_4(x) = -2 + \frac{-9}{2!}\,x^2 + \frac{6}{3!}\,x^3 + \frac{81}{4!}\,x^4$$

$$H = \frac{f^{V}(\xi)}{5!}\,x^5 = \frac{-243\ \sin 3\xi}{5!}\ 0,1^5\ , \qquad \xi \in (0\,,\,0.1)$$

$|\sin x| \le |x|$ miatt $\quad |\sin 3\xi| \le 3 \cdot 0,1$ , ezért

$$|H| = \frac{243\ |\sin 3\xi|}{5!}\ 0,1^5 < \frac{243 \cdot 3 \cdot 0,1}{5!}\ 0,1^5$$

# 4. Taylor sorok

1. (Pl.)

> Adja meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését és annak konvergenciatartományát!
> $$f(x) = \frac{1}{x+7}\,, \qquad g(x) = \frac{x+2}{x+7}\,, \qquad h(x) = \frac{3x^4}{x+7}$$

Megoldás:

$$f(x) = \frac{1}{7}\,\frac{1}{1-\frac{-x}{7}} = \frac{1}{7}\,\left(1-\frac{x}{7}+\left(\frac{x}{7}\right)^2-\left(\frac{x}{7}\right)^3+\left(\frac{x}{7}\right)^4-\,\cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\,\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\,x^n$$

$$\left(\text{Geometriai sor:}\quad a=\frac{1}{7}\,,\quad q=-\frac{x}{7}\right)$$

Konvergenciatartomány: $\quad |q| = \left|-\frac{x}{7}\right| = \frac{|x|}{7} < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < 7\,, \quad R_f = 7$

$$g(x) = \frac{x+7-5}{x+7} = 1-\frac{5}{x+7} = 1-5\cdot f(x) = 1-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\,x^n$$

Konvergenciatartomány: $\quad |x| < 7\,, \quad R_g = 7 \qquad$ (ugyanaz)

$$h(x) = \frac{3x^4}{x+7} = 3x^4\cdot f(x) = 3x^4\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\,(-1)^n}{7^{n+1}}\,x^{n+4}$$

Konvergenciatartomány: $\quad |x| < 7\,, \quad R_h = 7 \qquad$ (ugyanaz)

A következő példa átkerülhet a 7. heti gyakorlatba. A B0 kurzus gyakorlatvezetőitől kérek visszajelzést, hogy meddig jutottak! (Kónya I.)

2. (Pl.)

> Írja fel az $f$ függvény $x_0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg a sor konvergenciatartományát!
> $$f(x) = \frac{1}{x+2} \qquad a)\ x_0 = 2 \qquad b)\ x_0 = -5$$

Megoldás:

$x_0 = 2$ :

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x-2)+4} = \frac{1}{4}\ \frac{1}{1-\dfrac{-(x-2)}{4}} \left(= \frac{a}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{x-2}{4}\right) + \left(\frac{x-2}{4}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{4}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\,(x-2)^n$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left|-\frac{x-2}{4}\right| = \frac{|x-2|}{4} < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x-2| < 4\ , \quad (-2 < x < 6\ ,\ \ R_1 = 4)$$

$x_0 = -5$ :

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+5)-3} = -\frac{1}{3}\ \frac{1}{1-\dfrac{x+5}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{x+5}{3}\right) + \left(\frac{x+5}{3}\right)^2 + \left(\frac{x+5}{3}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+5}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}\,(x+5)^n$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left|\frac{x+5}{3}\right| = \frac{|x+5|}{3} < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x+5| < 3\ , \quad (-8 < x < -2\ ,\ \ R_2 = 3)$$