1. Taylor sorfejtés

1. Pl.

a) Írja fel az
$$f_1(x) = \frac{1}{x+3}$$
függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését! $R_1 = ?$

b) f_1 sorfejtésére támaszkodva írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését!
$$f_2(x) = \ln(x+3)\ , \qquad R_2 = ?$$
$$f_3(x) = \frac{1}{(x+3)^3}\ , \qquad R_3 = ?$$

Megoldás:

a) $$f_1(x) = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}\ \frac{1}{1-\frac{-x}{3}} = \frac{1}{3}\ \left(1 - \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 - \cdots\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\ x^n$$

Konvergenciatartomány: $|q| = \left|-\frac{x}{3}\right| = \frac{|x|}{3} < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x| < 3\ , \quad R_1 = 3$

b) $$f_2'(x) = f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\ x^n$$
$$\int_0^x f_2'(t)\ \mathrm{d}t\ =\ f_2(x) - \underbrace{f_2(0)}_{=\ln 3}\ =\ \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\ t^n\ \mathrm{d}t$$

$[0\,,\ x] \subset (-3\,,\ 3)\ ,$ szabad tagonként integrálni:
$$f_2(x) = \ln 3\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \int_0^x t^n\ \mathrm{d}t\ =\ \ln 3\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\ \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^x =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad f_2(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \frac{x^n}{n}, \qquad R_2 = R_1$$

(Tagonkénti integrálásnál nem változik a konvergenciasugár.)

$$f_1''(x) = \left(\frac{1}{x+3}\right)'' = \left(\frac{-1}{(x+3)^2}\right)' = \frac{2}{(x+3)^3} \quad \Longrightarrow \quad f_3(x) = \frac{1}{2} f_1''(x)$$

Tehát

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n\right)'' = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n\, (n-1)}{3^{n+1}} x^{n-2}$$

$R_3 = R_1$ (Tagonkénti deriválásnál nem változik a konvergenciasugár.)

2. Pl.

Tudjuk, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \qquad R = 1$$

a) Írja fel az

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!

b) Az a)-beli sorfejtést felhasználva adja meg az

$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) \mathrm{d}x$$

integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor polinomjának felhasználásával és becsülje meg a hibát!

Megoldás:

a) $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} u^n, \qquad R = 1$

$u = \frac{x^2}{3}$ helyettesítéssel:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n} x^{2n}$$

Konvergenciasugár: $\left|\frac{x^2}{3}\right| < 1 \implies |x| < \sqrt{3} \implies R_f = \sqrt{3}$

b) $[0\,,\,1] \subset (-\sqrt{3}\,,\,\sqrt{3})$, szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\underbrace{\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{2\cdot 3^2}}_{T_4(x)} + \frac{x^6}{3\cdot 3^3} - + \cdots \right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3\cdot 3} - \frac{x^5}{2\cdot 3^2\cdot 5} + \frac{x^6}{3\cdot 3^3} - + \cdots \Big|_0^1 = \frac{1}{3\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 3^3} - + \cdots \approx$$

$$\approx \frac{1}{3\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 5} = 0{,}1\,, \qquad |H| < \frac{1}{3\cdot 3^3} \text{ (Leibniz sor)}$$

Írjuk fel a táblára e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$ Taylor sorát és konvergenciatartományát!

---

3. Pl.

Írja fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor sorát és annak konvergenciatartományát!

a) $f_1(x) = \sin 3x^2$, $x_0 = 0$

b) $f_2(x) = \mathrm{e}^{4x}$, $x_0 = 0$, ill. $x_0 = 3$

c) $f_3(x) = \mathrm{sh}\, 2x^4$, $x_0 = 0$

d) $f_4(x) = \mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{ch}\, 5x$, $x_0 = 0$

Megoldás: $\cdots$

4. Pl.

$$f(x) = 5\,x^3\,\mathrm{e}^{-3x^2}\,, \qquad x_0 = 0$$

Írja fel a függvény Taylor sorát! Konvergenciatartomány?

$f^{(100)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

Megoldás: $\cdots$

A következő példa legyen házi feladat! De a következő héten nem ártana az eredményt felírni a táblára, hogy ellenőrizhessék a hallgatók.

5. Pl.

Határozza meg a következő számsorok pontos összegét!

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!} \;\bigl(= \mathrm{e}^4\bigr)$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \;\bigl(= \mathrm{e}^{-1/2}\bigr)$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \;(= \sin 1)$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \;(= \operatorname{ch} 1 \,-\, 1)$

Megoldás: $\dots$

6. Pl.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \, \sin x} = ?$$

Megoldás:

L'Hospital szabállyal hosszadalmas, ezért Taylor sorfejtéssel dolgozunk:

$\dots$

További példák, ha valakinek maradna ideje, de nem kell erőltetni!
(Esetleg csak megbeszélni a megoldást.)

7. Pl.

Tudjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1}, \quad |u| \le 1$$

a) Írja fel az

$$f(x) = x^3 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát! $R = ?$

b) $f^{(20)}(0) = ?$, $f^{(21)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Adjon becslést az $\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$ integrál értékére az integranduszt kilencedfokú Taylor polinomjával közelítve!

Megoldás:

a) $$\operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\ 2^{2n+1}}\ x^{4n+2}$$

Konvergenciatartomány: $\left|\frac{x^2}{2}\right| \le 1 \implies |x| \le \sqrt{2}$

$$f(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\ 2^{2n+1}}\ x^{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\ 2^{2n+1}}\ x^{4n+5} =$$

$$= \underbrace{\frac{x^5}{2} - \frac{x^9}{3\cdot 2^3}}_{T_9(x)} + \frac{x^{13}}{5\cdot 2^5} - \frac{x^{17}}{7\cdot 2^7} + \cdots \qquad R = \sqrt{2}$$

b) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ miatt $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$

$f^{(20)}(0) = 20! \cdot a_{20} = 0$, mert $a_{20} = 0$ (x^{20} -os tag nincs a sorban)

$$f^{(21)}(0) = 21! \cdot a_{21} = 21! \cdot \frac{(-1)^4}{9\cdot 2^9}$$

$\left(a_{21} \;:\; x^{21} \text{ együtthatója, ezért } \; 4n+5=21 \quad \Longrightarrow \quad n=4 \right)$

c) Mivel $[0\,,\,1] \subset (-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2})$, ezért szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\ 2^{2n+1}}\ x^{4n+2}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\ 2^{2n+1}} \int_0^1 x^{4n+2}\ \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\ 2^{2n+1}}\ \left.\frac{x^{4n+6}}{4n+6}\right|_0^1 = \left.\frac{x^6}{2\cdot 6} - \frac{x^{10}}{3\cdot 2^3\cdot 10} + \frac{x^{13}}{5\cdot 2^5\cdot 13} - \cdots\right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 6} - \frac{1}{3\cdot 2^3\cdot 10} + \frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 13} - \cdots \approx \frac{1}{12} - \frac{1}{240}\,, \qquad |H| < \frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 13}$$

(Leibniz sort kaptunk.)

Nem muszáj a szummás alakokat felírni, elegendő csak kiírni az elejéről annyi tagot, amennyi szükséges a megoldáshoz.

8. Pl.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^4} + x^4 - 1}{x^5\cdot \sin 2x^3} = ?$$

A számláló és a nevező megfelelő Taylor sorfejtésével oldja meg a feladatot!

Megoldás:

...