

Házi feladatok 5. sorozat (7. hét)

1. Ha A_n mérhető, akkor $\chi_{A_n} \rightarrow 0$ μ -m.m. pontosan akkor, ha

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k) = 0.$$

2. Ha $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ mérhető, akkor van olyan $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton növény, hogy

$$\lambda(f < c) = \lambda(g < c) \text{ minden } c > 0\text{-ra.}$$

3. Számítsuk ki az $x - x^3$ függvény teljes változását a $[-1, 1]$ szakaszon.

4. Legyen $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos, az $(1/(n+1), 1/n)$ szakaszon kívül 0 és $\int_0^1 g_n = 1$. Legyen

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x))g_n(y).$$

Számítsuk ki $\int_0^1 (\int_0^1 f dy) dx$ és $\int_0^1 (\int_0^1 f dx) dy$ értékét.