1] a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{\cos x}=3$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}}=\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=1$ miatt $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{ctg} x}=e$

2] $f'=\operatorname{arctg} x+x\frac{1}{1+x^2}$, $f''=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}-x\frac{2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0 \Rightarrow f$ konvex

$a=\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2}$, $b=\lim\limits_{+\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{+\infty}x(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2})$

$=\lim\limits_{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-1$, $y=\frac{\pi}{2}x-1$ az aszimptota

3] a) $f\in C[a,b]$ diffható (a,b)-n $\Rightarrow \exists c\in(a,b)$, hogy $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

b) $\ln 3\approx\ln e+\frac{1}{e}(3-e)=1+\frac{3}{e}-1=\frac{3}{e}$; $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{180}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}$

4] $f(x)=\operatorname{sh} x-x-1$, $f(0)=-1<0$, $f(+\infty)=+\infty$, mert az exponenciális növekedés gyorsabb, mint a polinomiális. f folytonos, ezért Bolzano tétele miatt van >0 gyöke. $f'(x)=\operatorname{ch} x-1>0$ ha $x>0$, f szig. monoton nő $\Rightarrow$ nem lehet két ~~gyöke~~ pozitív gyöke.

5] a) Ha $f,g\in C^1(I)$, akkor I-n $\int f'g=f(x)g(x)-\int fg'$

b) $\int\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)dx=\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x-3}\right)dx=-\ln|x-2|+2\ln|x-3|+C$, $x\neq 2,3$

$A=\frac{x-1}{x-3}\Big|_{x=2}=-1$, $B=\frac{x-1}{x-2}\Big|_{x=3}=2$

6] a) $\Omega_P=S_P-s_P=\sum(M_i-m_i)\Delta x_i$; a korlátos $f(x)$ integrálható $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists P$ felosztás, hogy $\Omega_P<\varepsilon$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{6x}=\frac{1}{3}$

7] a) $\int_4^8\frac{dx}{x}=[\ln x]_4^8=\ln 8-\ln 4=\ln 2$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

8] a) $f'=-\frac{1}{x^2}+x=\frac{x^3-1}{x^2}\begin{cases}<0 & (0,1)\text{-en}\\ >0 & (1,\infty)\text{-en}\end{cases}\Rightarrow f \begin{matrix}\text{csökken} & (0,1]\text{-en}\\ \text{nő} & [1,\infty)\text{-en}\end{matrix}$

b) $\int\frac{1+x}{1+x^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$