BME MATEMATIKA VERSENY
2003.04.24.

Az első és második feladat megoldását csak *elsőéves* hallgatóknál értékeljük; a többi feladatra bárki adhat be megoldást. Részmegoldásokat, általánosításokat ill. lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk. Minden feladatot kérünk *külön lapra* írni. Minden lapon szerepeljen olvashatóan: a feladat sorszáma, név, kar, szak, évfolyam, tankör. Csak olvasható és világos okfejtést értékelünk.

1. Legyen adott 1537 darab természetes szám, $a_1, \ldots, a_{1537}$ úgy, hogy egyiknek sincs 23-nál nagyobb prímosztója. Mutassuk meg, hogy van a számok között négy különböző indexû, amelyek szorzata negyedik hatvány.

2. Tegyük fel, hogy az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ konvex hatszög szemközti oldalai párhuzamosak (A_1A_2 az A_4A_5-tel stb.). Bizonyítsuk be, hogy az $A_1A_3A_5$ és az $A_2A_4A_6$ háromszögek területe egyenlő.

3. Legyen $f(x)$ akárhányszor differenciálható függvény a számegyenesen. Tegyük fel, hogy az $f^{(n)}(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens bármely véges intervallumon. Mi a határfüggvény?

4. Legyen $0 < x_1 < \pi$ és $n \geq 1$-re $x_{n+1} = \sin x_n$. Mutassuk meg, hogy az $x_n\sqrt{n}$ sorozat konvergens és adjuk meg a határértékét.

5. Bizonyítsuk be, hogy a sík bármely megszámlálhatóan végtelen A részhalmaza felbontható $A = A_1 \cup A_2$ alakban, ahol A_1 metszete bármely vízszintes, A_2 metszete bármely függőleges egyenessel véges halmaz.

6. Tegyük fel, hogy valós szimmetrikus $n \times n$-es mátrixok egy G halmaza csoportot alkot a mátrix-szorzásra nézve. Igazoljuk, hogy az összes $A \in G$ mátrixnak van közös sajátvektora.

7. Milyen valós α-ra konvergens az alábbi integrál?

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^\alpha \sin^2 x}.$$

FORDÍTS!

8. A G véges egyszerű gráfban legyen $x \neq y$ két olyan csúcs, melyek között minden feszített út páros számú élt tartalmaz. Összevonjuk x-et és y-t egyetlen $\{xy\}$ pontba, melyet G azon csúcsaival kötünk össze, melyek x és y közül legalább az egyikkel össze voltak kötve. Mutassuk meg, hogy az új gráf és G kromatikus száma ugyanaz.

9. Legyen a $p(x)$ polinom minden gyöke valós. Mutassuk meg, hogy ha $a \in \mathbf{C}$-ben $p'(x)$-nek többszörös gyöke van, akkor $p(a) = 0$.

10. Legyen $0 < x_1, x_2 < 1$, $x_1 \neq x_2$. Tekintsünk azonos eloszlású független $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változókat, ahol X_i értékei x_1 és x_2, p_1 és p_2 valószínűségekkel. Mutassuk meg, hogy

$$Y = 1 + X_1 + X_1X_2 + X_1X_2X_3 + \dots$$

egy jól definiált valószínűségi változó, melynek $F(y)$ eloszlásfüggvényére teljesül

$$F(y) = p_1F(\frac{y-1}{x_1}) + p_2F(\frac{y-1}{x_2}).$$

Munkaidõ: 15.00-19.00
Eredményhirdetés: május 8. csütörtök 15 órakor a Villamoskari Dékáni Hivatal által megadandó helyszínen. A kijavított dolgozatok és a megoldások május 8. után megtekinthetõk Horváth Miklós szobájában (H.23). Ugyanott az ajtó melletti hirdetõtáblán május elején olvashatók az eredmények a várhatóan díjat nyert hallgatók neveivel.