BME MATEMATIKA VERSENY
2004.04.29.

Az első és második feladat megoldását csak *elsőéves* hallgatóknál értékeljük; a többi feladatra bárki adhat be megoldást. Részmegoldásokat, általánosításokat ill. lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk. Minden feladatot kérünk *külön lapra* írni. Minden lapon szerepeljen olvashatóan: a feladat sorszáma, név, kar, szak, évfolyam, tankör. Csak olvasható és világos okfejtést értékelünk.

1. Bizonyítsuk be, hogy prímszámokból nem állítható össze végtelen számtani sorozat. Ne hivatkozzunk a prímszámtételre.

2. Ketten játszanak: felváltva húznak egy ismert véges, részben rendezett halmazból egy-egy elemet és az összes nála nagyobbat. Az veszít, akinek az utolsó elemet kell kihúznia. Mutassuk meg, hogy ha a kiinduló halmazban van legnagyobb elem, akkor a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

3. Az óra nagymutatója helyére egy korongot szerelünk, melynek kerületére az óralapnak megfelelő helyekre, de tetszőlegesen összekeverve felírjuk az 1,2,...,12 számokat. Mutassuk meg, hogy lesz olyan időpont, amikor a forgó korongra írt számok legalább két helyen megegyeznek az óralapon alattuk levő értékkel.

4. Keressünk olyan $f(x) \geq 0$ folytonos függvényt, amelyre

$$\int_0^1 f = 1, \quad \int_0^1 x f(x)\, dx = a, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\, dx = a^2$$

egy valós a-ra.

5. Legyen $m > 0$ valós. Akkor

$$\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-m(x+1/x)} dx = ?$$

6. Legyen A valós szimmetrikus mátrix. Mutassuk meg, hogy A pozitív szemidefinit $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$ minden B pozitív szemidefinit szimmetrikus valós mátrixra.

7. A és B fej vagy írást játszik, minden dobásban A a fejeket, B az írásokat számolja. Az nyer, aki először éri el a 10-et. A játékot 6:3-as állásnál félbe kell szakítani. Hogyan lehet igazságosan elosztani az 1000 Ft-os nyereményt?

8. a/ $X = \mathbf{R}^n$, $x \in X$-re $\|x\| = \max_{1\le i\le n} |x_i|$, $\varphi : X \to \mathbf{R}$ lineáris, $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\| \le 1\}$. Mutassuk meg, hogy ha $\|\varphi\| = \varphi(1, 1, ..., 1)$, akkor

$$\forall x_i \ge 0 \Rightarrow \varphi(x) \ge 0.$$

b/ Legyen X a valós $L_2(0, 1)$ a szokásos normával, $\varphi : X \to \mathbf{R}$ folytonos, lineáris, $\|\varphi\| = \varphi(f_0)$, ahol $f_0(x) = \sqrt{2x}$. Igaz-e, hogy

$$f \ge 0 \Rightarrow \varphi(f) \ge 0?$$

9. Legyen T korlátos, zárt síkbeli tartomány, $z = x+iy$ és $f \in C^1(T)$, azaz $f(z)$ a valós kétváltozós értelemben folytonosan differenciálható T-n. Bizonyítsuk be:

$$a/ \oint_{\partial T} f(z)\, dz = i \iint_T (f'_x + i f'_y)\, dx\, dy \quad \forall f \in C^1(T).$$

b/ Ha $z_0 \in T$ belső pont, akkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial T} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{2\pi} \iint_T \frac{f'_x + i f'_y}{z - z_0}\, dx\, dy \quad \forall f \in C^1(T)$$

ahol

$$\iint_T = \lim_{\varepsilon \to 0+} \iint_{T \setminus (|z - z_0| < \varepsilon)}.$$

Mit adnak ezek a képletek, ha $f(z)$ reguláris T-n?

Ünnepélyes eredményhirdetés: május 12. szerda 15.00-kor a J.210 teremben. Előtte hétfő délutántól az eredmények megtekinthetők a H.23-as szoba előtti hirdetőtáblán, a kijavított dolgozatokat pedig a szobában lehet megnézni.