BME MATEMATIKA VERSENY
2006.04.27. EIB.

Az első és második feladat megoldását csak *elsőéves* hallgatóknál értékeljük; a többi feladatra bárki adhat be megoldást. Részmegoldásokat, általánosításokat ill. lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk. Minden feladatot kérünk *külön lapra* írni. Minden lapon szerepeljen olvashatóan: a feladat sorszáma, név, kar, szak, évfolyam, tankör. Csak olvasható és világos okfejtést értékelünk.

1. Teljes hatványnak nevezzük az n^k, $n, k \geq 2$ alakú számokat (n, k egész). Mutassuk meg, hogy tetszőleges hosszúságú nemkonstans számtani sorozat van a teljes hatványok halmazában.

2. Adott a síkon egy L egyenes, egy K körvonal és a körlapon kívül egy P pont. Szerkesztendő egy kör, mely átmegy a P ponton, középpontja az L egyenesen van és érinti a K kört.

3. Legyen $\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ és $d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Bizonyítsuk be, hogy $d(x,y)$ metrika $\mathbf{R}$-en, de nem teljes.

4. Egy kerek asztalnál körben ül 2006 gyerek, egyikük előtt az asztalon 2006 darab csokoládé. Egy lépésen azt értjük, hogy az egyik gyerek az előtte lévő csokikból kettőt átad a jobboldali szomszédjának, vagy kettőt a baloldalinak, vagy egyet- egyet a jobb- és a baloldali szomszédnak. Alkalmas lépéssorozat után elérhető, hogy mindegyik gyerek előtt egy csoki legyen? Ha n gyerek és n csoki van, milyen n-re oldható meg a feladat?

5. Legyen $p(x)$ egy polinom N összeadandóval, azaz

$$p(x) = a_1 x^{n_1} + \cdots + a_N x^{n_N}.$$

Mutassuk meg, hogy $p(x)$ bármely nemnulla gyökének multiplicitása kisebb, mint N.

6. Legyenek $A_1, \ldots, A_k$ $n \times n$-es valós mátrixok azzal a tulajdonsággal, hogy bármely B valós $n \times n$-es mátrixra

$$\operatorname{tr}(A_i B) = 0 \ \forall i \Longrightarrow \operatorname{tr}(B) = 0;$$

tr a mátrix nyomát, azaz a főátlóbeli elemek összegét jelenti. Bizonyítsuk be, hogy az egységmátrix felírható az A_i mátrixok lineáris kombinációjaként.

7. Legyenek $f(x)$, $g(x)$ az (a, b) szakaszon integrálható függvények, $f(x)$ monoton növő, $g(x)$ pedig csökkenő. Mutassuk meg, hogy

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

8. Keressük meg a legrövidebb (nem feltétlenül egyenes) vonalat, amely egy szabályos háromszöglapot két egyenlő területű részre oszt.

9. Legyen A a G egyszerű gráf adjacencia-mátrixa, azaz $a_{ij} = 1$ ha az i és j csúcsok között vezet él, máskor $a_{ij} = 0$. Legyen λ_1 az A legkisebb sajátértéke.
a. Keressük meg az összes olyan gráfot, melyre $\lambda_1 > -1$.
b. Mutassuk meg, hogy az összefüggő gráfok között
$\lambda_1 = -1 \Leftrightarrow G$ legalább 2 pontú teljes gráf.

10. Minden ember a többitől függetlenül p valószínűséggel jobbkezes, q valószínűséggel balkezes, ahol $p, q > 0$, $p + q = 1$. Véletlenszerűen kiválasztott n ember közül legyen n_j jobbkezes, n_b balkezes. Mutassuk meg, hogy ha n Poisson-eloszlású, akkor n_j és n_b független valószínűségi változók.

Ünnepélyes eredményhirdetés: május 11. csütörtökön 15.00-kor a V2.704 teremben. Előző napon az eredmények megtekinthetők a H.23-as szoba előtti hirdetőtáblán, a kijavított dolgozatokat pedig a szobában lehet megnézni. A feladatsor és az eredmények felkerülnek a www.math.bme.hu/ horvath honlapra. Nagyrészt az itteni szereplés alapján választjuk ki azt a csapatot, amely a BME-t képviseli a 2006. július 20. és 26. között Odessában (Ukrajna) rendezendő nemzetközi matematika versenyen (ld. www.ucl.ac.uk/ ucahjej/imc).