# 10. gyakorlat megoldásai
# Teljes függvényvizsgálat

**F1.** Az alábbi függvényeken végezzünk teljes függvényvizsgálatot:

- értelmezési tartomány,
- zérushely,
- paritás, periodicitás,
- határértékek (az értelmezési tartomány „széleinél”), aszimptoták,
- első derivált: monotonitás, lokális szélsőértékek,
- második derivált: konvexitás, inflexiós pontok,
- grafikon vázolása,
- értékkészlet.

(a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$,

(b) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)^2$,

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2-x}$,

(d) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$,

(e) $f(x) = x^x$,

(f) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

**M1.** A megoldás során az alábbi rövidítéseket fogjuk használni:
ÉT: értelmezési tartomány
ÉK: értékkészlet
n.é.: nincs értelmezve
i.p.: inflexiós pont
min: lokális minimum
max: lokális maximum

Az itt rajzolt ábrák a függvények grafikonjának valós képét mutatják, ehelyett elegendő a kiszámolt adatoknak megfelelő sematikus ábrázolás.

(a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$
ÉT: $\mathbb{R}$
zérushely: ezt ennél a függvénynél nem vizsgáljuk
periódus: nincs (polinom, és így a végtelenben végtelenbe tart, ami nem lehet egy periodikus függvénynél)
paritás: nincs ($f(1) = -11$ és $f(-1) = -3$, melyek se nem egyenlőek, se nem ellentettek)
határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 = \lim_{x\to\infty} 3x^4 \left(1 - \frac{4}{3}\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{3x^4}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 = \lim_{x\to-\infty} 3x^4 \left(1 - \frac{4}{3}\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{3x^4}\right) = +\infty$$

Ferde aszimptota lehetne, de

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2}{x} = \lim_{x\to\infty} 3x^3 - 4x^2 - 12x + \frac{2}{x} = +\infty$$

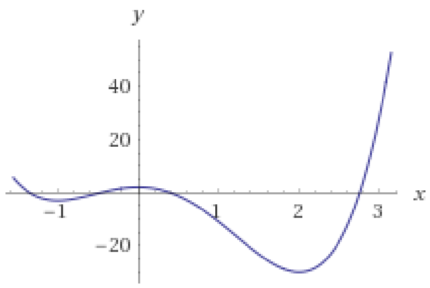
mutatja, hogy nincsen. Hasonlóan a $-\infty$-ben sincs.

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$
$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x - 24 = 36x^2 - 24x - 24$$

Az első derivált nullhelyei $0, 2, -1$. A második derivált nullhelyei $\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$, legyen $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \approx -0,55$ és $b = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 1,22$.

| | $x < -1$ | $-1$ | $-1 < x < a$ | $a$ | $a < x < 0$ | $0$ | $0 < x < b$ | $b$ | $b < x < 2$ | $2$ | $2 < x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$<br>mon. csök. | $0$<br>min. | | $+$<br>mon. nő | | $0$<br>max. | | $-$<br>mon. csök. | | $0$<br>min. | $+$<br>mon. nő |
| $f''$ | | $+$<br>konvex | | $0$<br>i.p. | | $-$<br>konkáv | | $0$<br>i.p. | | $+$<br>konvex | |

A lokális minimumok: $f(-1) = -3$ és $f(2) = -30$. A lokális maximum: $f(0) = 2$.
ÉK: $[-30, +\infty)$.



(b) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)^2$

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (mert $2x+1 \neq 0$)

zérushely: $x = 1$

periódus: nincs (egyetlen zérushely miatt)

paritás: nincs ($f(1) = 0$, de $f(-1) \neq 0$)

határértékek:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\frac{1}{2}+}\frac{\frac{9}{4}}{(2x+1)^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\frac{1}{2}-}\frac{\frac{9}{4}}{(2x+1)^2} = +\infty$$

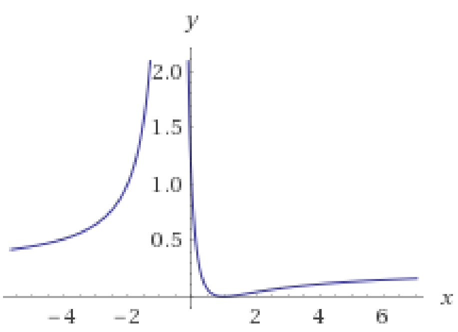
A függvénynek $\pm\infty$-ben az $y = \frac{1}{4}$ vízszintes aszimptotája van, míg $x = -\frac{1}{2}$-ben függőleges aszimptotája van.

$$f'(x) = 2\frac{x-1}{2x+1}\cdot\frac{2x+1-(x-1)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{6(x-1)}{(2x+1)^3}$$
$$f''(x) = \frac{6(2x+1)^3 - 6(x-1)\cdot 3(2x+1)^2\cdot 2}{(2x+1)^6} = \frac{6(2x+1)-36(x-1)}{(2x+1)^4} = \frac{-24x+42}{(2x+1)^4}$$

| | $x < -\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} < x < 1$ | $1$ | $1 < x < \frac{7}{4}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{7}{4} < x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | n.é. | $-$ | 0 | $+$ | | |
| | mon. nő | n.é. | mon. csök. | min. | monoton nő | | |
| $f''$ | $+$ | n.é. | $+$ | | | 0 | $-$ |
| | konvex | n.é. | konvex | | | i.p. | konkáv |

Lokális minimum: $f(1) = 0$.

ÉK: $[0, \infty)$.



(c) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2-x}$

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

zérushely: $x^2 - 3 = 0$, azaz $x = \pm\sqrt{3}$.

periódus: nincs (pl. a zérushelyek miatt)

paritás: nincs (pl. a zérushelyek miatt)

határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to2+} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to2+} \frac{1}{2-x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to2-} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to2-} \frac{1}{2-x} = +\infty$$

Az $x = 2$-ben függőleges aszimptota van. Nézzük meg, hogy a végtelenben van-e ferde aszimptota:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-3}{2-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2x-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{\frac{2}{x}-1} = -1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2-x} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3+2x-x^2}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1} = -2$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$-ben $y = -x - 2$. Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben is ez az aszimptota.

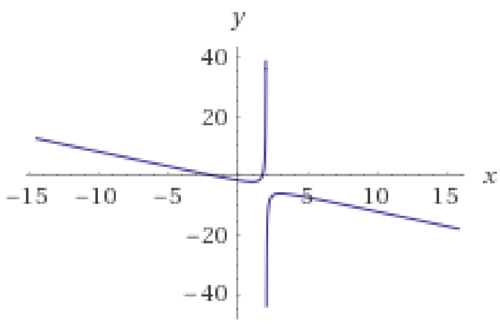
$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - (x^2-3)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(-2x+4)\cdot(2-x)^2 - (-x^2+4x-3)\cdot 2(2-x)\cdot(-1)}{(2-x)^4} = \frac{(-2x+4)\cdot(2-x) + 2(-x^2+4x-3)}{(2-x)^3} = \frac{2}{(2-x)^3}$$

Az első derivált nullhelyei $1, 3$, míg a másodiknak nincs.

| | $x<1$ | $1$ | $1<x<2$ | $2$ | $2<x<3$ | $3$ | $3<x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | 0 | $+$ | n.é. | $+$ | 0 | $-$ |
| | mon. csök. | min. | mon. nő | n.é. | mon. nő | max. | mon. csök. |
| $f''$ | $+$ | | | n.é. | $-$ | | |
| | konvex | | | n.é. | konkáv | | |

A lokális szélsőértékek: $f(1) = -2$, és $f(3) = -6$.

ÉK: $(-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$.



(d) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

ÉT: $\mathbb{R}$

zérushely: $x = 0$-ban zérus a függvény, más nullhely nincs, mert látni fogjuk, hogy szigorúan monoton nő.

periódus: nincs (egy zérushely miatt)

paritás: páratlan, mert $f(-x) = -x - \operatorname{arctg}(-x) = -x - (-\operatorname{arctg} x) = -f(x)$ (az arctg függvény páratlan).

határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} x - \operatorname{arctg} x = +\infty \text{ (mert az arctg függvény korlátos)}$$
$$\lim_{x\to-\infty} x - \operatorname{arctg} x = -\infty \text{ (mert az arctg függvény korlátos)}$$

aszimptoták (ferde aszimptoták lehetnek):

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} x - \operatorname{arctg} x - x = \lim_{x\to\infty} -\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$-ben $y = x - \frac{\pi}{2}$.

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$
$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to-\infty} x - \operatorname{arctg} x - x = \lim_{x\to-\infty} -\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

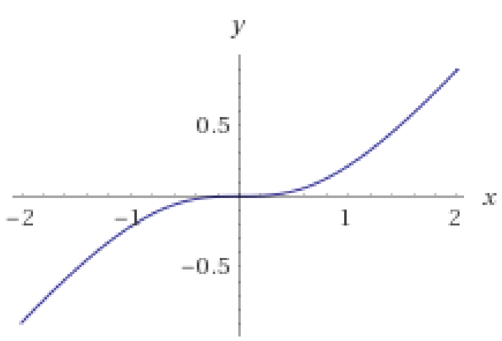
Tehát az aszimptota egyenlete a $-\infty$-ben $y = x + \frac{\pi}{2}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$
$$f''(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

| | $x < 0$ | 0 | $0 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | + |
| | monoton nő | - | monoton nő |
| $f''$ | $-$ | 0 | + |
| | konkáv | i.p. | konvex |

Bár az első derivált 0 a 0-ban, nincs lokális szélsőérték, a függvény végig szigorúan monoton nő.

ÉK: $\mathbb{R}$.



(e) $f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$

ÉT: $(0, +\infty)$

zérushely: nincs, mert mindenütt pozitív

periódus: nincs

paritás: nem lehet, mert a függvény csak a pozitív számokon van értelmezve

határértékek:

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} -x = 0 \text{ (L'Hospital-szabály)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^x = +\infty$$

Így a $+\infty$-ben lehetne ferde aszimptota, de

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x \to \infty} x^{x-1} = +\infty$$

miatt nincsen.

$$f'(x) = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \frac{1}{x}\right) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$$

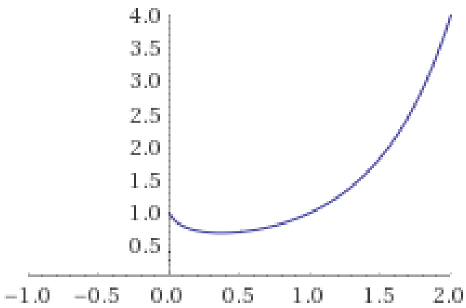
$$f''(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)^2 + e^{x \ln x} \frac{1}{x}$$

Az első derivált $\ln x + 1 = 0$ esetén nulla, azaz $x = \frac{1}{e}$ a nullhely. A második derivált a pozitív számokon pozitív.

| | $0 < x < \frac{1}{e}$ | $\frac{1}{e}$ | $\frac{1}{e} < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | 0 | $+$ |
| | mon. csök. | min. | mon. nő |
| $f''$ | | $+$ | |
| | | konvex | |

A lokális minimum értéke: $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0,692$

ÉK: $\left(e^{-\frac{1}{e}}, +\infty\right)$.



(f) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

ÉT: $\mathbb{R}$ $(1+e^x > 0)$.

zérushely: nincs $(e^x \neq 0)$

periódus: nincs

paritás: nincs

határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1+0} = 0, \text{ mert } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Tehát a függvénynek vízszintes aszimptotái vannak: a $+\infty$-ben az $y=1$ egyenes, míg a $-\infty$-ben az $y=0$ egyenes.

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot 2e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

| | $x<0$ | $0$ | $0<x$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | |
| | | monoton nő | |
| $f''$ | + | 0 | − |
| | konvex | i.p. | konkáv |

ÉK: $(0,1)$.