11. gyakorlat megoldásai

Határozatlan integrálok (primitív függvények)

F1. Keressük meg azt az f függvényt, amelyre

(a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \in \mathbb{R}^+), \quad f(4) = 1;$

(b) $f''(x) = 3e^x + 5\sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 2;$

(c) $f'''(x) = \sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1.$

M1. (a) A derivált függvényből $f(x) = \sqrt{x} + C$, másrészt $1 = f(4) = \sqrt{4} + C$, azaz $C = -1$, így $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

(b) Először a függvény derivált függvényét határozzuk meg, melynek ismerjük a deriváltját ($f''(x)$-et). Így $f'(x) = 3e^x - 5\cos x + C$, továbbá

$$2 = f'(0) = 3e^0 - 5\cos(0) + C = 3 - 5 + C,$$

amiből $C = 4$. Tehát

$$f'(x) = 3e^x - 5\cos x + 4.$$

Innen a függényt hasonlóan meghatározhatjuk: $f(x) = 3e^x - 5\sin x + 4x + C$, és így $1 = 3 - 0 + 0 + C$, azaz $C = -2$, azaz

$$f(x) = 3e^x - 5\sin x + 4x - 2.$$

(c) Itt is az előzőekhez hasonlóan járunk el: $f''(x) = -\cos x + C$,

$$1 = f''(0) = -\cos(0) + C = -1 + C,$$

így $C = 2$, $f''(x) = -\cos x + 2$. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$f'(x) = -\sin x + 2x + 1$$

és végül

$$f(x) = \cos x + x^2 + x.$$

F2. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x,\ x > 0;$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x,\ x > 0;$

(c) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\ x > 0.$

M2. Az integrál linearitása mellett azt használjuk, hogy $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ tetszőleges $n \neq -1$-re (nemcsak az egészekre).

(a) $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

(b) Először ki kell számolnunk, hogy x hányadik hatványát integráljuk.

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{x\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{4}}, \quad x\sqrt{x\sqrt{x}} = x^{\frac{7}{4}}, \quad \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{7}{8}}$$

felhasználásával: $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{7}{8}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}} + C = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C.$

(c) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x =$
$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

F3. Határozzuk meg az alábbi primitív függvényeket:

(a) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} \, \mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R};$

(b) $\int x^3(4x^4+6)^{2017} \, \mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R};$

(c) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\mathrm{tg}x)^3}} \, \mathrm{d}x, \ x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right).$

M3. Ennél a feladatnál a $\int f'(g(x))g'(x) \, \mathrm{d}x = f(g(x)) + C$ szabályt alkalmazzuk:

(a) Mivel $(e^{3x}+5)' = 3e^{3x}$, így $g(x) = e^{3x}+5$ függvényt választva majdnem alkalmazhatjuk a szabályt, csak 3-mal le kell osztani:

$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+5) + C.$

(b) Itt $g(x) = 4x^4+6$, melynek deriváltja: $g'(x) = 4 \cdot 4x^3$, így 16-tal osztunk:

$\int x^3(4x^4+6)^{2017} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{16}\frac{(4x^4+6)^{2018}}{2018} + C = \frac{(4x^4+6)^{2018}}{32288} + C.$

(c) Mivel $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, így a tangens a belső függvény:

$\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\mathrm{tg}x)^3}} \, \mathrm{d}x = \int (\mathrm{tg}x)'(\mathrm{tg}x)^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{(\mathrm{tg}x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\mathrm{tg}x}} + C.$

F4. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R};$

(b) $\displaystyle\int x^2\cos(5x)\,\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R};$

(c) $\displaystyle\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x,\ x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$

M4. A parciális integrálás képlete szerint: $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$

(a) Itt $f(x)=x$, $g'(x)=e^{3x}$, amiből $f'(x)=1$, $g(x)=\frac{e^{3x}}{3}$.

$$\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{3x}}{3} - \int 1\cdot\frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C.$$

(b) Itt az $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos(5x)$ választás a jó:

$$\int x^2\cos(5x)\,\mathrm{d}x = x^2\frac{\sin(5x)}{5} - \int 2x\frac{\sin(5x)}{5}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\sin(5x)}{5} - \frac{2}{5}\int x\sin(5x)\,\mathrm{d}x$$

Az utolsó integrál kiszámolásához újabb parciális integrálásra van szükség:

$$\int x\sin(5x)\mathrm{d}x = x\left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right)\mathrm{d}x = -\frac{x\cos(5x)}{5} + \frac{\sin(5x)}{25} + C$$

Tehát:

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(5x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2\sin(5x)}{5} - \frac{2}{5}\left(-\frac{x\cos(5x)}{5} + \frac{\sin(5x)}{25}\right) + C = \\ &= \frac{x^2\sin(5x)}{5} + \frac{2x\cos(5x)}{25} - \frac{2\sin(5x)}{125} + C.\end{aligned}$$

(c) Bár ez nem szorzat, mégis a parciális integrálást alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x &= \int 1\cdot\arcsin(3x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) - \int x\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}3\,\mathrm{d}x = \\ &= x\arcsin(3x) - \int\frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) + \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + C.\end{aligned}$$