12.-13. gyakorlat megoldásai

Határozatt integrálok és alkalmazásai

F1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int_1^3 x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

M1. Newton-Leibniz-formula: Ha az f függvény primitív függvénye az F, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$, ahol a jobb oldalra az $[F(x)]_a^b$ jelölést is használjuk.

(a) Az $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2}+C$ és a lineáris helyettesítést használva kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x+4)^{3/2}\right]_0^1 = \left[\frac{2(5x+4)^{3/2}}{15}\right]_0^1 = \frac{2\cdot 9^{3/2}}{15} - \frac{2\cdot 4^{3/2}}{15} = \frac{38}{15}.$$

(b) Mivel $(1+x^3)' = 3x^2$, így

$$\int_1^3 x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1+x^3)^{4/3}\right]_1^3 = \left[\frac{(1+x^3)^{4/3}}{4}\right]_1^3 = \frac{28^{4/3}-2^{4/3}}{4} \approx 20,63.$$

(c) Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

melyet a lineáris helyettesítéssel használva kapjuk, hogy

$$\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\big((5x-2)\ln(5x-2) - (5x-2)\big)\right]_1^4 =$$
$$= \frac{1}{5}\,(18\ln(18)-18) - \frac{1}{5}\,(3\ln(3)-3) \approx 6,75.$$

(d) Mivel $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, így

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = [-\cos(\ln x)]_1^e = -\cos(1)+1 \approx 0,46.$$

F2. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét.

M2. A két grafikon metszéspontjainak x koordinátái az $x^2 = \sqrt{x}$ egyenlet megoldásai, azaz 0 és 1. A közrezárt síkidom területe a két görbe alatti területnek a különbsége:

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

F3. Határozzuk meg az $y = -x^2 + 8x - 9$ és az $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

M3. Hasonlóan az előző feladathoz itt is először meghatározzuk a metszéspont koordinátáit: az $-x^2+8x-9 = \frac{x^2}{2}-4x+9$ másodfokú egyenlet megoldásai $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$. E két érték között kell a két függvény különbségét integrálni:

$$\int_2^6 (-x^2 + 8x - 9) - \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 9\right) \mathrm{d}x = \int_2^6 -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 6x^2 - 18x\right]_2^6 = 0 - (-16) = 16.$$

F4. Számítsuk ki az $f(x) = x^{3/2},\ 0 \leq x \leq 4$ függvény grafikonjának az ívhosszát.

M4. Az f függvény grafikonjának ívhossza: $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. A feladat esetében $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Így az ívhossz (ismét alkalmazva a lineáris helyettesítés szanályát):

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} \,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{8}{27}(10^{3/2}-1) \approx 9,07.$$

F5. Határozzuk meg az $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

M5. A forgásfelület térfogata: $\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$, mely a jelen esetben:

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \approx 4,93,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$, mely a $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ összefüggésből következik.