1. gyakorlat megoldásai
Középiskolai ismeretek ismétlése

F1. Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en az alábbi egyenleteket, és a megoldáshalmazokat szemléltessük a számegyenesen

(a) $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$,

(b) $\left|\dfrac{3x+2}{x-1}\right| = 3$.

M1. (a) A gyökvonás miatt $4x + 13 \geq 0$, azaz $x \geq -\frac{13}{4}$. Az egyenletet négyzetre emelve esetleg újabb gyököket kaphatunk:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= 4x+13\\ x^2+4x+4 &= 4x+13\\ x^2 &= 9\\ x &= \pm 3\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe azt kapjuk, hogy az $x = 3$ megoldás, az $x = -3$ nem megoldás.

(b) Kikötjük, hogy $x - 1 \neq 0$, azaz $x \neq 1$. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor 3, ha a szám -3 vagy $+3$. Tehát két eset van, az első:

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{x-1} &= -3\\ 3x+2 &= -3(x-1)\\ 3x+2 &= -3x+3\\ 6x &= 1\\ x &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

A másik eset:

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{x-1} &= 3\\ 3x+2 &= 3(x-1)\\ 3x+2 &= 3x-3\\ 2 &= -3,\end{aligned}$$

ami ellentmondás, tehát ebben az esetben nincs megoldás. Tehát az egyetlen megoldás az $x = \frac{1}{6}$.

F2. Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenséget, és a megoldáshalmazt szemléltessük a számegyenesen

$$\left|\frac{x}{2}+2\right| \leq 3$$

M2. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 3, ha a szám -3 és 3 között van:

$$\begin{aligned} -3 \leq \frac{x}{2}+2 \leq 3 \\ -5 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \\ -10 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Tehát $x \in [-10, 2]$ a megoldás.

F3. Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt.

M3. Teljes négyzetté alakítünk:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$$

Tehát az $y = x^2$ grafikonját 3 egységgel jobbra, és 1 egységgel lefelé kell mozgatnunk.

F4. Írjunk fel olyan egyenlőtlenség-rendszert, amelynek a megoldáshalmaza az $A(0,0)$, $B(0,5)$ és $C(1,3)$ csúcspontú háromszög belseje.

M4. Az AB oldalegyenesének egyenlete $x = 0$, az ettől jobbra levő pontokra $x > 0$.

Az AC oldalegyenes meredéksége $\frac{3}{1} = 3$, így az egyenlete $y = 3x + 0$, mivel átmegy az origón. A háromszög belseje ezen egyenes felett van, így a megfelelő egyenlőtlenség: $y > 3x$.

A BC oldalegyenes meredeksége $\frac{-2}{1} = -2$, így az egyenlete $y = -2x + 5$, mert az y-tengelyt az 5-nél metszi. A háromszög belseje ezen egyenes alatt van, így a megfelelő egyenlőtlenség: $y < -2x + 5$.

Tehát a kért egyenlőtlenség-rendszer:

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 3x \\ y &< -2x + 5 \end{aligned}$$