2. gyakorlat megoldásai
Polinomok

F1. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

(a) $x^2 + 7x + 10$,

(b) $-2x^2 + 7x + 3$.

M1. (a) A másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével a polinom két gyöke a -2 és a -5, így

$$x^2 + 7x + 10 = (x - (-2))(x - (-5)) = (x + 2)(x + 5).$$

(b) Ebben az esetben a két gyök $\frac{1}{2}$ és 3, így a szorzatalak (figyelembe véve, hogy a főegyüttható -2):

$$-2x^2 + 7x + 3 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (1 - 2x)(x - 3).$$

F2. Végezzük el a következő polinomosztást:

$$(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x).$$

M2. Az elődáson tanult módszerrel:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 & = & (x^2-3x)(2x^2+6x+17)+46x+6 \\
2x^4 & - & 6x^3 & & & & & & & & \\
\hline
 & + & 6x^3 & - & x^2 & & & & & & \\
 & & 6x^3 & - & 18x^2 & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & + & 17x^2 & - & 5x & & & & \\
 & & & + & 17x^2 & - & 51x & & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & + & 46x & + & 6 & &
\end{array}$$

Tehát a maradék $46x + 6$.

F3. Keressük meg az

$$x^3 - x^2 - 25x + 25 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinom egész gyökeit.

M3. Mivel a polinomnak a főegyütthatója 1, így az összes racionális gyöke egész, és ezek a 25 konstanstag osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 5, \pm 25$. Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:
$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, tehát az 1 gyök.
$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$, tehát a -1 nem gyök.
$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$, tehát az 5 gyök.
$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$, tehát a -5 gyök.
$25^3 - 25^2 - 25 \cdot 25 + 25 = 14400$, tehát a 25 nem gyök.
$(-25)^3 - (-25)^2 - 25 \cdot (-25) + 25 = -15600$, tehát a -25 nem gyök.
Így a polinom egész gyökei az $1, 5, -5$. Mivel egy harmadfokú polinomnak legfeljebb 3 darab gyöke lehet, így miután találtunk hármat, már nem is kellett volna ellenőrizni, hogy a ± 25 gyök-e.

F4. Határozzuk meg az

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinom valamennyi valós gyökét.

M4. Először megpróbálunk racionális gyököt keresni. Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$. Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát ez gyök. Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{ccccccccccl}
x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & = & (x-1)(x^3 - 5x^2 + 5x + 3) \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & \\ \cline{1-3}
 & - & 5x^3 & + & 10x^2 & & & & & & \\
 & - & 5x^3 & + & 5x^2 & & & & & & \\ \cline{2-5}
 & & & + & 5x^2 & - & 2x & & & & \\
 & & & + & 5x^2 & - & 5x & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & + & 3x & - & 3 & & \\
 & & & & & + & 3x & - & 3 & & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Maradék nincsen, mert a 1 gyök. Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy a 3 gyök, melyet kimelhetünk:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2-2x-1) \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\
\hline
& - & 2x^2 & + & 5x & & & & \\
& - & 2x^2 & + & 6x & & & & \\
\hline
& & & - & x & + & 3 & & \\
& & & - & x & + & 3 & & \\
\hline
& & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Végül az x^2-2x-1 másodfokú polinom gyökeit a másodfokú egyenlet megoldóképletével határozhatjuk meg: $1\pm\sqrt{2}$. Tehát a negyedokú polinom gyökei: $1, 3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$.

F5. A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a

$$4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

M5. A polinomba $x = 1$-et helyettesítve: $4\cdot 1^4 + c\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 - 4\cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1. Az így adódó $4x^4+4x^3-3x^2-4x-1$ polinom racionális gyökei: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ (a nevezőben a 4 főegyüthatói osztói szerepelnek). Az 1 gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott $4x^3+8x^2+5x+1$ polinom racionális gyökei szintén a $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ lehetnek, így ezekkel próbálkozunk. A -1 is gyök, így azt is kiemeljük:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 + 4x + 1)$$

A $4x^2+4x+1$ másodfokú polinomnak a megoldóképletből a $-\frac{1}{2}$ kétszeres gyöke (0 a diszkrimináns).

Tehát az eredeti negyedfokú polinom gyökei: $1, -1, -\frac{1}{2}$, legutóbbi kétszeres. Így a gyöktényezős felbontás:

$$4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 4(x-1)(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2,$$

ahol a legutolsó tag azért van négyzeten, mert a hozzá tartozó $-\frac{1}{2}$ gyök kétszeres.