3. gyakorlat megoldásai
Függvények

F1. Adjuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető:

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{3x+2} \cdot \log_{\frac{1}{3}} |2x-1|.$$

M1. Négyzetgyököt csak nemnegatív számból tudunk vonni, így szükséges, hogy $2x - 1 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{1}{2}$. Nullával nem tudunk osztani, így $3x + 2 \neq 0$, azaz $x \neq -\frac{3}{2}$. A logaritmus függvény csak pozitív számokon értelmezett, így szükséges, hogy $|2x-1| > 0$, ami azt jelenti, hogy $2x-1 \neq 0$, azaz $x \neq \frac{1}{2}$. Mind a három kikötés szükséges, ami azt jelenti, hogy $x > \frac{1}{2}$, azaz $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

F2. Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:
(a) $f(x) = 1 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(u) = \sqrt{u} \quad (u \in \mathbb{R}_0^+)$;
(b) $f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(u) = 2^u \quad (u \in \mathbb{R})$.

M2. (a)

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(\sqrt{u}) = 1 - (\sqrt{u})^2 = 1 - u \quad (u \in \mathbb{R}_0^+)$$

Ez a kompozíció csak nemnegatív u-kra értelmes, habár a kapott kifejezés értelmezhető tetszőleges u-ra is.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$$

feltéve, hogy a g függvény értelmezési tartománya miatt $1 - x^2 \geq 0$, azaz $|x| \leq 1$.

(b) Ebben az esetben nincs gond az értelmezési tartománnyal:

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(2^u) = (2^u)^2 = 2^{2u},$$

használva a hatványozás azonosságait.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2^{x^2} = 2^{(x^2)},$$

ebben az esetben nem mindig írjuk ki a zárójeleket a hatványozásnál.

F3. Mely két függvény kompozíciója az alábbi függvények?

(a) e^{x^2}, (b) $\sin^2(x)$, (c) $\ln \ln x$.

M3. Az $f \circ g$ alakú kompozicionál a következő a szereposztás:

(a) $f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2$;

(b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin(x)$;

(c) $f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \ln(x)$.

F4. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = |x^2 - 7x + 12| \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény nem invertálható.

M4. Elég megmutatni, hogy van legalább egy olyan érték, melyet a függvény két különböző helyen felvesz. Erre több lehetőség is van, pl. az $x^2 - 7x + 12 = (x - 3,5)^2 - 0,25$ átalakítás segítségével ábrázolhatjuk a függvényt, és akkor látszik, hogy minden pozitív számot többször is felvesz. Megoldóképlettel vagy másképpen észrevehetjük, hogy $f(3) = f(4) = 0$.

F5. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \frac{x-2}{2x+3} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{3}{2}\right\}\right)$$

függvény invertálható, és állítsuk elő az inverz függvényt.

M5. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x) = f(y)$ egyenlőségből következzen, hogy $x = y$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2x+3} &= \frac{y-2}{2y+3} \\ (x-2)(2y+3) &= (y-2)(2x+3) \\ 2xy - 4y + 3x - 6 &= 2xy - 4x + 3y - 6 \\ 7x &= 7y \\ x &= y. \end{aligned}$$

Ha $f(x) = y$, akkor az inverz függvény az y-ból mondja meg, hogy mi az x:

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{2x+3} &= y \\
x - 2 &= (2x+3)y \\
x - 2 &= 2xy + 3y \\
x - 2xy &= 2 + 3y \\
x(1-2y) &= 2 + 3y \\
x &= \frac{2+3y}{1-2y},
\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépés csak akkor megengedett, ha $1 - 2y \neq 0$, azaz $y \neq \frac{1}{2}$. De az f függvény nem veszi fel az $\frac{1}{2}$ értéket, mert ha felvenné:

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{2x+3} &= \frac{1}{2} \\
2(x-2) &= 2x + 3 \\
2x - 4 &= 2x + 3 \\
-4 &= 3,
\end{aligned}$$

akkor ellentmondásra jutnánk. Tehát a függvény inverze $f^{-1}(y) = \frac{2+3y}{1-2y}$, vagy az x változóval felírva:

$$f^{-1}(x) = \frac{2+3x}{1-2x}.$$

Megjegyezzük, hogy az inverz számolásából is következik, hogy a függvény invertálható, hiszen megmutattuk, hogy ha a függvény felvesz egy y értéket, akkor azt csak a fenti x helyen veheti fel, amiből persze következik, hogy csak egyszer.

F6. Invertálható-e az $f(x) = \sqrt[3]{27 - x^3}$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét.

M6. Hasonlóan az előző feladathoz az invertálhatóságnak az a feltétele, hogy az $f(x) = f(y)$ egyenlőségből következzen, hogy $x = y$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{27 - x^3} &= \sqrt[3]{27 - y^3} \\
27 - x^3 &= 27 - y^3 \\
x^3 &= y^3 \\
x &= y,
\end{aligned}$$

ahol legutolsó lépésben kihasználtuk, hogy a 3 páratlan szám.

Az inverzhez is ugyanazt kell kiszámolni, mint az előbb:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{27-x^3} &= y \\
27-x^3 &= y^3 \\
27-y^3 &= x^3 \\
\sqrt[3]{27-y^3} &= x.
\end{aligned}$$

Tehát az inverz:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{27-x^3},$$

ami mellesleg az eredeti függvény.

F7. Legyen $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ függvény a következő:

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - 7 \quad (x \in (0,\pi)).$$

Invertálható ez a függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét.

M7. Hasonlóan az előzőekhez $x, y \in (0,\pi)$-ra:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - 7 &= \operatorname{tg}\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - 7 \\
\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{tg}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Mivel $x, y \in (0,\pi)$, így $x-\frac{\pi}{2}, y-\frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ebben az intervallumban a tangens függvény szigorúan monoton nő, tehát ebben az intervallumban következik, hogy

$$\begin{aligned}
x-\frac{\pi}{2} &= y-\frac{\pi}{2} \\
x &= y.
\end{aligned}$$

Tehát invertálható a függvény. Az inverz kiszámításához:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - 7 &= y \\
\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) &= y+7
\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a keresett x-re $x-\frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, így az arctg függvény pontosan a megfelelő értéket adja meg:

$$\begin{aligned}
x-\frac{\pi}{2} &= \operatorname{arctg}(y+7) \\
x &= \operatorname{arctg}(y+7) + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Tehát az inverz függvény:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x+7) + \frac{\pi}{2}.$$