4. gyakorlat megoldásai
Függvényhatárértékek és szakadási pontok

F1. Számítsuk ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^5+3x^2+1}{x^2-10x+1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7-2x^5+x^2}{x^9+3x^4-2x^2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(3x)}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

M1. (a) Gyöktelenítünk:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x^2)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$$

(b) A tört számlálója és nevezője is végtelenhez tart, ezért célszerű egyszerűsíteni a törtet x^2-tel:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^5+3x^2+1}{x^2-10x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+3+1/x^2}{1-10/x+1/x^2} = -\infty,$$

mivel a tört számlálója $-\infty$-hez, nevezője 1-hez tart.

(c) A 0-beli határértéket a legkisebb fokú tagok határozzák meg, így itt is x^2-tel egyszerűsítjük a törtet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7-2x^5+x^2}{x^9+3x^4-2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5-2x^3+1}{x^7+3x^2-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

(d) Felhasználjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{ax} = 1$ bármilyen $a \neq 0$ számra:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(7x)}{7x} 7x}{\frac{\sin(3x)}{3x} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(7x)}{7x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}} \frac{7}{3} = \frac{7}{3}.$$

(e) Itt azt is felhasználjuk, hogy $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{4} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

F2. Számítsuk ki az $x_0 = 1$ pontban a jobb és bal oldali határértékét a

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3-1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

függvénynek.

M2. $\lim\limits_{x\to 1} x^2 + x - 1 = 1$, és $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - 1 = 0$, így

$$\begin{aligned} \text{jobb oldali határérték: } & \lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty, \text{ mert } x^3 - 1 > 0, \\ \text{bal oldali határérték: } & \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty, \text{ mert } x^3 - 1 < 0. \end{aligned}$$

F3. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáit:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2,5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2,\ x = 5; \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 1; \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0,\ x = 5. \end{cases}$

M3. (a) A 2 és az 5 pontokon kívül mindenütt folytonosak. A 2-ben a határérték:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{1}{3}$$

létezik, és véges, de nem egyezik meg a függvény értékével ($f(2) = 0$), így ez megszüntethető szakadás. Az 5-ben a határérték:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x-3}{x-5}$$

nem létezik, de van jobb és bal oldali határérték:

$$\text{jobb oldali határérték: } \lim_{x\to 5+} f(x) = \lim_{x\to 5+} \frac{x-3}{x-5} = +\infty$$
$$\text{bal oldali határérték: } \lim_{x\to 5-} f(x) = \lim_{x\to 5-} \frac{x-3}{x-5} = -\infty$$

Ez szinguláris szakadás.

(b) A 0-n kívül folytonos a függvény, a 0-ban megnézzük a két oldali határértéket:

$$\text{jobb oldali határérték: } \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\text{bal oldali határérték: } \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{-x} = -\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = -1$$

Itt tehát a két határérték létezik és véges, de nem egyenlőek, ez egy ugrás szakadás.

(c) Itt is csak a 0-ban lehet szakadás, ott a határértékek:

$$\text{jobb oldali határérték: } \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{-1/x} = 0, \text{ mert } \lim_{x\to 0+} -1/x = -\infty$$
$$\text{bal oldali határérték: } \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{-1/x} = +\infty, \text{ mert } \lim_{x\to 0-} -1/x = +\infty$$

Ez egy szinguláris szakadás, mert legalább az egyik oldali határérték nem véges.