5. gyakorlat megoldásai
Ismétlés és differenciálszámítás

F1. A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = -3$ szám gyöke a

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 + cx - 6$$

polinomnak? Határozzuk meg ebben az esetben a polinom összes valós gyökét és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

M1. Azt szeretnénk, hogy az $x_1 = -3$-at behelyettesítve 0-t kapjunk:

$$0 = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + c(-1) - 6 = 1 - 3 - 3 - c - 6 = -11 - c,$$

azaz $c = -11$. Az így kapott polinomnak az $x_1 = -3$ értelemszerűen gyöke, ezt kiemelhetjük polinomosztással:

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = (x + 3)(x^3 - 3x - 2).$$

Ekkor az $x^3 - 3x - 2$ polinom gyökeit kell meghatároznunk. Ennek lehetséges racionális gyökei a 2 osztói, azaz $\pm 1, \pm 2$. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy a $+1$ nem gyök, de a -1 gyök. Így ezt is kiemelhetjük:

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2).$$

A kapott másodfokú polinomnak a gyökeit a megoldóképlettel határozhatjuk meg: $-1, 2$. Tehát a polinom valós gyökei: $-3, -1, 2$, ahol a -1 kétszeres gyök. Ennek megfelelően a gyöktényezős felbontása:

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = (x + 3)(x + 1)^2(x - 2).$$

F2. Határozzuk meg az

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\},\\ \dfrac{3}{2}, & \text{ha } x=-1,\\ 0, & \text{ha } x=1\end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és azok fajtáit.

M2. A függvény a ± 1-en kívül folytonos, elegendő ezt a két helyet vizsgálni. Az 1 pontban a határérték nem létezik ($2x^2+x-1\to 2$), de van jobb és bal oldali határérték:

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=+\infty,\ \text{mert } x^2-1>0$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=-\infty,\ \text{mert } x^2-1<0$$

Az 1 így szinguláris szakadási hely.

A -1-ben a tört számlálója is 0, így tudjuk egyszerűsíteni törtet $(x+1)$-gyel:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x-1}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2},$$

ami éppen a függvény értéke az 1-ben, tehát itt folytonos a függvény, ez nem szakadási pont.

F3. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait!

(a) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{5x^5}$,

(b) $f(x)=3a^x-\cos(x)$,

(c) $f(x)=(1+x^3)\mathrm{tg}(x)$.

M3. (a) Mivel $f(x)=x^3+x^{-2}-\dfrac{1}{5}x^{-5}$, így

$$f'(x)=3x^2-2x^{-3}-\frac{1}{5}(-5)x^{-6}=3x^2-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^6}.$$

(b) $f'(x)=3a^x\ln a-(-\sin(x))=3a^x\ln a+\sin(x)$.

(c) Ez egy szorzat, így a Leibniz-szabállyal deriváljuk:

$$f'(x)=3x^2\mathrm{tg}(x)+(1+x^3)\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

F4. Legyen

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\,.$$

(a) Számítsuk ki $f'(x)$-et.

(b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(d) Van-e olyan pontja a grafikonnak, ahol az érintő vízszintes?

M4. (a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1)\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

(b) Az érintő iránytangense a derivált értékével egyezik meg:

$$f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

(c) Az x_0-beli érintőegyenes egyenlete: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, ami a jelen esetben: $y = -\frac{1}{2}(x-1) + 0$, mivel $f(1) = 0$.

(d) Ha az érintő vízszintes, akkor a meredéksége 0, azaz $f'(x) = 0$, ami a jelen esetben a $\frac{-2}{(1+x)^2} = 0$ egyenletre vezet, de ez soha nem teljesül, mert egy tört pontosan akkor 0, ha a számlálója 0.