6. gyakorlat megoldásai
Differenciálszámítás folytatás

F1. Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjához húzott érintőegyenes egyenletét az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban.

M1. A függvény deriváltja: $f'(x) = 2x$, ennek értéke az $x_0 = 1$ pontban: $f'(1) = 2$. A függvény értéke: $f(x_0) = f(1) = 1$, így az érintőegyenes egyenlete: $y = 2(x-1)+1$, azaz $y = 2x - 1$.

F2. Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait!

(a) $(3x^2 + 4x + 1)^5$,

(b) $\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$,

(c) $\sqrt{x^2+1}$,

(d) e^{x^4},

(e) $\operatorname{tg}\left(\left(x^2+x\right)^3\right)$,

(f) $\cos\left(e^{2x+3}\right)$.

M2. Az $f \circ g$ függvénykompozíció deriváltja: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Ezt nevezik láncszabálynak is.

(a) A belső függvény a polinom, a külső függvény az ötödik hatvány, így

$$\left((3x^2+4x+1)^5\right)' = 5 \cdot (3x^2+4x+1)^4 \cdot (6x+4).$$

(b) Itt használjuk, hogy $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$:

$$\left(\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3\right)' = 3 \cdot \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

(c) A külső függvény a négyzetgyökvonás, azaz $\frac{1}{2}$-edik hatvány, míg a belső az x^2+1:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(d) Ebben az esetben az exponenciális függvény a külső, a negyedik hatvány a belső függvény:

$$\left(e^{x^4}\right)' = e^{x^4} \cdot 4x^3.$$

(e) Ez már többszörösen összetett függvény, először csak a tangensben levő függvény deriváltját számoljuk ki:

$$\left(\left(x^2+x\right)^3\right)' = 3\left(x^2+x\right)^2 \cdot (2x+1),$$

ami alapján az eredeti függvény deriváltja

$$\left(\operatorname{tg}\left(\left(x^2+x\right)^3\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\left(x^2+x\right)^3\right)} \cdot 3\left(x^2+x\right)^2 \cdot (2x+1).$$

(f) Ez is többszörösen összetett függvény:

$$\left(\cos\left(e^{2x+3}\right)\right)' = -\sin\left(e^{2x+3}\right) \cdot e^{2x+3} \cdot 2$$

F3. Írjuk fel az $f(x) = \cos(x)$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pontjához tartozó érintő egyenletét!

M3. A derivált: $f'(x) = -\sin(x)$, mely az adott pontban: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, a függvény pedig: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, így az érintő egyenlete: $y = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0$, azaz $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

F4. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait!

(a) $\dfrac{x^3+3}{x^2-x-2}$,

(b) $(x^2+1)e^x$,

(c) $\sqrt[3]{1-2x}$,

(d) $x\sin(x)\ln(x)$,

(e) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$,

(f) $\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$.

M4. (a) Ez egy tört, így a hányados deriválási szabályát alkalmazzuk:

$$\left(\frac{x^3+3}{x^2-x-2}\right)' = \frac{3x^2(x^2-x-2) - (x^3+3)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{x^4-2x^3-6x^2-6x+3}{(x^2-x-2)^2}.$$

(b) Ez egy szorzat, így a Leibniz-szabályt használjuk:

$$\left((x^2+1)e^x\right)' = 2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2+2x+1)e^x.$$

(c) Ez egy összetett függvény:

$$\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)' = \frac{1}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2).$$

(d) Ez három függvény szorzata, először csak az első szorzatot deriváljuk:

$$(x\sin(x))' = \sin(x) + x\cos(x),$$

mellyel a teljes szorzat:

$$(x\sin(x)\ln(x))' = (x\sin(x))' \cdot \ln(x) + x\sin(x)\frac{1}{x} = (\sin(x)+x\cos(x))\ln(x) + \sin(x).$$

(e) Összetett függvény:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2+x^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

(f) Ez is egy összetett függvény, először csak a belső függvényt deriváljuk, melyben egy szorzat is van:

$$\left(1+x\sqrt{x+3}\right)' = 1 \cdot \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}},$$

felhasználva, hogy $\left(\sqrt{x+3}\right)' = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ (ez is egy összetett függvény). Így az eredeti függvény deriváltja:

$$\left(\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(1+x\sqrt{x+3}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}}\right).$$