7. gyakorlat megoldásai
Monotonitás, szélsőérték

F1. Legyen

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Számítsuk ki f másodrendű deriváltját ($f''(x)$-et).

M1. Az első derivált az összetett függvény deriválási szabályával:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \left((\cos x)^{-1}\right)' = (-1) \cdot (\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{(\cos x)^2}.$$

A második deriválthoz már a hányados függvény deriválási szabályát kell alkalmaznunk:

$$f''(x) = \left(\frac{\sin x}{(\cos x)^2}\right)' = \frac{\cos x \cdot (\cos x)^2 - \sin x \cdot 2\cos x(-\sin x)}{(\cos x)^4} =$$
$$= \frac{(\cos x)^2 + 2(\sin x)^2}{(\cos x)^3} = \frac{1 + (\sin x)^2}{(\cos x)^3}.$$

F2. Adjuk meg azt a legbővebb intervallumot, amelyen az

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton.

M2. A függvény deriváltja a hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (3x^2 + 1) - x^3 \cdot (6x)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2}{(3x^2 + 1)^2},$$

ami mindig nemnegatív, így a függvény monoton nő $\mathbb{R}$-en. A függvény deriváltja csak a 0-ban nulla, tehát szigorúan pozitív a $(-\infty, 0)$ és a $(0, +\infty)$ intervallumon, tehát ezen intervallumokon a függvény szigorúan monoton nő. Mivel a függvény folytonos a 0-ban, így ezekből következik, hogy a teljes $\mathbb{R}$-en a függvény szigorúan monoton nő.

F3. Határozzuk meg az

$$f(x) = x - \ln(1 + x) \qquad \left(x \in (-1, +\infty)\right)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

M3. Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a függvény deriváltja nulla:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \cdot 1 = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x},$$

ami csak a nullában 0. Tehát a 0 az egyetlen szélsőértékhely, és itt a függvény értéke $f(0) = 0 - \ln(1+0) = 0$, ez a lokális szélsőérték.

Mivel a függvény deriváltja negatív számokon negatív, pozitív számokon pozitív, így a függvény a 0 előtt monoton csökken, 0 után monoton nő, így a 0 lokális minimum. Ezt úgy is megkaphatjuk, hogy megnézzük nullában a második deriváltat, ami:

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)' = -(-1) \cdot (1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2},$$

ami a nullában: $f''(0) = 1$, ami pozitív, ebből is az következik, hogy itt lokális minimum van.

F4. Határozzuk meg az

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény monotonitási intervallumait, valamint lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

M4. Először lederiváljuk a függvényt:

$$f'(x) = 5x^4 - 5 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 3x^2 = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2 \cdot (x^2 - 4x + 3).$$

Ez a függvény $x = 0$-ban, és az $x^2 - 4x + 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeiben ($x = 1$ és $x = 3$) tűnik el. A derivált előjele is ezen pontokban válthat. A $(-\infty, 0)$ intervallumban pozitív a derivált, így itt szigorúan monoton nő a függvény. A $(0, 1)$ intervallumban szintén pozitív, így itt is szigorúan monoton nő. Hasonlóan az F2. feladathoz, most is igaz, hogy a teljes $(-\infty, 1)$ intervallumon szigorúan monoton nő a függvény (0-ban folytonos a függvény). Az $(1, 3)$ intervallumban negatív a derivált értéke, azaz a függvény szigorúan monoton csökken. Végül a $(3, +\infty)$ intervallumban pozitív a derivált, így itt is szigorúan monoton nő a függvény. Ezek alaján az $x = 0$ nem lokális szélsőértékhely, az $x = 1$ lokális maximumhely, melynek értéke: $f(1) = 2$. Az $x = 3$-ban lokális minimum van, melynek értéke $f(3) = -26$.

A szélsőértékek típusát általában a második deriváltakból is leolvashatjuk:

$$f''(x) = \left(5x^4 - 20x^3 + 15x^2\right)' = 20x^3 - 60x^2 + 30x,$$

ami a 0-ban: $f''(0) = 0$, ebből tehát nem tudjuk megállapítani, hogy $x = 0$-ban van-e lokális szélsőérték. A többi pontban viszont igen: $f''(1) = -10 < 0$, így ez lokális maximumhely, míg $f''(3) = 90 > 0$, így ez lokális minimumhely.