8. gyakorlat megoldásai
Szélsőérték feladatok

F1. Határozzuk meg az alábbi, **korlátos és zárt intervallumon** értelmezett

$$f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \qquad (x \in [-1, 5])$$

függvény **abszolút** maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

M1. Abszolút szélsőérték (minimum vagy maximum) lokális szélsőértéknél vagy az intervallum szélein lehet. Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a derivált 0:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12,$$

ennek a gyökei 1 és -2, de a -2 nincs az értelmezési tartományban. A második deriváltba ($f''(x) = 12x + 6$) az 1-et behelyettesítve azt kapjuk, hogy az 1 lokális minimum hely (mert $f''(1) = 18 > 0$), ahol a függvény értéke: $(1) = -6$.

Az intervallum szélein a függvény értékei: $f(-1) = 14$ és $f(5) = 266$.

Ezek alapján a függvény minimuma -6, melyet $x = 1$ helyen vesz fel, és a maximuma 266, melyet az 5-ben vesz el.

F2. Határozzuk meg az alábbi, **nem korlátos intervallumon** értelmezett

$$f(x) := 2x + \frac{200}{x} \qquad (0 < x < +\infty)$$

függvény **abszolút** maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

M2. Először a lokális szélsőértékeket határozzuk meg, amihez a függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2},$$

melynek nullhelye: $x^2 = 100$ esetén, azaz $x = \pm 10$ esetén van, melyből csak a $+10$ esik az értelmezési tartományba. Ez lokális minimum, mivel a második derivált: $f''(x) = -(-2)\frac{200}{x^3} = \frac{400}{x^3}$ pozitív $x = 10$ esetén. A lokális minimum értéke: $f(10) = 40$.

Az intervallum szélein ebben az esetben csak határértékeket tudunk számolni:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} 2x + \frac{200}{x} = 0 + \infty = \infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + \frac{200}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

Tehát ennek a függvénynek az abszolút miminuma 40, melyet $x = 10$ esetén vesz fel, és abszolút maximuma nincs, tetszőlegesen nagy értéket felvesz.

F3. Határozzuk meg az egy literes felül nyitott minimális felszínű henger adatait.

M3. Ha a henger alapkörének sugara r, magassága m, akkor a térfogata $r^2\pi m$, melynek 1-nek kell lennie (feltéve, hogy a hosszakat deciméterben mérjük). Tehát $r^2\pi m = 1$, amiből $m = \frac{1}{r^2\pi}$.

A henger palastjának felszíne $2r\pi m$, míg az alapja $r^2\pi$, összesen $2r\pi m + r^2\pi$. Felhasználva, hogy $m = \frac{1}{r^2\pi}$

$$2r\pi m + r^2\pi = 2r\pi \cdot \frac{1}{r^2\pi} + r^2\pi = \frac{2}{r} + r^2\pi$$

Ennek a függvénynek ($f(r) = \frac{2}{r} + r^2\pi$ $(r \in (0, +\infty))$ keressük a minimumát. Ehhez tekintjük derivált függvényét:

$$f'(r) = -\frac{2}{r^2} + 2\pi r$$

Ennek nullhelye $r = \pi^{-\frac{1}{3}} \approx 0,683$-nél van. A második deriválttal megkapjuk, hogy tényleg mimimum-e:

$$f''(r) = \frac{4}{r^3} + 2\pi,$$

ami az adott pontban valóban pozitív. Az intervallum szélein a függvény határértéke végtelen, így valóban ez az abszolút minimum. Ekkor a henger magassága: $m = \frac{1}{r^2\pi} = \pi^{-\frac{1}{3}} \approx 0,683$.

F4. Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)$%-át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)$%-át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kéne az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

M4. A keresetek $(100y)$%-a az összes jövedelem y-szorosa, azaz $10^{13} \cdot y$. Ennek a $(100y^3)$%-át elcsalják, azaz $10^{13} \cdot y \cdot y^3$ Ft-ot, így csak $10^{13}y - 10^{13}y^4$ marad. Tehát az $f(y) = 10^{13}y - 10^{13}y^4$ függvény maximumát keressük. A függvény deriváltja:

$$f'(y) = 10^{13} - 4 \cdot 10^{13}y^3,$$

melynek nullhelye $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$-ben van. A második derivált ($f''(x) = 10^{13}(-12y^2)$) értéke itt negatív, tehát ez lokális maximum.

A feladatnak $0 \leq y \leq 1$-ra van értelme, de $y = 0$ és $y = 1$ esetén a függvény 0-t vesz fel. Így a függvény maximuma $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{2}{3}} \approx 0,630$-ben van.